PARTIE II : Musique & Mathématiques

ÂGE : 16-18 ans

OUTIL 25 : BACH ET LE RUBAN MUSICAL DE MÖBIUS

Sandgärdskolan

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : Bach et le ruban musical de Möbius

Âge : 16-18 ans

Durée : 2 heures

Concepts mathématiques : Infini, circonférence d'un cercle, rayon et diamètre d'un cercle, bidimensionnel vs tridimensionnel.

Concepts artistiques : Bidimensionnel vs tridimensionnel. Artisanat.

Objectifs généraux : C'est un excellent outil pour permettre aux élèves de créer et en même temps de découvrir une image classique de l'art.

Instructions et Méthodologies : Permettez aux élèves d'explorer les mathématiques à travers la musique et l'artisanat, en les appliquant à la pratique. Cet outil est une bonne base pour que votre classe puisse découvrir différents concepts mathématiques en travaillant réellement avec leurs mains.

Ressources : Cet outil fournit des images et des vidéos que l'éducateur peut utiliser en classe. Les thèmes abordés seront également une source d'inspiration pour trouver d'autres matériels qui pourraient être pertinents afin de personnaliser et de nuancer la leçon.

Conseils pour l'éducateur : Même si les activités pratiques sont nombreuses, n'oubliez pas d'être précis en ce qui concerne les mathématiques.

Résultats et Compétences ciblés : A l'issue de cet outil, l'élève sera capable de :

- Comprendre l'infini
- Explorer ses talents d'artisan.

Compte-rendu et évaluation :

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 éléments que vous avez appris :	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Introduction

Le ruban de Möbius a-t-il été redécouvert par August Ferdinand Möbius ou est-ce Möbius lui-même qui l'a découvert ? Déjà les Grecs anciens utilisaient le symbole de Möbius si soigneusement étudié, pour désigner l'éternité et l'infini. Möbius, en revanche, a découvert les propriétés mathématiques de la bande, c'est-à-dire qu'elle a un côté et un bord.

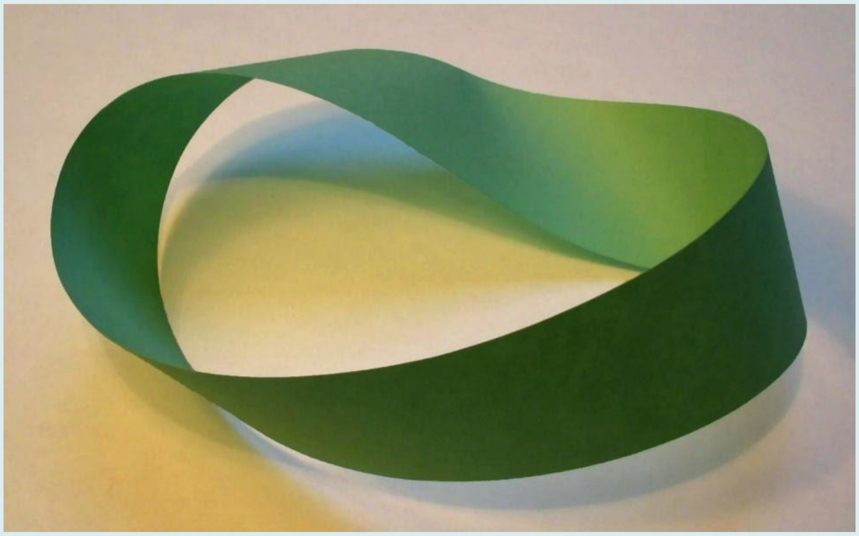

Image 1 : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip.jpg

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Le ruban de Möbius

August Ferdinand Möbius, né le 17 novembre 1790 à Schulpforta, mort le 26 septembre 1868 à Leipzig, était un mathématicien et astronome allemand.

En 1816, Mœbius devient professeur d'astronomie et en 1844 professeur de mécanique avancée et d'astronomie à l'université de Leipzig. Ses principaux travaux de recherche appartiennent aux mathématiques pures, où il a inventé une nouvelle méthode géométrique, le calcul dit barycentrique. Les calculs barycentriques utilisent les coordonnées barycentriques .

Son résultat le plus célèbre est le ruban de Möbius, qui est une surface non orientable n'ayant qu'un seul côté. Tandis que Möbius réfléchissait aux différentes façons d'utiliser ce ruban, un autre chercheur, Listing, était sur la même longueur d'onde en ce qui concerne un ruban bidimensionnel qui n'a qu'un côté et un bord. Les deux scientifiques ont publié simultanément des articles sur les fonctions du ruban et sont parvenus au même résultat à peu près au même moment, mais c'est finalement le nom de Möbius qui a été utilisé pour nommer le ruban.

