

ΜΕΡΟΣ II: ΜΟΥΣΙΚΗ &
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16-18

ΓΑΓΟΡΑ



ΡΥΤΑΓΟΡΑ



ΕΡΓΑΛΕΙΟ 24: Ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ
Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΥΣΙΚΗ ΤΟΥ

Sandgärdskolan



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Ο Πυθαγόρας και η μαθηματική μουσική του

Ηλικιακό εύρος: 16-18 χρονών

Διάρκεια: 2 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Εξισώσεις, άλγεβρα, άρρητοι αριθμοί

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Αρχαία ελληνική μουσική, αρμονία

Γενικοί Σκοποί: Να ανακαλύψουν οι μαθητές τις μαθηματικές έννοιες που κρύβονται πίσω από τις μουσικές συνθέσεις και να δουν ότι η αρμονία (ή αυτό που θεωρούμε αρμονικό στο δυτικό τμήμα του κόσμου) μπορεί να εξηγηθεί με μαθηματικούς όρους.

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Αυτό το εργαλείο σας παρέχει ιδέες για να φτιάξετε απλή μουσική στην τάξη και να δείξετε στους μαθητές ότι διαφορετικοί τόνοι ταλαντεύονται σε διαφορετικά μήκη.

Πηγές: Εικόνες, γλωσσάρι, βίντεο

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Η μάθηση μέσα από την πράξη έχει αποδειχθεί ότι είναι πολύ αποτελεσματική, ειδικά σε νεαρούς μαθητές με χαμηλή ικανότητα συγκέντρωσης και μαθησιακές δυσκολίες. Μην ξεχνάτε να εξηγείτε πάντα σε τι είναι χρήσιμη, στην πράξη, κάθε μαθηματική έννοια.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες: Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- Κατανοεί τμήματα και σύνολα
- Γνωρίζει τον άνθρωπο πίσω από το Πυθαγόρειο θεώρημα

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Εισαγωγή



Εικόνα 1 Πυθαγόρας: <https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras>

Ο Έλληνας φιλόσοφος και μαθηματικός Πυθαγόρας, που λέγεται ότι έζησε γύρω στο 500 π.Χ., είναι πιθανότατα πιο γνωστός για το θεώρημά του ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας (η πλευρά απέναντι από την ορθή γωνία) είναι ίση με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.



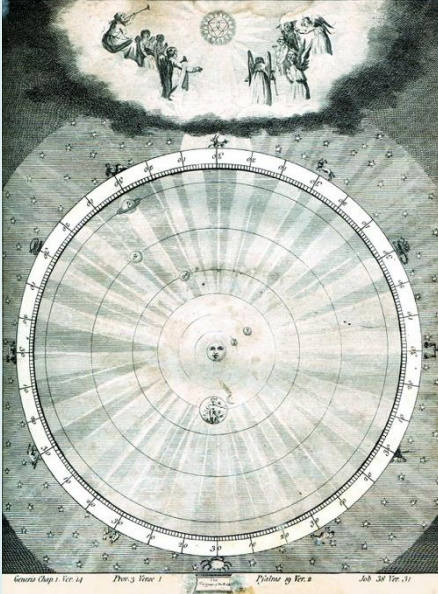
Εικόνα 2 Αμόνι: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blacksmith_anvil_hammer.svg

Ωστόσο ο Πυθαγόρας ανακάλυψε επίσης ότι οι μουσικές νότες μπορούν να αποτυπωθούν και ως εξισώσεις. Σύμφωνα με το μύθο, μπήκε σε ένα σιδηρουργείο όπου άκουσε τον ήχο του σφυριού να χτυπά το αμόνι. Αρχικά, σκέφτηκε ότι οι τόνοι ήταν αρμονικοί και όμορφοι αλλά λίγο αργότερα διαπίστωσε ότι ένας από τους τόνους δεν ήταν αρμονικός. Ακουγόταν φάλτσος.

