

ΜΕΡΟΣ IV: Κινηματογράφος & Μαθηματικά

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 13-15

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 44: ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ - Ο ΑΝΘΡΩΠΟΣ ΠΟΥ ΓΝΩΡΙΖΕ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Sandgärdskolan



Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Ο άνθρωπος που γνώριζε το άπειρο – πρώτοι αριθμοί

Ηλικιακό Εύρος: 13-15 χρονών

Διάρκεια: 2 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Πρώτοι αριθμοί, Άπειρο

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Είδη ταινίας, ήρωες της Marvel, σημείο φυγής

Γενικοί Σκοποί: Αυτή η εργασία θα σας κάνει να μάθετε περισσότερα για το άπειρο.

Θέλει να κάνετε κάποιες σκέψεις για τη λέξη άπειρο. Τι σας λέει; Θα σας δείξει επίσης τη σύνδεση μεταξύ άπειρου και πρώτων αριθμών.

Πηγές: Αυτό το εργαλείο παρέχει εικόνες και βίντεο που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στην τάξη σας. Τα θέματα που εξετάζονται σε αυτές τις πηγές θα αποτελέσουν επίσης μια πηγή έμπνευσης για να βρείτε επιπλέον σχετικό υλικό, προκειμένου να εξατομικεύσετε και να δώσετε μια άλλη διάσταση στο μάθημά σας.

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Η μάθηση μέσα από την πράξη έχει αποδειχθεί ότι είναι πολύ αποτελεσματική, ειδικά για νεαρούς μαθητές με χαμηλή ικανότητα συγκέντρωσης και μαθησιακές δυσκολίες. Μην ξεχνάτε να εξηγείτε πάντα σε τι είναι χρήσιμη, πρακτικά, κάθε μαθηματική έννοια.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες: Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να: Κατανοεί καλύτερα τους πρώτους αριθμούς και το άπειρο. Εξερευνήσει ταινίες με σούπερ ήρωες.

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Εισαγωγή

Το άπειρο αφορά πράγματα που δεν τελειώνουν ποτέ. Είναι μια αφηρημένη έννοια που περιγράφει κάτι χωρίς κανένα όριο και αναφέρεται σε μια συλλογή από έννοιες που σχετίζονται με το άπειρο στα μαθηματικά, τη φιλοσοφία και τη θεολογία.

Η λέξη άπειρο έχει πολλές έννοιες, ανάλογα με το πότε χρησιμοποιείται. Η λέξη προέρχεται από μια λατινική λέξη, που σημαίνει «χωρίς τέλος», Ad Infinitum / στο άπειρο. Το άπειρο συνεχίζεται για πάντα, έτσι μερικές φορές ο χώρος, οι αριθμοί και άλλα πράγματα λέγεται ότι είναι «άπειρα», γιατί ποτέ δεν τελειώνουν.

Το άπειρο δεν είναι στην πραγματικότητα ένας συνηθισμένος αριθμός, ωστόσο μερικές φορές χρησιμοποιείται σαν να είναι. Το άπειρο δηλώνει συχνά την ποσότητα από κάτι, αντί για το πόσο μεγάλο είναι κάτι. Για παράδειγμα, υπάρχουν άπειρα πολλοί ακέραιοι αριθμοί, αλλά δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός που είναι απείρως μεγάλος. Ωστόσο, διαφορετικά είδη μαθηματικών έχουν διαφορετικά είδη άπειρου. Συνεπώς, το νόημα της έννοιας αλλάζει συχνά.



Εικόνα 1 Σύμβολο άπειρου [Wikimedia Commons](#)

Ο άνθρωπος που γνώριζε το άπειρο

Η ταινία «Ο Άνθρωπος που Γνώριζε το Άπειρο» αφορά τον Σρινιβάσα Ραμανουτζάν, ο οποίος γενικά θεωρείται από τους μαθηματικούς ως ένα από τα δύο πιο ρομαντικά πρόσωπα στον κλάδο των μαθηματικών.



