ΜΕΡΟΣ II: Μουσική & Μαθηματικά

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16-18

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 25: Ο ΜΠΑΧ ΚΑΙ Η ΜΟΥΣΙΚΗ ΤΑΙΝΙΑ ΤΟΥ ΜΕΜΠΙΟΥΣ

Sandgärdskolan

TheArtOf Maths

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Ο Μπαχ και η μουσική ταινία του Μέμπιους

Ηλικιακό Εύρος: 16-18 χρονών

Διάρκεια: 2 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Άπειρο, περιφέρεια του κύκλου, ακτίνα και διάμετρος του κύκλου, δισδιάστατος ή τρισδιάστατος.

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Δισδιάστατος ή τρισδιάστατος, χειροτεχνία.

Γενικοί Σκοποί: Πρόκειται για ένα εξαιρετικό εργαλείο που επιτρέπει στους μαθητές να δημιουργήσουν και ταυτόχρονα να ανακαλύψουν μια κλασική εικόνα της τέχνης.

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Δώστε στους μαθητές τη δυνατότητα να εξερευνήσουν τα μαθηματικά μέσω της μουσικής και της χειροτεχνίας, εφαρμόζοντάς τα στην πράξη. Αυτό το εργαλείο αποτελεί μια καλή βάση για να ανακαλύψουν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώντας τα χέρια τους.

Πηγές: Αυτό το εργαλείο παρέχει εικόνες και βίντεο που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο εκπαιδευτικός στην τάξη. Τα θέματα που εξετάζονται σε αυτές τις πηγές θα αποτελέσουν επίσης πηγή έμπνευσης για την εύρεση παραπάνω σχετικού υλικού που μπορεί να εξατομικεύσει και να δώσει μια άλλη διάσταση στο μάθημα.

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Παρόλο που υπάρχουν πολλές διαδραστικές δραστηριότητες, να θυμάστε να είστε ακριβείς όσον αφορά τα μαθηματικά.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες: Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

Κατανοεί καλύτερα το άπειρο

Εξερευνήσει τις δεξιότητές του στη χειροτεχνία.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

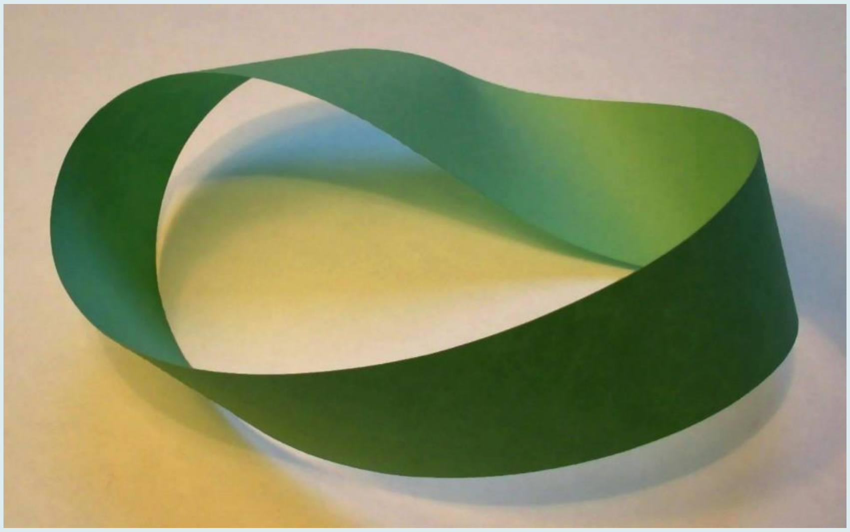
Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Εισαγωγή

Η ταινία του Μέμπιους ανακαλύφθηκε ξανά από τον Άουγκουστ Φέρντιναντ Μέμπιους ή ήταν ο Μέμπιους που την ανακάλυψε; Ήδη οι αρχαίοι Έλληνες είχαν χρησιμοποιήσει το τόσο προσεχτικά μελετημένο σύμβολο του Μέμπιους ώστε να υποδηλώνει την αιωνιότητα και το άπειρο. Ο Μέμπιους, από την άλλη πλευρά, ανακάλυψε τις μαθηματικές ιδιότητες της ταινίας, ότι έχει δηλαδή μία πλευρά και μία ακμή.



