

## ΜΕΡΟΣ II: Μουσική & Μαθηματικά

### ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 13-15

---

1

## ΕΡΓΑΛΕΙΟ 26: Ο ΜΠΑΧ ΚΑΙ Η ΜΟΥΣΙΚΗ ΤΑΙΝΙΑ ΤΟΥ ΜΕΜΠΙΟΥΣ

---

Sandgärdskolan

## Οδηγός Εκπαιδευτικού

**Τίτλος:** Ο Μπαχ και η μουσική ταινία του Μέμπιους

**Ηλικιακό Εύρος:** 13-15 χρονών

**Διάρκεια:** 1 ώρα

**Μαθηματικές Έννοιες:** Άπειρο

**Καλλιτεχνικές Έννοιες:** Δισδιάστατα ή τρισδιάστατα, χειροτεχνία.

**Γενικοί Σκοποί:** Πρόκειται για ένα εξαιρετικό εργαλείο που επιτρέπει στους μαθητές να δημιουργήσουν και ταυτόχρονα να ανακαλύψουν μια κλασική εικόνα της τέχνης.

**Οδηγίες και Μεθοδολογία:** Δώστε στους μαθητές τη δυνατότητα να εξερευνήσουν τα μαθηματικά μέσω της μουσικής και της χειροτεχνίας, εφαρμόζοντάς τα στην πράξη. Αυτό το εργαλείο αποτελεί μια καλή βάση για να ανακαλύψουν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες δουλεύοντας με τα χέρια τους.

**Πηγές:** Αυτό το εργαλείο παρέχει εικόνες και βίντεο που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο εκπαιδευτικός στην τάξη. Τα θέματα που εξετάζονται σε αυτές τις πηγές θα αποτελέσουν επίσης πηγή έμπνευσης για την εύρεση παραπάνω σχετικού υλικού που μπορεί να εξατομικεύσει και να δώσει μια άλλη διάσταση στο μάθημα.

**Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό:** Παρόλο που υπάρχουν πολλές διαδραστικές δραστηριότητες, να θυμάστε να είστε ακριβείς όσον αφορά τα μαθηματικά.

**Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες:** Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- Κατανοεί καλύτερα το άπειρο
- Εξερευνήσει τις δεξιότητές του στη χειροτεχνία.

### Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

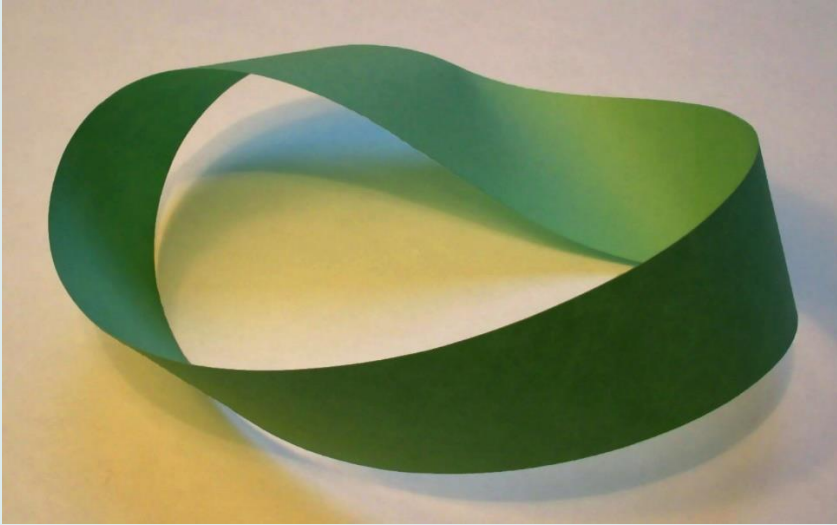
Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.

Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί

1.

## Εισαγωγή

Η ταινία του Μέμπιους ανακαλύφθηκε ξανά από τον Άουγκουστ Φέρντιναντ Μέμπιους ή ήταν ο Μέμπιους που την ανακάλυψε; Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν ήδη χρησιμοποιήσει το τόσο προσεκτικά μελετημένο σύμβολο Μέμπιους για να εκφράσουν την αιωνιότητα και το άπειρο. Ο Μέμπιους, από την άλλη πλευρά, ανακάλυψε τις μαθηματικές ιδιότητες της ταινίας, ότι έχει δηλαδή μία πλευρά και μία ακμή.



