PARTIE II : Musique & Mathématiques

ÂGE : 13-15 ans

OUTIL 26 : BACH ET LE RUBAN MUSICAL DE MÖBIUS

Sandgärdskolan

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : Bach et le ruban musical de Möbius

Âge : 13-15 ans

Durée : 1 heure

Concepts mathématiques : Infini

Concepts artistiques : Bidimensionnel vs tridimensionnel. Artisanat.

Objectifs généraux : C'est un excellent outil pour permettre aux élèves de créer et en même temps de découvrir une image classique de l'art.

Instructions et Méthodologies : Permettez aux élèves d'explorer les mathématiques à travers la musique et l'artisanat, en les appliquant à la pratique. Cet outil est une bonne base pour que votre classe puisse découvrir différents concepts mathématiques en travaillant réellement avec leurs mains.

Ressources : Cet outil fournit des images et des vidéos que l'éducateur peut utiliser en classe. Les thèmes abordés seront également une source d'inspiration pour trouver d'autres matériels qui pourraient être pertinents afin de personnaliser et de nuancer la leçon.

Conseils pour l'éducateur : Même si les activités pratiques sont nombreuses, n'oubliez pas d'être précis en ce qui concerne les mathématiques.

Résultats et Compétences ciblés : A l'issue de cet outil, l'élève sera capable de :

- Comprendre l'infini
- Explorer ses talents d'artisan.

Compte-rendu et évaluation :

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 éléments que vous avez appris :	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Introduction

Le ruban de Möbius a-t-il été redécouvert par August Ferdinand Möbius ou est-ce Möbius lui-même qui l'a découvert ? Déjà les Grecs anciens utilisaient le symbole de Möbius si soigneusement étudié, pour désigner l'éternité et l'infini. Möbius, en revanche, a découvert les propriétés mathématiques de la bande, c'est-à-dire qu'elle a un côté et un bord.

Image 1 : ruban de Möbius https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip.jpg

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Le ruban de Möbius

August Ferdinand Möbius, né le 17 novembre 1790 à Schulpforta, mort le 26 septembre 1868 à Leipzig, était un mathématicien et astronome allemand.

En 1816, Mœbius devient professeur d'astronomie et en 1844 professeur de mécanique avancée et d'astronomie à l'université de Leipzig. Ses principaux travaux de recherche appartiennent aux mathématiques pures, où il a inventé une nouvelle méthode géométrique, le calcul dit barycentrique. Les calculs barycentriques utilisent les coordonnées barycentriques .

Son résultat le plus célèbre est le ruban de Möbius, qui est une surface non orientable n'ayant qu'un seul côté. Tandis que Möbius réfléchissait aux différentes façons d'utiliser ce ruban, un autre chercheur, Listing, était sur la même longueur d'onde en ce qui concerne un ruban bidimensionnel qui n'a qu'un côté et un bord. Les deux scientifiques ont publié simultanément des articles sur les fonctions du ruban et sont parvenus au même résultat à peu près au même moment, mais c'est finalement le nom de Möbius qui a été utilisé pour nommer le ruban.

Le ruban de Möbius :

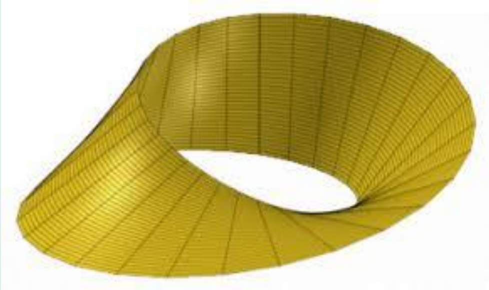

Image 2: Ruban de Möbius https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip_(plot).png

- est une longue surface rectangulaire
- qui est tournée de 180° en assemblant les extrémités
- de sorte à obtenir un côté et un bord tout au long.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l’information contenue dans ce document.

- La surface est non orientable et revient toujours au même point, mais elle est réfléchie car elle n'a qu'un côté.

Listing et Mœbius n'étaient pas les seuls à être fascinés par le ruban. Aujourd'hui encore, le ruban de Möbius est utilisé en graphisme car il crée une image dynamique et illimitée. Dans la littérature de science-fiction, le ruban de Möbius est utilisé comme description d'un univers possible.

Le ruban de Möbius est l'objet mathématique le plus utilisé en dehors du monde des mathématiques. En comparant le ruban de Möbius fabriqué à partir de papier à une boucle musicale, on apprend qu'un morceau de musique qui peut être joué du début à la fin et qui sonne harmoniquement et mélodiquement correct est identique à un tour de ruban de Möbius. Ensuite, si l'on la parcourt une seconde fois, mais que l'on commence à la fin du morceau, de sorte que la dernière note devienne la première note du morceau, et qu'elle sonne toujours bien, on obtient la musique de Möbius. Pour le découvrir par toi-même, imprime les notes, découpe-les, et colle-les dans des rubans de Möbius.