Εικόνα 2: Σρινιβάσα Ραμανουτζάν [Wikimedia Commons](#)

Ο Ραμανουτζάν (1887-1920) γεννήθηκε στη νότια Ινδία και πέθανε στο ίδιο μέρος, σε ηλικία μόλις 32 ετών. Σε ένα από τα πιο σημαντικά γεγονότα στη μαθηματική ιστορία, πέρασε την περίοδο του Α΄ Παγκοσμίου Πολέμου στο Trinity College του Κέιμπριτζ, κατόπιν πρόσκλησης από τον κορυφαίο Βρετανό μαθηματικό Γκόντφρεϊ Χάρολντ Χάρντι (1877-1947) και τον σπουδαίο συνεργάτη του Τζον Λίτλγουντ.

Ως αγόρι δεν ήθελε να μελετήσει τίποτα άλλο εκτός από τα μαθηματικά, ήταν σχεδόν εξ ολοκλήρου αυτοδίδακτος και το έργο του πριν από το Κέιμπριτζ καταγράφεται σε μια σειρά τετραδίων.

Το έργο του μετά την επιστροφή του στην Ινδία το 1919 περιέχεται στο παραπλανητικά ονομασμένο Lost Notebook (Χαμένο Τετράδιο). Το τετράδιο βρέθηκε αργότερα στη βιβλιοθήκη του Wren College για τα μαθηματικά. Όσο ήταν στην Αγγλία ο Ραμανουτζάν έγινε ο πρώτος Ινδός υπότροφος τόσο στο Τρίνιτι όσο και στην Βασιλική Εταιρεία.

Ο άνθρωπος των αριθμών

Ο Ραμανούτζαν είχε μια εξαιρετική ικανότητα να βλέπει μοτίβα. Ενώ σπάνια αποδεικνυε τα αποτελέσματά του, άφησε πολλές εκτιμήσεις συνόλων και ολοκληρωμάτων. Ήταν ειδικός σε ένα μέρος της θεωρίας αριθμών που ονομάζεται δομοστοιχειωτές μορφές, που προκαλούν περισσότερο ενδιαφέρον σήμερα σε σχέση με την εποχή που πέθανε.

Το Lost Notebook ξεκίνησε τη μελέτη των εικονικών συναρτήσεων του θήτα, οι οποίες μόλις σήμερα έγιναν πλήρως κατανοητές. Η εμβάθυνση στα Notebooks ολοκληρώθηκε πρόσφατα κυρίως από τους Αμερικανούς μαθηματικούς και λέκτορες Μπρους Μπερντ και Τζορτζ Άντριους. Περιλαμβάνει χιλιάδες τυπωμένες σελίδες.

Ο βραβευμένος με Νόμπελ αστρονόμος Σουμπραμανιάν Τσαντρασεκάρ, περιέγραψε πόσο σημαντική ήταν η επιτυχία του Ραμανούτζαν στην Αγγλία για την αυτοπεποίθηση του ίδιου και των ιδρυτών της σύγχρονης Ινδίας, συμπεριλαμβανομένου του Τζαβαχαρλάλ Νεχρού, ο οποίος έγινε ο πρώτος πρωθυπουργός της ανεξάρτητης Ινδίας το 1947.

Το 2008, ο Ντέιβιντ Λίβιτ δημοσίευσε μια αναθεωρημένη έκδοση της ζωής του Ραμανούτζαν με τον τίτλο The Indian Clerk. Ενώ ο Λίβιτ αποτυπώνει τη ζωή του πολύ όμορφα, ως συγγραφέας παίρνει κάποιες τολμηρές πρωτοβουλίες και περιλαμβάνει λεπτομέρειες για την προσωπική ζωή του Ραμανούτζαν (αντί να επικεντρωθεί στην επαγγελματική του ζωή ως μαθηματικός).

Το 2012, για την 125η επέτειο της γέννησης του Ραμανούτζαν, οι ανακοινώσεις της Αμερικανικής μαθηματικής εταιρίας δημοσίευσαν οκτώ άρθρα σχετικά με το έργο του. Αυτή η σύνθεση έδειξε έντονα πώς η φήμη και η επιρροή του Ραμανούτζαν συνεχίζουν να αυξάνονται.