**Εικόνα 1** Η ταινία Μέμπιους [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius\\_strip.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip.jpg)

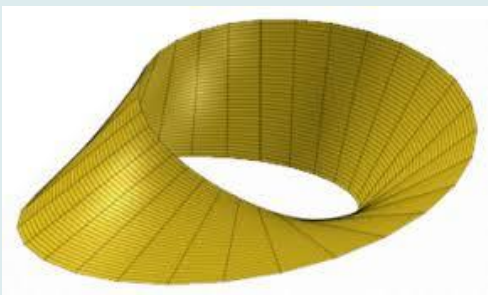
## Η ταινία του Μέμπιους

Ο Άουγκουστ Φέρντιναντ Μέμπιους, που γεννήθηκε στις 17 Νοεμβρίου 1790 στο Σούλπφορτε και πέθανε στις 26 Σεπτεμβρίου 1868 στη Λειψία, ήταν Γερμανός μαθηματικός και αστρονόμος.

Το 1816, ο Μέμπιους έγινε ένας εξαιρετικός καθηγητής αστρονομίας και το 1844 καθηγητής ανώτερης μηχανικής και αστρονομίας στο Πανεπιστήμιο της Λειψίας. Το κύριο ερευνητικό έργο του ανήκει στα καθαρά μαθηματικά, όπου εφηύρε μια νέα γεωμετρική μέθοδο, τον αποκαλούμενο βαρυκεντρικό υπολογισμό. Οι βαρυκεντρικοί υπολογισμοί χρησιμοποιούν βαρυκεντρικές συντεταγμένες.

Το πιο διάσημο εξαγόμενό του συμπέρασμα είναι η λεγόμενη ταινία Μέμπιους, η οποία είναι μια μη προσανατολιζόμενη επιφάνεια που έχει μόνο μία πλευρά. Ενώ ο Μέμπιους ασχολούνταν πλήρως με το πώς θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αυτή η ταινία με διαφορετικούς τρόπους, την ίδια περίοδο ένας άλλος ερευνητής, ο Λίστινγκ, βρισκόταν στα ίδια μονοπάτια για μια δισδιάστατη ταινία που έχει μόνο μία πλευρά και μία ακμή. Οι δύο επιστήμονες δημοσίευσαν ταυτόχρονα άρθρα σχετικά με τις λειτουργίες της ταινίας και κατέληξαν στο ίδιο συμπέρασμα περίπου ταυτόχρονα, αλλά ήταν το όνομα του Μέμπιους που τελικά χρησιμοποιήθηκε για να το όνομα της ταινίας - και ο κόσμος έχει τώρα την ταινία Μέμπιους.

Η ταινία Μέμπιους



**Εικόνα 2:** Η ταινία Μέμπιους [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius\\_strip\\_\(plot\).png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip_(plot).png)

- είναι μια μακριά ορθογώνια επιφάνεια
- η οποία περιστρέφεται 180 μοίρες με τις άκρες ενωμένες
- έτσι ώστε κατά μήκος της νέας πορείας της να έχει μία πλευρά και ένα σύνορο.
- Η επιφάνεια είναι μη προσανατολιζόμενη και επιστρέφει στο ίδιο σημείο συνεχώς, αλλά κατοπτρικά καθώς έχει μόνο μία πλευρά.

Δεν ήταν μόνο ο Λίστινγκ και ο Μέμπιους που είχαν γοητευτεί από την μονόπλευρη ταινία, όπου μια παύλα μπορεί να ζωγραφιστεί σε "όλες" τις σελίδες χωρίς να σηκωθεί το στυλό. Ακόμη και σήμερα, η ταινία Μέμπιους χρησιμοποιείται στο γραφικό σχεδιασμό καθώς δημιουργεί μια δυναμική και ατελείωτη εικόνα. Στη λογοτεχνία επιστημονικής φαντασίας, η ταινία Μέμπιους χρησιμοποιείται ως περιγραφή ενός πιθανού σύμπαντος.