Εικόνα 1 Η ταινία Μέμπιους https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip.jpg

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

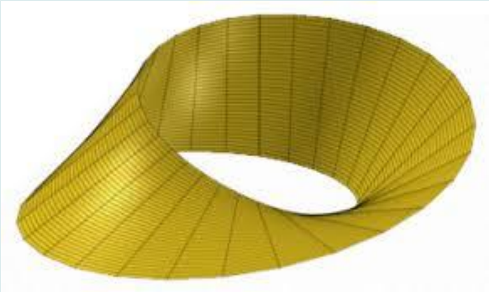
Η ταινία του Μέμπιους

Ο Άουγκουστ Φέρντιναντ Μέμπιους, γεννήθηκε στις 17 Νοεμβρίου 1790 στο Σούλπφορτε και πέθανε στις 26 Σεπτεμβρίου 1868 στη Λειψία, ήταν Γερμανός μαθηματικός και αστρονόμος.

Το 1816 έγινε ένας εξαιρετικός καθηγητής αστρονομίας και το 1844 καθηγητής ανώτερης μηχανικής και αστρονομίας στο πανεπιστήμιο της Λειψίας. Το κύριο ερευνητικό έργο του ανήκει στα καθαρά μαθηματικά, όπου εφηύρε μια νέα γεωμετρική μέθοδο, τον αποκαλούμενο βαρυκεντρικό υπολογισμό. Οι βαρυκεντρικοί υπολογισμοί χρησιμοποιούν βαρυκεντρικές συντεταγμένες.

Το πιο διάσημο εξαγόμενό του συμπέρασμα είναι η λεγόμενη ταινία Μέμπιους, η οποία είναι μια μη προσανατολιζόμενη επιφάνεια που έχει μόνο μία πλευρά. Ενώ ο Μέμπιους ασχολούνταν πλήρως με το πώς θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αυτή η ταινία με διαφορετικούς τρόπους, την ίδια περίοδο ένας άλλος ερευνητής, ο Λίστινγκ, βρισκόταν στα ίδια μονοπάτια για μια δισδιάστατη ταινία που έχει μόνο μία πλευρά και μία ακμή. Οι δύο επιστήμονες δημοσίευσαν ταυτόχρονα άρθρα σχετικά με τις λειτουργίες της ταινίας και κατέληξαν στο ίδιο συμπέρασμα περίπου ταυτόχρονα, αλλά ήταν το όνομα του Μέμπιους που τελικά χρησιμοποιήθηκε για να το όνομα της ταινίας - και ο κόσμος έχει τώρα την ταινία Μέμπιους.

Η ταινία του Μέμπιους:



Εικόνα 2: Η ταινία του Μέμπιους https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip_(plot).png

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

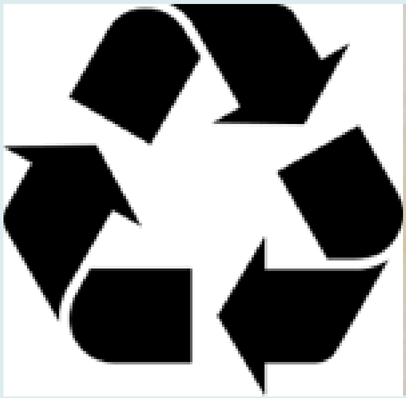
- είναι μια μακριά ορθογώνια επιφάνεια
- η οποία περιστρέφεται 180 μοίρες με τις άκρες ενωμένες
- έτσι ώστε κατά μήκος της νέας πορείας της να έχει μία πλευρά και ένα περίγραμμα.
- Η επιφάνεια είναι μη προσανατολιζόμενη και επιστρέφει στο ίδιο σημείο συνεχώς, αλλά κατοπτρικά καθώς έχει μόνο μία πλευρά.