Μια τελευταία ανεκδοτική ιστορία περιγράφει όμορφα τον Ραμανούτζαν και το έντονο ενδιαφέρον του με τα μαθηματικά. Το 1917 ο Ραμανούτζαν νοσηλεύτηκε στο Λονδίνο και τον επισκέφθηκε ο συνάδελφός του, Χάρντι. Καθώς δεν ήταν καλός στο να πιάνει κουβέντα, ο Χάρντι το μόνο που μπόρεσε να σκεφτεί να πει ήταν ότι ο αριθμός του ταξί, 1.729, ήταν αδιάφορος. Ο Ραμανούτζαν απάντησε ότι, αντιθέτως, ήταν ο μικρότερος αριθμός που εκφράζεται ως ένα σύνολο δύο αριθμών εις τον κύβο με δύο ξεχωριστούς τρόπους:

Το 1729 είναι ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα 2 κύβων με 2 διαφορετικούς τρόπους:

$$\begin{aligned}1729 &= 1^3 + 12^3 \\ &= 9^3 + 10^3\end{aligned}$$

Αποτελεί το γινόμενο των 3 πρώτων αριθμών:

$$1729 = 7 \times 13 \times 19$$

Ο μεγαλύτερος γνωστός όμοιος αριθμός είναι:

$$\begin{aligned}885623890831 &= 7511^3 + 7730^3 \\ &= 8759^3 + 5978^3 \\ &= 3943 \times 14737 \times 15241\end{aligned}$$

Εικόνα 2 Χάρντι - Ραμανούτζαν «Αριθμός του ταξί» [Wikimedia Commons](#)

Περισσότερες ταινίες για μαθηματικούς

Έχουν υπάρξει πολλά βιβλία, θεατρικές παραστάσεις και ταινίες, καθώς και τηλεοπτικές σειρές όπως το "The Big Bang Theory" για μαθηματικούς και θεωρητικούς φυσικούς. Ειδικά η σειρά "The Big Bang Theory" έδωσε δημοσιότητα στα μαθηματικά, τη φυσική και τη φιλοσοφία και το ενδιαφέρον για τη μελέτη αυτών των κλάδων έχει αυξηθεί πολύ.

Άλλες ενδιαφέρουσες ταινίες είναι: A Beautiful Mind (2001), Copenhagen (2002), Proof (2005), The Imitation Game για τον Άλαν Τούρινγκ και The Theory of Everything για τον Στίβεν Χόκινγκ.

Γλωσσάρι

Subrahmanyan Chandrasekhar (Σουμπραμανιάν Τσαντρασεκάρ): Ήταν ένας Αμερικάνος αστροφυσικός με καταγωγή από το Ταμίλ, στον οποίο απονεμήθηκε το βραβείο Νόμπελ Φυσικής το 1983.

David Leavitt (Ντέιβιντ Λίβιτ): Είναι Αμερικανός συγγραφέας που έχει γράψει τόσο μυθιστορήματα όσο και μη μυθοπλαστικά βιβλία για διάσημους μαθηματικούς. Το βιβλίο του «The Indian Clerk» αφορά το Ραμανούτζαν και το βιβλίο «The Man Who Knew Too Much» είναι για τον Άλαν Τούρινγκ.

Jawaharlal Nehru (Τζαβαχαρλάλ Νεχρού): Ήταν ηγέτης κινήματος για τα πολιτικά δικαιώματα στην Ινδία κατά τη διάρκεια του αγώνα για ανεξαρτησία από τη Βρετανία. Έγινε ο πρώτος πρωθυπουργός στην Ινδία το 1947. Τόσο η κόρη του, Indira Gandhi, όσο και ο εγγονός του, Rajiv Gandhi, ακολούθησαν τα βήματά του και αργότερα έγιναν πρωθυπουργοί.

Συναρτήσεις του θήτα: Αυτές είναι ειδικές συναρτήσεις με πολλές σύνθετες μεταβλητές όπως οι ελλειπτικές συναρτήσεις.

Τα Μαθηματικά πίσω από το «Ο άνθρωπος που γνώριζε το άπειρο»

Υπάρχουν δύο είδη άπειρων: το δυναμικό άπειρο και το πραγματικό άπειρο.

* **Δυναμικό άπειρο** είναι μια διαδικασία που δεν σταματά ποτέ. Για παράδειγμα, προσθέτουμε 10 σε έναν αριθμό. Δεν έχει σημασία πόσες φορές προστίθεται το 10, μπορούμε πάντα να προσθέσουμε ακόμα περισσότερα 10.

* **Πραγματικό άπειρο** είναι μια πιο αφηρημένη ιδέα. Για παράδειγμα, υπάρχουν άπειρα πολλοί αριθμοί, καθώς είναι αδύνατο να τους γράψουμε όλους.