Le ruban de Möbius :

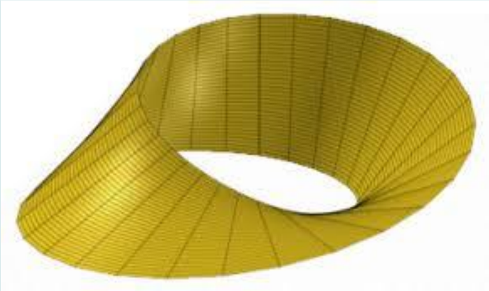

Image 2: Ruban de Möbius https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip_(plot).png

- est une longue surface rectangulaire
- qui est tournée de 180° en assemblant les extrémités
- de sorte à obtenir un côté et un bord tout au long.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

- La surface est non orientable et revient toujours au même point, mais elle est réfléchie car elle n'a qu'un côté.

Listing et Mœbius n'étaient pas les seuls à être fascinés par le ruban. Aujourd'hui encore, le ruban de Möbius est utilisé en graphisme car il crée une image dynamique et illimitée. Dans la littérature de science-fiction, le ruban de Möbius est utilisé comme description d'un univers possible.

Le ruban de Möbius est l'objet mathématique le plus utilisé en dehors du monde des mathématiques. En comparant le ruban de Möbius fabriqué à partir de papier à une boucle musicale, on apprend qu'un morceau de musique qui peut être joué du début à la fin et qui sonne harmoniquement et mélodiquement correct est identique à un tour de ruban de Möbius. Ensuite, si l'on la parcourt une seconde fois, mais que l'on commence à la fin du morceau, de sorte que la dernière note devienne la première note du morceau, et qu'elle sonne toujours bien, on obtient la musique de Möbius. Pour le découvrir par toi-même, imprime les notes, découpe-les, et colle-les dans des rubans de Möbius.

Regarde le ruban musical de Möbius ici :
https://www.youtube.com/watch?v=3x03nJnk-wk

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

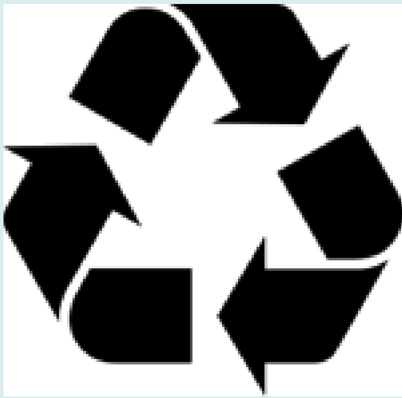

Image 3 : symbole de recyclage : https://creazilla.com/nodes/46010-recycling-symbol-emoji-clipart
Image 4 : Alliance en forme de ruban de Möbius :
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6biusWeddingBand.JPG

L'utilisation actuelle des rubans de Möbius comprend, entre autres, le tapis roulant que l'on trouve dans les caisses d'un supermarché. La bande proprement dite qui transporte les marchandises que nous achetons a la forme de ruban de Möbius, car cela réduit l'usure et augmente donc la durée de vie. Au début de la période d'industrialisation, le ruban de Möbius servait de lien entre les machines à vapeur et les machines que celles-ci faisaient fonctionner (tours, batteuses, etc.)

Image 5 : écharpe tricottée : https://www.flickr.com/photos/smittenkittenoriginals/5080610523/

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Tu peux fabriquer ton propre ruban de Möbius en prenant un ruban de papier rectangulaire, en tournant une extrémité d'un demi-tour et en collant les extrémités ensemble.Imagine maintenant que quelqu'un, disons une fourmi, rampe le long du ruban. En rampant, elle atteindra l'autre côté du ruban. Ainsi, le ruban de Möbius a un seul côté. Möbius a découvert le ruban en regardant les triangulations du plan.

Glossaire

Coordonnées barycentriques : En astronomie, les coordonnées barycentriques sont des coordonnées non rotatives ayant pour origine le barycentre de deux ou plusieurs corps.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les maths dans le ruban de Möbius

Un ruban de Möbius peut être similaire à une surface dans un système de coordonnées. Cette partie de l'outil montre comment cette surface peut être calculée à l'aide d'intégrales et de fonctions.

Intégrales et fonctions

Lors du calcul de l'intégrale d'une fonction, cela équivaut à calculer l'aire entre le graphe de la fonction et l'axe des x.

Commençons par un exemple

Nous avons la fonction suivante

$$f(x) = 2x + 4$$

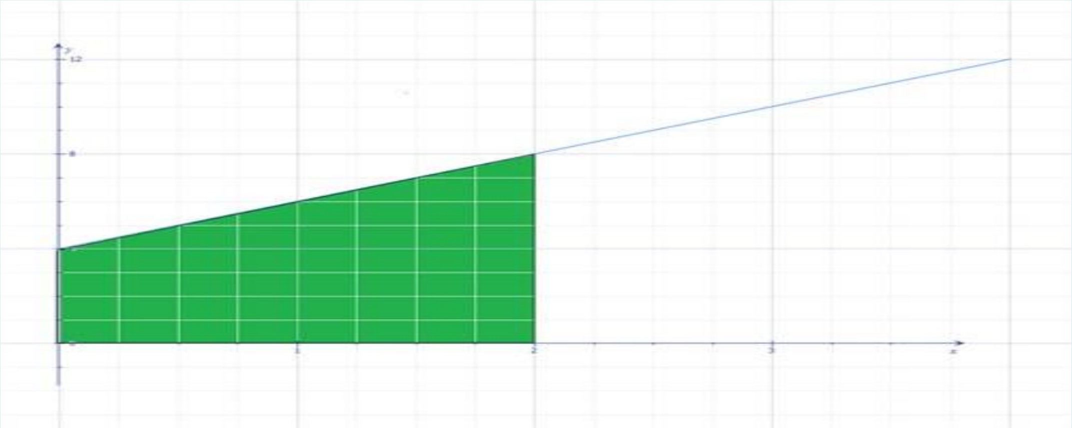

Image 6: Plan cartésien

Nous souhaitons connaître l'aire de la zone qui se trouve entre le graphe et l'axe des x, et qui est délimitée par les lignes verticales x = 0 et x = 2.