Regarde le ruban musical de Möbius ici:
https://www.youtube.com/watch?v=3x03nJnk-wk

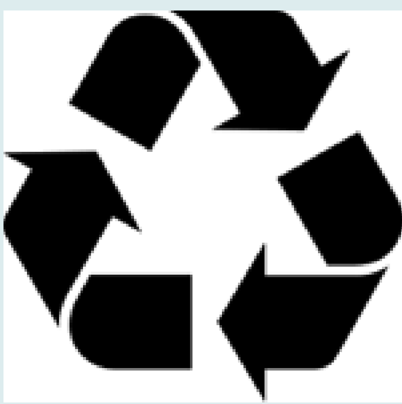


Image 3 : symbole de recyclage : https://creazilla.com/nodes/46010-recycling-symbol-emoji-clipart
Image 4 : Alliance en forme de ruban de Möbius :
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6biusWeddingBand.JPG

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

L'utilisation actuelle des rubans de Möbius comprend, entre autres, le tapis roulant que l'on trouve dans les caisses d'un supermarché. La bande proprement dite qui transporte les marchandises que nous achetons a la forme de ruban de Möbius, car cela réduit l'usure et augmente donc la durée de vie. Au début de la période d'industrialisation, le ruban de Möbius servait de lien entre les machines à vapeur et les machines que celles-ci faisaient fonctionner (tours, batteuses, etc.)

Image 5 : écharpe tricottée https://www.flickr.com/photos/smittenkittenoriginals/5080610523/

Tu peux fabriquer ton propre ruban de Möbius en prenant un ruban de papier rectangulaire, en tournant une extrémité d'un demi-tour et en collant les extrémités ensemble.Imagine maintenant que quelqu'un, disons une fourmi, rampe le long du ruban. En rampant, elle atteindra l'autre côté du ruban. Ainsi, le ruban de Möbius a un seul côté. Möbius a découvert le ruban en regardant les triangulations du plan.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Glossaire

Coordonnées barycentriques : En astronomie, les coordonnées barycentriques sont des coordonnées non rotatives ayant pour origine le barycentre de deux ou plusieurs corps.

Les maths dans le ruban de Möbius

Bien que le ruban de Möbius ne soit pas un cercle, il traite de la notion d'infini. On pourrait dire que le cercle et le ruban de Möbius sont égaux dans ce cas. Bien sûr, on ne peut pas calculer la circonférence du ruban de Möbius, mais il y a un lien entre le cercle et la longueur d'une ligne.

Rayon et diamètre

Un cercle est une figure géométrique circulaire partant d'un point central. À une certaine distance du centre, il y a ce que l'on appelle parfois la circonférence du cercle, qui est la courbe arrondie qui forme la forme du cercle lui-même. La distance entre le point central et la périphérie est appelée le rayon (s) du cercle et est égale à n'importe quel point de la périphérie que nous choisissons.

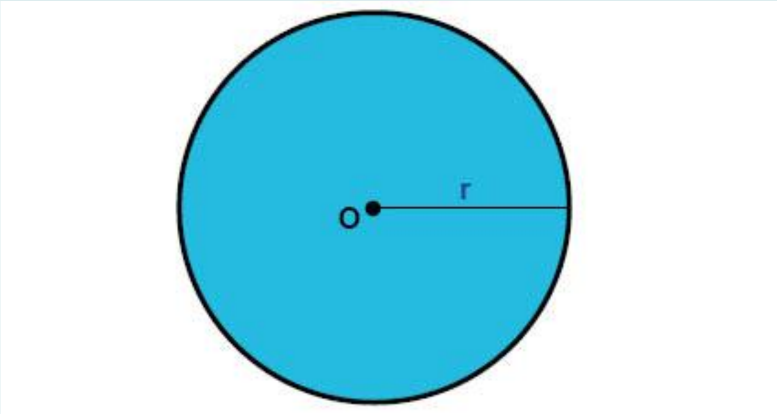

Image 6 : Cercle et rayon

Si nous avons une ligne droite qui va entre deux points sur la circonférence d'un cercle et passe par le centre, nous appelons cette distance le diamètre du cercle (d). Dans la figure ci-dessous, le rayon r et le diamètre d sont tous deux indiqués.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

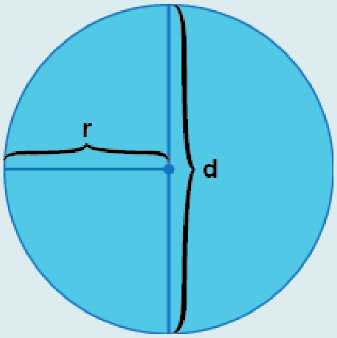

Image 7 : Cercle, rayon (r) et diamètre (d)

Le diamètre d'un cercle est toujours deux fois plus long que le rayon du cercle :

$$d = 2r$$

Circonférence et nombre pi (π)

En examinant le périmètre des quadrilatères et des triangles, nous sommes arrivés à la conclusion que le périmètre de ces figures est égal à la somme de la longueur des côtés.