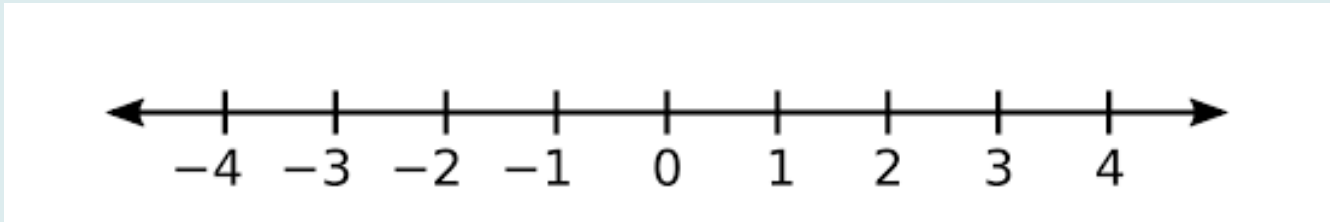
Μια πρώιμη αναφορά στην ιδέα του άπειρου έγινε από τον Έλληνα φιλόσοφο Αναξίμανδρο, ο οποίος θεωρούσε ότι το άπειρο ήταν ο θεμέλιος λίθος και η πρωταρχική ύλη της πραγματικότητας. Ο Αναξίμανδρος ήταν ο πρώτος στην ελληνική φιλοσοφική παράδοση που πρότεινε πως το σύμπαν ήταν άπειρο.

Οι Ινδοί Τζαϊνιστές (μια θρησκεία που υπάρχει σε ολόκληρη την Ινδία, σύμφωνα με την Βικιπαίδεια αποτελεί την έκτη μεγαλύτερη θρησκεία στη χώρα) ήταν οι πρώτοι που απέρριψαν την ιδέα ότι όλα τα άπειρα ήταν ίδια ή ίσα. Αναγνώρισαν διαφορετικούς τύπους άπειρων:

- * άπειρο σε μήκος (μία διάσταση),
- * άπειρο σε εμβαδόν (δύο διαστάσεις),
- * άπειρο σε όγκο (τρεις διαστάσεις), και
- * άπειρο σε διάρκεια (άπειρος αριθμός διαστάσεων).

Στα τέλη του 19ου αιώνα, ο Γκέοργκ Κάντορ εισήγαγε και μελέτησε άπειρα σύνολα και άπειρους αριθμούς, οι οποίοι αποτελούν πλέον ένα ουσιαστικό μέρος της βάσης των μαθηματικών.

Για παράδειγμα, στα σύγχρονα μαθηματικά, μια ευθεία θεωρείται ως σύνολο όλων των σημείων της, και ο άπειρος αριθμός τους (ο πληθάριθμος της γραμμής) είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των ακεραίων.



Εικόνα 3: Σειρά με αριθμούς [Wikimedia Commons](#)

Έτσι, η μαθηματική έννοια του άπειρου βελτιώνει και επεκτείνει την παλιά φιλοσοφική έννοια. Χρησιμοποιείται παντού στα μαθηματικά, ακόμη και σε τομείς, όπως η συνδυαστική και η θεωρία αριθμών που μπορεί να φαίνεται ότι δεν έχουν καμία σχέση με αυτήν. Για παράδειγμα, η απόδειξη του Γουάιλς για το Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά χρησιμοποιεί την ύπαρξη πολύ μεγάλων άπειρων συνόλων.

ΕΡΓΑΣΙΑ

Το ξενοδοχείο Hilbert

Το Hilbert είναι το μεγαλύτερο ξενοδοχείο στον κόσμο: έχει απείρως πολλά δωμάτια. Θα μπορούσαμε να φανταστούμε ότι αποτελείται από έναν μονάχα ατελείωτο διάδρομο, με τα δωμάτια να αριθμούνται 1, 2, 3, 4 και ούτω καθεξής. Την ημέρα που φτάνουμε στο Hilbert, κάθε μονόκλινο δωμάτιο του ξενοδοχείου είναι γεμάτο. (Η επιχείρηση πάει πολύ καλά ...)

Σε οποιοδήποτε άλλο ξενοδοχείο, η ρεσεψιόν θα έπρεπε να μας διώξει: αν όλα τα δωμάτια είναι γεμάτα, απλά δεν υπάρχει χώρος για εμάς. Περιέργως, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στο Hilbert.