Η ταινία Μέμπιους είναι το μαθηματικό αντικείμενο που χρησιμοποιείται περισσότερο εκτός του κόσμου των μαθηματικών. Συγκρίνοντας την ταινία Μέμπιους από χαρτί με ένα βρόχο επανάληψης (μουσική λούπα), θα καταλάβετε ότι ένα κομμάτι μουσικής που μπορεί να αναπαραχθεί από την αρχή μέχρι το τέλος του και να ακούγεται αρμονικά και μελωδικά σωστά (βασικά να ακούγεται ωραία) είναι το ίδιο με όταν κάνει μια στροφή η ταινία Μέμπιους. Στη συνέχεια, αν παίξετε το κομμάτι δεύτερη φορά, αρχίζοντας αυτή τη φορά από το τέλος του κομματιού ώστε η τελευταία νότα να γίνει η πρώτη, και εξακολουθεί να ακούγεται ωραία, τότε έχετε τη μουσική Μέμπιους. Για να το διαπιστώσετε και εσείς οι ίδιοι, εκτυπώστε τις νότες και αφού τις κόψετε, να τις κολλήσετε στις λωρίδες Μέμπιους.



Ρίξτε μια ματιά στη μουσική ταινία Μέμπιους εδώ:

<https://www.youtube.com/watch?v=3x03nJnk-wk>



**Εικόνα 3:** Σύμβολο ανακύκλωσης <https://creazilla.com/nodes/46010-recycling-symbol-emoji-clipart>

**Εικόνα 4:** Βέρα <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6biusWeddingBand.JPG>

Σήμερα η ταινία Μόμπιους χρησιμοποιείται, μεταξύ άλλων, στο μεταφορικό ιμάντα που βρίσκεται στο ταμείο στο σούπερ μάρκετ. Ο ιμάντας που μεταφέρει τα αγαθά που αγοράζουμε έχει το σχήμα της ταινίας Μόμπιους, καθώς έτσι μειώνεται η φθορά και συνεπώς αυξάνεται η διάρκεια ζωής. Κατά τη διάρκεια της πρώιμης περιόδου εκβιομηχάνισης, η ταινία Μόμπιους χρησιμοποιήθηκε ως σύνδεσμος μεταξύ των ατμομηχανών και των μηχανών που τροφοδοτούσαν οι ατμομηχανές (τόρνοι, αλωνιστικές μηχανές κ.λπ.)

7



**Εικόνα 5:** Χειροποίητο κασκόλ

<https://www.flickr.com/photos/smittenkittenoriginals/5080610523/>

Μπορείτε να φτιάξετε τη δική σας ταινία Μέμπιους, παίρνοντας μια λωρίδα σε σχήμα παραλληλόγραμμο, στριφογυρίζοντας μισή φορά τη μία πλευρά και κολλώντας τις άκρες μαζί. Αν φανταστούμε τώρα κάποιον, ας πούμε ένα μυρμήγκι, να κινείται κατά μήκος της ταινίας, όταν κινείται, θα βρεθεί στην άλλη πλευρά της ταινίας. Συνεπώς, η ταινία Μέμπιους έχει μόνο μία πλευρά. Ο Μέμπιους ανακάλυψε την ταινία καθώς παρατηρούσε τους τριγωνισμούς στο επίπεδο.

## Γλωσσάρι

**Βαρυκεντρικές συντεταγμένες:** Στην αστρονομία, οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες είναι μη-περιστρεφόμενες συντεταγμένες με το σημείο απαρχής να βρίσκεται στο βαρύκεντρο δύο ή περισσότερων σωμάτων.