Δεν ήταν μόνο ο Λίστινγκ και ο Μέμπιους που είχαν γοητευτεί από την μονόπλευρη ταινία, όπου μια παύλα μπορεί να ζωγραφιστεί σε «όλες» τις σελίδες χωρίς να σηκωθεί το στυλό. Ακόμη και σήμερα, η ταινία του Μέμπιους χρησιμοποιείται στο γραφικό σχεδιασμό καθώς δημιουργεί μια δυναμική και απεριόριστη εικόνα. Στη λογοτεχνία επιστημονικής φαντασίας, η ταινία του Μέμπιους χρησιμοποιείται ως περιγραφή ενός πιθανού σύμπαντος.

Η ταινία Μέμπιους είναι το μαθηματικό αντικείμενο που χρησιμοποιείται περισσότερο εκτός του κόσμου των μαθηματικών. Συγκρίνοντας τη ταινία Μέμπιους από χαρτί με ένα βρόχο επανάληψης (μουσική λούπα), θα καταλάβετε ότι ένα κομμάτι μουσικής που μπορεί να αναπαραχθεί από την αρχή μέχρι το τέλος του και να ακούγεται αρμονικά και μελωδικά σωστά (βασικά να ακούγεται ωραία) είναι το ίδιο με όταν κάνει μια στροφή η ταινία Μέμπιους. Στη συνέχεια, αν παίξετε το κομμάτι δεύτερη φορά, αρχίζοντας αυτή τη φορά από το τέλος του κομματιού ώστε η τελευταία νότα να γίνει η πρώτη, και εξακολουθεί να ακούγεται ωραία, τότε έχετε τη μουσική Μέμπιους. Για να το διαπιστώσετε και εσείς οι ίδιοι, εκτυπώστε τις νότες και αφού τις κόψετε, να τις κολλήσετε στις λωρίδες Μέμπιους.

Ρίξτε μια ματιά στη μουσική ταινία του Μέμπιους εδώ:
https://www.youtube.com/watch?v=3x03nJnk-wk

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.



Εικόνα 3: Σύμβολο ανακύκλωσης https://creazilla.com/nodes/46010-recycling-symbol-emoji-clipart

Εικόνα 4: Βέρα https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6biusWeddingBand.JPG

Σήμερα η ταινία Μέμπιους χρησιμοποιείται, μεταξύ άλλων, στο μεταφορικό ιμάντα που βρίσκεται στο ταμείο στο σούπερ μάρκετ. Ο ιμάντας που μεταφέρει τα αγαθά που αγοράζουμε έχει το σχήμα της ταινίας Μέμπιους, καθώς έτσι μειώνεται η φθορά και συνεπώς αυξάνεται η διάρκεια ζωής. Κατά τη διάρκεια της πρώιμης περιόδου εκβιομηχάνισης, η ταινία Μέμπιους χρησιμοποιήθηκε ως σύνδεσμος μεταξύ των ατμομηχανών και των μηχανών που τροφοδοτούσαν οι ατμομηχανές (τόρνοι, αλωνιστικές μηχανές κ.λπ.)

Εικόνα 5: Χειροποίητο κασκόλ

https://www.flickr.com/photos/smittenkittenoriginals/5080610523/

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Μπορείτε να φτιάξετε τη δική σας ταινία του Μέμπιους, παίρνοντας μια ορθογώνια Μπορείτε να φτιάξετε τη δική σας ταινία Μέμπιους, παίρνοντας μια λωρίδα σε σχήμα παραλληλόγραμμο, στριφογυρίζοντας μισή φορά τη μία πλευρά και κολλώντας τις άκρες μαζί. Αν φανταστούμε τώρα κάποιον, ας πούμε ένα μυρμήγκι, να κινείται κατά μήκος της ταινίας, όταν κινείται, θα βρεθεί στην άλλη πλευρά της ταινίας. Συνεπώς, η ταινία Μέμπιους έχει μόνο μία πλευρά. Ο Μέμπιους ανακάλυψε την ταινία καθώς παρατηρούσε τους τριγωνισμούς στο επίπεδο.