Il existe une formule générale pour calculer ces types de surfaces :

$$\int \mathbf{baf\,(x)\,dx} = \mathbf{F\,(b)} - \mathbf{F\,(a)}$$

A gauche, nous avons d'abord le signe de l'intégrale

$$\int$$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les valeurs a et b indiquent la limite inférieure et supérieure de la surface qui nous intéresse (dans notre exemple, a = 0 et b = 2). À droite du symbole de l'intégrale avec ses limites se trouve la fonction qui constitue la limite supérieure de la zone. Tout à gauche, vient dx, qui indique que le calcul de l'aire doit être fait par rapport à la modification de l'intersection des x.

Dans le coin droit, la différence est indiquée

$$\mathbf{F\ (b)\ - F\ (a)}$$

C'est la différence entre la valeur de la fonction primitive F à la limite supérieure (x = b) et à la limite inférieure (x = a).

Cette formule est très nouvelle et le plus simple est donc de continuer avec notre exemple :

Nous avons donc la fonction connue y (x) = 2x + 4 et nous connaissons la limite inférieure à a = 0 et la limite supérieure à b = 2. Nous pouvons donc établir la partie gauche de la formule, qui dans notre exemple ressemble à ceci (nous supposons explicitement dans ce cas que l'intégrale est une aire, A) :

$$A = \int \boldsymbol{20\ (2x\ +\ 4)\ dx}$$

La partie droite de la formule comprend la fonction primitive F, que nous ne connaissons pas encore, de sorte que dans l'étape suivante, nous devons la calculer, ce que nous faisons sur la base des règles que nous avons élaborées dans la section précédente. Nous obtenons ce qui suit :

$$\boldsymbol{F\ (x)\ =\ x\,2\ +\ 4x\ +\ C}$$

Lors du calcul de l'intégrale, on écrit généralement le calcul comme suit :

$$\int \boldsymbol{baf\ (x)\ dx\ =\ [F\ (x)]\ ba}$$

qui, dans notre exemple, devient

$$\int \boldsymbol{20\ (2x\ +\ 4)\ dx\ =\ [x\,2\ +\ 4x]\ 20}$$

9

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Comme tu as pu le remarquer dans la formule ci-dessus, nous avons ignoré le terme constant C. La raison en est que ce terme va disparaître puisqu'il est inclus à la fois dans F (b) et F (a). Toutefois, nous incluons le terme constant dans le calcul suivant, afin de montrer comment il disparaît :

$$\boldsymbol{A = \int 20\,(2x + 4)\,dx = [x\,2 + 4x]\,20 =}$$

$$\boldsymbol{= (22 + 4 \cdot 2 + C) - (02 + 4 \cdot 0 + C) =}$$

$$\boldsymbol{= 4 + 8 + C - C = 12 a.e.}$$

Ainsi, la superficie recherchée est de 12 unités de zone.

Dans l'exemple ci-dessus, nous avions une fonction dont le graphe sur tout l'intervalle était au-dessus de l'axe des x. Ainsi, toute la zone sur laquelle nous calculons l'aire se trouve au-dessus de l'axe des x.

Que se passe-t-il avec nos calculs si la fonction doit avoir des valeurs négatives dans l'intervalle et que la surface calculée dans ce cas est en dessous de l'axe des x ? Dans ce cas, les calculs d'intégration basés sur la méthode que nous avons utilisée ci-dessus conduiront à un résultat négatif. Mais une aire ne peut pas avoir de valeur négative, c'est pourquoi nous devons changer le signe de l'intégrale si l'aire à calculer est en dessous de l'axe des x.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

TÂCHE

Calcul de l'aire d'une surface limitée

Calcule l'aire de la zone délimitée par la courbe Y = x2 + 2x + 2 l'axe des x et

a) Les droites x = -1 et x = 1

b) Les droites x = -2 et x = 0

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

POUR EN SAVOIR PLUS…

Fourmis marchant sur un ruban de Möbius :

https://www.youtube.com/watch?v=ZN4TxmWK0bE

Deux exemples de leçons sur le ruban de Möbius (en anglais) :

https://www.youtube.com/watch?v=JNtKcK27x1s

https://www.youtube.com/watch?v=1xKiSSVY5bI

Un court métrage de science-fiction sur le thème du ruban de Möbius (en anglais) :

https://www.youtube.com/watch?v=HD9MYY0aPug

Une brève introduction à la ligne intégrale (en anglais) :

https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions/line-integrals/v/introduction-to-the-line-integral

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.