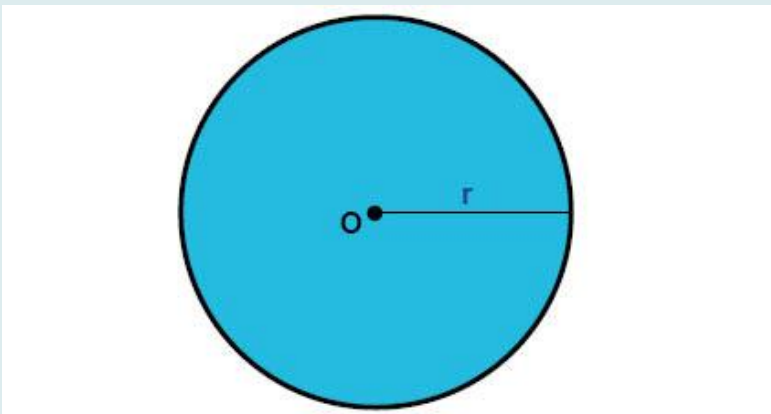


## Τα μαθηματικά πίσω από την ταινία Μέμπιους

Παρόλο που η ταινία Μέμπιους δεν είναι κύκλος, ασχολείται με την έννοια του άπειρου. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο κύκλος και η ταινία Μέμπιους είναι ίσοι στην περίπτωση αυτή. Φυσικά δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την περιφέρεια μιας ταινίας Μέμπιους, αλλά υπάρχει μια σχέση μεταξύ του κύκλου και του μήκους μιας ευθείας γραμμής.

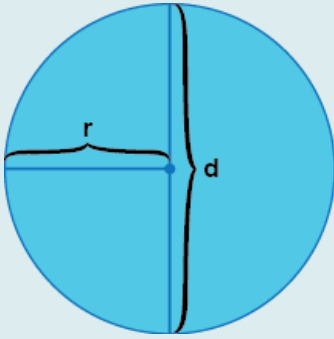
### Ακτίνα και διάμετρος

Ένας κύκλος είναι ένα κυκλικό γεωμετρικό σχήμα που ξεκινά από ένα κεντρικό σημείο. Σε μια ορισμένη απόσταση από το κέντρο, υπάρχει αυτό που μερικές φορές ονομάζεται περιφέρεια του κύκλου, η οποία είναι η στρογγυλεμένη καμπύλη που σχηματίζει το σχήμα του ίδιου του κύκλου. Η απόσταση από το κεντρικό σημείο στην περιφέρεια ονομάζεται η ακτίνα ( $r$ ) του κύκλου και είναι ίση με οποιοδήποτε σημείο επιλέξουμε πάνω στην περιφέρεια.



Εικόνα 6: Κύκλος

Αν έχουμε μια ευθεία που βρίσκεται μεταξύ δύο σημείων στην περιφέρεια ενός κύκλου και περνά μέσα από το κέντρο, καλούμε αυτή την απόσταση διάμετρο του κύκλου ( $d$ ). Στο παρακάτω σχήμα, σημειώνονται τόσο η ακτίνα  $r$  όσο και η διάμετρος  $d$ .



**Εικόνα 7:** Κύκλος με διάμετρο και ακτίνα

Η διάμετρος ενός κύκλου είναι πάντα διπλάσια από την ακτίνα του κύκλου:

$$d = 2r$$

## Κυκλική περιφέρεια και αριθμός π

Κατά την εξέταση της περιμέτρου των τετραγώνων και των τριγώνων, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η περίμετρος αυτών των σχημάτων είναι ίση με το άθροισμα του μήκους των πλευρών.

Αλλά όταν μελετούμε κύκλους, δεν είναι τόσο εύκολο να υπολογίσουμε την περίμετρο. Αν μετρήσουμε την περιφέρεια και τις διαμέτρους διαφορετικών κύκλων, σύντομα θα παρατηρήσουμε ότι έχουμε τον ίδιο λόγο κάθε φορά που διαιρούμε την περιφέρεια ενός κύκλου,  $O$ , και τη διάμετρο του κύκλου,  $d$ .

Αυτός ο λόγος είναι ο ίδιος για όλους τους κύκλους και έχει την κατά προσέγγιση τιμή 3.14159265, όταν στρογγυλοποιούμε την τιμή σε οκτώ δεκαδικά ψηφία. Ο αριθμός αυτός είναι πολύ σημαντικός στα μαθηματικά και ονομάζεται αριθμός π, σύμφωνα με το ελληνικό γράμμα π. Έτσι, ο λόγος μεταξύ της περιφέρειας και της διαμέτρου ενός κύκλου είναι  $\pi \approx 3,14$ .