Γλωσσάρι

Βαρυκεντρικές συντεταγμένες: Στην αστρονομία, οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες είναι μη-περιστρεφόμενες συντεταγμένες με την αρχή των αξόνων να είναι στο βαρύκεντρο δύο ή περισσότερων σωμάτων.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Τα μαθηματικά πίσω από την ταινία του Μέμπιους

Μια ταινία του Μέμπιους μπορεί να είναι παρόμοια με ένα τμήμα σε ένα σύστημα συντεταγμένων. Σ'αυτό το μέρος του εργαλείου θα δούμε πώς μπορεί να υπολογιστεί αυτό το τμήμα χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα και συναρτήσεις.

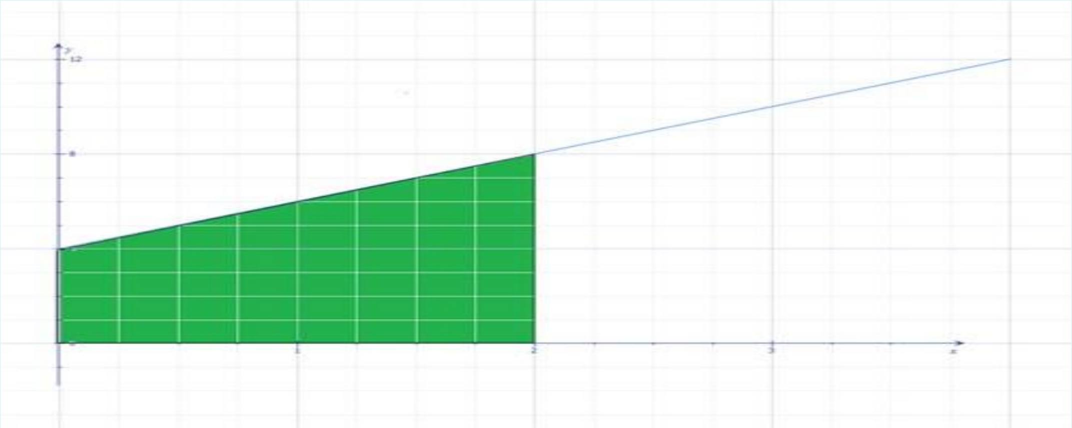
Ολοκληρώματα και συναρτήσεις

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης ισοδυναμεί με τον υπολογισμό του εμβαδού μεταξύ του γραφήματος και του άξονα x.

Ας αρχίσουμε με ένα παράδειγμα

Έχουμε την παρακάτω συνάρτηση

$$f(x) = 2x + 4$$



Εικόνα 6: Σύστημα συντεταγμένων

Μας ενδιαφέρει να μάθουμε το εμβαδόν του τμήματος που βρίσκεται ανάμεσα στο γράφημα και στον άξονα του x και είναι οριοθετημένο από τις ευθείες γραμμές $x = 0$ και $x = 2$.

Υπάρχει ένας γενικός τύπος για τον υπολογισμό αυτών των τύπων εμβαδού:

$$\int_a^b f(x)\,\mathbf{dx} = \mathbf{F\,(b) - F\,(a)}$$

Στα αριστερά, έχουμε το σύμβολο του ολοκληρώματος

$$\int$$

Οι αριθμοί a και b δείχνουν το κατώτερο και το ανώτερο όριο για το τμήμα που μας ενδιαφέρει (στο παράδειγμά μας, a = 0 και b = 2). Στα δεξιά του συμβόλου του ολοκληρώματος με τα όριά του υπάρχει η συνάρτηση που αποτελεί το άνω όριο του τμήματος. Στο τελευταίο αριστερό, έρχεται το dx, που δείχνει ότι ο υπολογισμός του τμήματος πρέπει να γίνει σε σχέση με την αλλαγή στην ένωση x.

Στην δεξιά πλευρά, η διαφορά υποδεικνύεται

$$\mathbf{F}\,(\mathbf{b}) - \mathbf{F}\,(\mathbf{a})$$

Αυτή είναι η διαφορά μεταξύ της τιμής της πρωταρχικής συνάρτησης F στο ανώτερο όριο (x = b) και στο κατώτρτο όριο (x = a).
Είναι κάτι πολύ καινούριο που έρχεται με αυτόν τον τύπο, οπότε το πιο απλό είναι να συνεχίσουμε με το παράδειγμά μας:
Έτσι έχουμε τη γνωστή συνάρτηση y (x) = 2x + 4 και γνωρίζουμε το κατώτερο όριο στο a = 0 και το ανώτερο όριο στο b = 2. Έτσι μπορούμε να δημιουργήσουμε το αριστερό μέρος του τύπου, το οποίο στο παράδειγμα μοιάζει με αυτό (υποθέτουμε ρητά στην περίπτωση αυτή ότι το ολοκλήρωμα είναι ένα τμήμα, A):