Mais lorsque nous étudions les cercles, il n'est pas aussi facile de calculer le périmètre. Si nous mesurons la circonférence et les diamètres de différents cercles, nous remarquerons rapidement que nous obtenons le même rapport chaque fois que nous divisons la circonférence d'un cercle, O, et le diamètre du cercle, d.

Ce rapport est le même pour tous les cercles et a la valeur approximative de 3,14159265, lorsque nous arrondissons la valeur à huit décimales. Ce nombre est très important en mathématiques et est appelé le nombre pi, d'après la lettre grecque π. Ainsi, le rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle est $\pi \approx 3{,}14$

En utilisant la définition du nombre π, on peut écrire une formule pour la circonférence d'un cercle, O :

circonférence = π ·diamètre

$$O = \pi \cdot d$$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Comme le diamètre d d'un cercle est toujours deux fois plus long que le rayon r du cercle, on peut aussi écrire la formule de la circonférence du cercle en utilisant le rayon, comme ceci :
circonférence = 2·π· rayon

$$O = 2\pi r$$

La circonférence d'un cercle est infinie et dans la tâche ci-dessous, on peut voir les relations entre la petite et la grande roue comme une relation indéfinie entre elles.

TÂCHE

Vélo

a. Combien de tours la roue arrière fait-elle lorsque la roue avant tourne d'un tour. Le diamètre de la roue avant est de 75 cm. Le diamètre de la roue arrière est de 25 cm.
b. Jusqu'où ira la roue avant si la roue arrière tourne d'un tour.

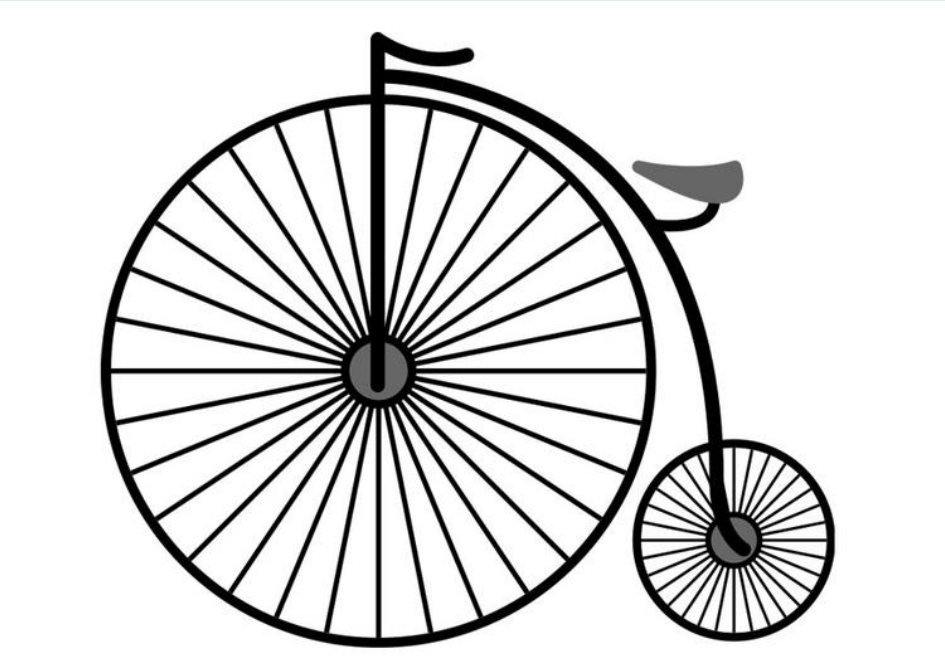

Image 8: Vélo ancien https://pixabay.com/vectors/bike-old-black-huge-wheel-small 306035/

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

POUR EN SAVOIR PLUS…

Fourmis marchant sur un ruban de Möbius :

https://www.youtube.com/watch?v=ZN4TxmWK0bE

Deux exemples de leçons sur le ruban de Möbius (en anglais) :

https://www.youtube.com/watch?v=JNtKcK27x1s

https://www.youtube.com/watch?v=1xKiSSVY5bI

Un court métrage de science-fiction sur le thème du ruban de Möbius (en anglais) :

https://www.youtube.com/watch?v=HD9MYY0aPug

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.