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του αριθμού π, μπορούμε να γράψουμε έναν τύπο για την περιφέρεια ενός κύκλου,  $O$ :

$$\text{περιφέρεια} = \pi \cdot \text{διάμετρος}$$

$$O = \pi \cdot d$$

Δεδομένου ότι η διάμετρος  $d$  ενός κύκλου είναι πάντα διπλάσια από την ακτίνα  $r$  του κύκλου, μπορούμε επίσης να γράψουμε τον τύπο για την περιφέρεια του κύκλου χρησιμοποιώντας την ακτίνα, με αυτόν τον τρόπο:

$$\text{περιφέρεια} = 2 \cdot \pi \cdot \text{ακτίνα}$$

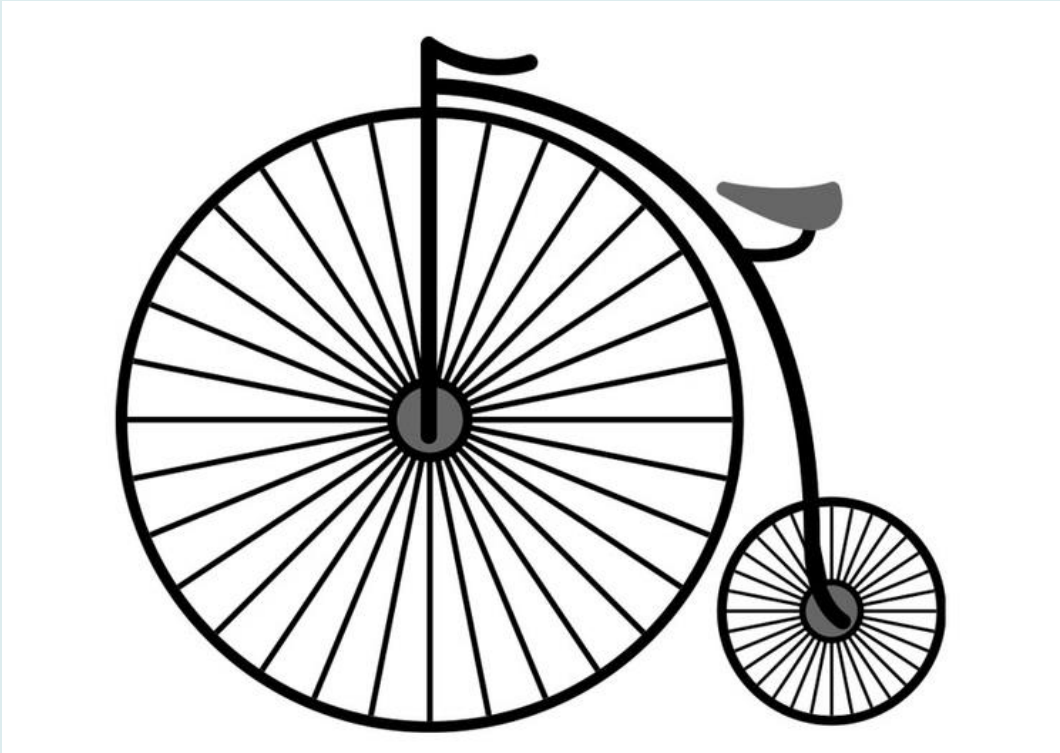
$$O = 2\pi r$$

Μια περιφέρεια ενός κύκλου είναι άπειρη και στην εργασία παρακάτω μπορείτε να δείτε τις σχέσεις μεταξύ του μικρού και του μεγάλου τροχού ως μια αόριστη σχέση μεταξύ τους.

## ΕΡΓΑΣΙΑ

### Ποδήλατο

- Πόσες στροφές γυρίζει ο πίσω τροχός όταν ο μπροστινός τροχός γυρίζει μια στροφή. Η διάμετρος του μπροστινού τροχού είναι 75 εκ. Η διάμετρος του πίσω τροχού είναι 25 εκ.
- Πόσο μακριά θα πάει ο μπροστινός τροχός εάν ο πίσω τροχός κάνει έναν γύρο.



Εικόνα 8: Παλιό ποδήλατο

## ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ...



Μυρμήγκια περπατούν σε ταινία Μέμπιους:

<https://www.youtube.com/watch?v=ZN4TxmWK0bE>

Δύο μαθήματα που εξετάζουν την ταινία Μέμπιους:

<https://www.youtube.com/watch?v=JNtKcK27x1s>

<https://www.youtube.com/watch?v=1xKiSSVY5bl>

Μια ταινία επιστημονικής φαντασίας μικρού μήκους περιλαμβάνει ως θέμα την ταινία Μέμπιους:

<https://www.youtube.com/watch?v=HD9MYY0aPug>