$$\mathrm{A} = \int_0^2 (2x + 4)\, dx$$

Το δεξιό μέρος του τύπου περιλαμβάνει την πρωταρχική συνάρτηση F, την οποία δεν γνωρίζουμε ακόμα, έτσι στο επόμενο βήμα πρέπει να την υπολογίσουμε, το οποίο κάνουμε βάσει των κανόνων που καταλήξαμε στο προηγούμενο τμήμα. Παίρνουμε τα εξής:

$$F\,(x) = x^2 + 4x + C$$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Κατά τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος, ο υπολογισμός γράφεται ως εξής:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

Ο οποίος σύμφωνα με το παράδειγμά μας γίνεται

$$\int_0^2 (2x+4)\,dx = [x^2 + 4x]_0^2$$

Όπως ίσως έχετε παρατηρήσει στον παραπάνω τύπο, αγνοήσαμε τον σταθερό όρο C καθώς γράψαμε τη δεξιά πλευρά. Ο λόγος για αυτό είναι ότι ο όρος αυτός θα εξαφανιστεί καθώς συμπεριλαμβάνεται και στους F (b) και F (a). Ωστόσο, συμπεριλαμβάνουμε τον σταθερό όρο στον ακόλουθο υπολογισμό, για να δείτε πώς εξαφανίζεται:

$$A = \int_0^2 (2x+4)\,dx = [x^2 + 4x]_0^2 =$$

$$= (2\cdot 2 + 4\cdot 2 + C) - (0\cdot 2 + 4\cdot 0 + C) =$$

$$= 4 + 8 + C - C = 12\ a.e.$$

Έτσι, το εμβαδόν που ψάχναμε είναι 12 μονάδες.

Στο παραπάνω παράδειγμα, είχαμε μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση για όλο το διάστημα ήταν πάνω από τον άξονα x. Έτσι, ολόκληρο το τμήμα στο οποίο θα υπολογίζαμε το εμβαδόν βρίσκεται πάνω από τον άξονα x.

Τι συμβαίνει στους υπολογισμούς μας εάν η συνάρτηση πρέπει να έχει αρνητικές τιμές στο διάστημα και το τμήμα που θέλουμε να υπολογίσουμε σε αυτή την περίπτωση βρίσκεται κάτω από τον άξονα x; Τότε λοιπόν οι υπολογισμοί του ολοκληρώματος με βάση τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω θα οδηγήσουν σε αρνητικό αποτέλεσμα. Αλλά ένα εμβαδόν δε μπορεί να έχει αρνητική τιμή, γι 'αυτό πρέπει να

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

αλλάξουμε το πρόσημο του ολοκληρώματος αν το τμήμα του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

ΕΡΓΑΣΙΑ

Υπολογισμός εμβαδού περιορισμένου τμήματος

Υπολογίστε το εμβαδόν του τμήματος που οριοθετείται από την καμπύλη $\boldsymbol{Y = x^2 + 2x + 2}$ του άξονα x και

a) Τις γραμμές x = -1 και x = 1

b) Τις γραμμές x = -2 και x = 0

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ…

Μυρμήγκια περπατούν σε ταινία του Μέμπιους

https://www.youtube.com/watch?v=ZN4TxmWK0bE

Δύο μαθήματα που εξετάζουν την ταινία του Μέμπιους

https://www.youtube.com/watch?v=JNtKcK27x1s

https://www.youtube.com/watch?v=1xKiSSVY5bI

Μια ταινία επιστημονικής φαντασίας μικρού μήκους περιλαμβάνει ως θέμα την ταινία του Μέμπιους

https://www.youtube.com/watch?v=HD9MYY0aPug

Μια μικρή εισαγωγή στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions/line-integrals/v/introduction-to-the-line-integral

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.