Μόλις φτάσουμε και ζητήσουμε ένα δωμάτιο, το ξενοδοχείο κάνει μια ανακοίνωση μέσω μεγάφωνου που ακούγεται παντού στο ξενοδοχείο: ζητούν από όλους τους επισκέπτες να μετακινηθούν στο επόμενο δωμάτιο. Τώρα ο επισκέπτης στο δωμάτιο 1 μετακινείται στο δωμάτιο 2, ο επισκέπτης στο δωμάτιο 2 μετακινείται στο δωμάτιο 3 και ο επισκέπτης σε οποιοδήποτε δωμάτιο n μετακινείται στο δωμάτιο $n + 1$. Καθώς δεν υπάρχει τελευταίο δωμάτιο στο ξενοδοχείο, κάθε επισκέπτης θα αποκτήσει ένα νέο δωμάτιο.

Τώρα το πρώτο δωμάτιο είναι άδειο και μπορούμε να μπούμε μέσα. Φυσικά αυτό δεν θα είχε συμβεί σε κανένα ξενοδοχείο πεπερασμένου αριθμού δωματίων. Θα μπορούσαμε να ζητήσουμε από όλους τους επισκέπτες να μετακινηθούν στο επόμενο δωμάτιο, αλλά ο επισκέπτης στο τελευταίο δωμάτιο θα έμενε χωρίς δωμάτιο. Το Hilbert δεν έχει τελευταίο δωμάτιο και το άπειρο συν ένα είναι ακόμα άπειρο.

Αυτή η ιδέα μπορεί να επεκταθεί: Εάν φτάσουν 10 νέοι επισκέπτες, η υποδοχή ζητά απλώς από όλους τους επισκέπτες να μετακινηθούν στα επόμενα 10 δωμάτια. Εάν φτάσουν 100 νέοι επισκέπτες, όλοι οι ήδη διαμένοντες πρέπει να μετακινηθούν στα

επόμενα 100 δωμάτια - και ομοίως για οποιονδήποτε άλλο αριθμό. Έτσι, ακόμη και αν το ξενοδοχείο είναι γεμάτο, μπορεί συνεχίσει να προσφέρει δωμάτια σε οποιονδήποτε αριθμό νέων επισκεπτών!



Δοκιμάστε το:

Πάρτε ένα λευκό χαρτί μεγέθους A3. Χρησιμοποιώντας έναν χάρακα σχεδιάστε το ξενοδοχείο μόνο με τους τοίχους και την οροφή. Ξεκινώντας από την κάτω δεξιά γωνία του κτιρίου σχεδιάστε 10 παράθυρα για να υποδείξετε τα δωμάτια. Τώρα έρχεται ο επόμενος επισκέπτης και χρειάζεστε ένα ακόμα δωμάτιο, καθώς υπάρχει ένας άπειρος αριθμός δωματίων στο Hilbert. Πόσα δωμάτια μπορείτε να χωρέσετε σε έναν όροφο; Τι είναι αυτό που θα κάνει το ξενοδοχείο σας να έχει ένα πεπερασμένο αριθμό δωματίων;

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ...

Υπερεντατικό μάθημα στα Μαθηματικά Άπειρων Σειρών:

<http://legacy.earlham.edu/~peters/writing/infapp.htm>



Βίντεο για τον Άνθρωπο που γνώριζε το άπειρο:

<https://www.youtube.com/watch?v=P0idBBhGNgU>

Για τη σειρά The Big Bang Theory:

<https://the-big-bang-theory.com/>

Μάθημα σχετικά με τη γεωμετρία του ισλαμικού σχεδιασμού:

<https://www.youtube.com/watch?v=pg1NpMmPv48>

Για τον Σρινιβάσα Ραμανούτζαν:

https://en.wikipedia.org/wiki/Srinivasa_Ramanujan

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Ramanujan.html>



<https://www.youtube.com/watch?v=uGoUef1C3K0>

Για το άπειρο:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Infinity>

<https://www.mathsisfun.com/numbers/infinity.html>

Γιατί ο αριθμός 1729 είναι γνωστός ως ο αριθμός Ραμανούτζαν;:

<https://www.quora.com/Why-is-the-number-1729-known-as-the-Ramanujan-number>

Μια πραγματικά δύσκολη εξίσωση που θέτει ο Ραμανούτζαν:



<https://www.youtube.com/watch?v=r5BGli84arY>