Ο Πυθαγόρας έσπευσε στο σιδηρουργείο και άρχισε να ελέγχει τα διάφορα σφυριά για να δει ποια προκάλεσαν τους καθαρούς και ποια τους δυσαρμονικούς τόνους. Διαπίστωσε ότι το μοναδικό πράγμα που φάνηκε να προκαλεί διαφορετικό τόνο ήταν το μέγεθος του σφυριού (και όχι η δύναμη του χτυπήματος στο αμόνι ή η δύναμη ή το μέγεθος του σιδηρουργού). Αυτό το έλαβε ως επαλήθευση μιας θεωρίας που υποστήριζε ότι η μουσική μπορεί να επεξηγηθεί μέσω μαθηματικών εξισώσεων. Αργότερα αποδείχθηκε ότι έκανε λάθος από την άποψη του σφυριού, του αμονιού και του βάρους του σφυριού, αλλά η θεωρία ήταν σωστή για το μήκος της χορδής στα μονόχορδα όργανα. (<https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras>)

Αρμονία

Ο Πυθαγόρας ήταν σίγουρος ότι οποιαδήποτε μαθηματική έννοια μπορούσε να επεξηγηθεί με βάση μια εξίσωση. Ένας από τους μαθητές του, ο Ίππασος, προσπάθησε να βρει αυτό που θα καθόριζε την τετραγωνική ρίζα του 2 αλλά δεν μπόρεσε, κάτι που έλαβε ως απόδειξη ότι αυτός ήταν ένας άρρητος αριθμός. Ο Πυθαγόρας θύμωσε τόσο πολύ που αποδείχθηκε λάθος, που καταδίκασε τον άτυχο νεαρό σε θάνατο με πνιγμό.



Εικόνα 3 Αρμονία του κόσμου: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Harmonyoftheworld.jpg>

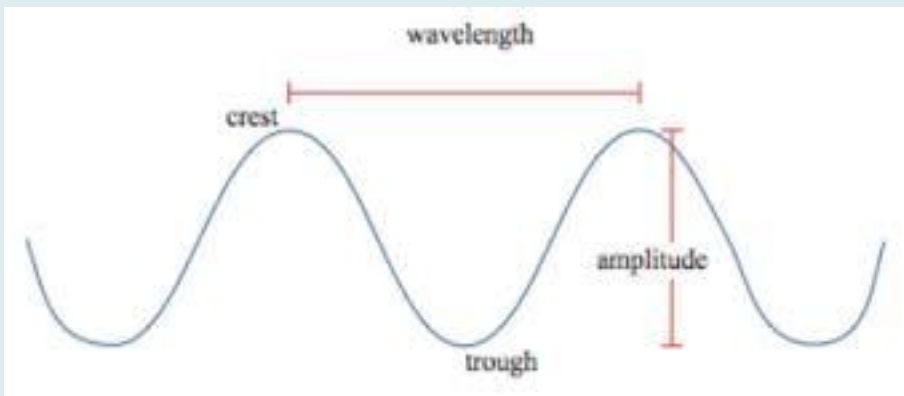
Ένας άλλος τρόπος για να εξεταστεί η σύνδεση μεταξύ της μουσικής και των μαθηματικών μπορεί να φανεί στη φιλοσοφία που υποστηρίζει ότι ο κόσμος μπορεί να κατανοηθεί σαν να είναι σε αρμονία. Ονομάζεται μουσική των σφαιρών. Είναι ο ήλιος, το φεγγάρι και η γη που πρέπει να είναι σε αρμονία διαφορετικά η τάξη διαταράσσεται. Τα σώματα σε τροχιά παράγουν «μουσική» (με την αρχαία έννοιά της, καθώς η μουσική δε σημαίνει κατ' ανάγκη μουσική που μπορούμε να ακούσουμε). Η Μουσική των Σφαιρών εμφανίζεται σε αριθμούς, οπτικές γωνίες, σχήματα και ήχους – όλα συνδεδεμένα σε ένα μοτίβο αναλογίας.

Γλωσσάρι

Ορθογώνιο τρίγωνο: Ένα τρίγωνο όπου μια από τις γωνίες του είναι 90° και το σύνολο των άλλων δύο είναι επίσης 90°

Τα Μαθηματικά πίσω από την αρμονία

Η θεωρία του μήκους των χορδών την οποία ο Πυθαγόρας, κατά κάποιο τρόπο, όδευε να ανακαλύψει, μπορεί να διατυπωθεί με τον παρακάτω τρόπο. Όταν έχετε μία χορδή ορισμένου μήκους και σε ορισμένο τάνυσμα (η ισχύς που χρησιμοποιείται για να την ισιώσει) και στη συνέχεια παίρνετε το ακριβώς μισό μήκος της χορδής με το ίδιο τάνυσμα, θα προκύψει ένας τόνος που πάλλεται με το διπλάσιο Herz (ποσό ταλαντώσεων). Δεδομένου ότι οι νότες μπορούν να ερμηνευτούν και ως ταλαντώσεις, υπάρχει σύνδεση.



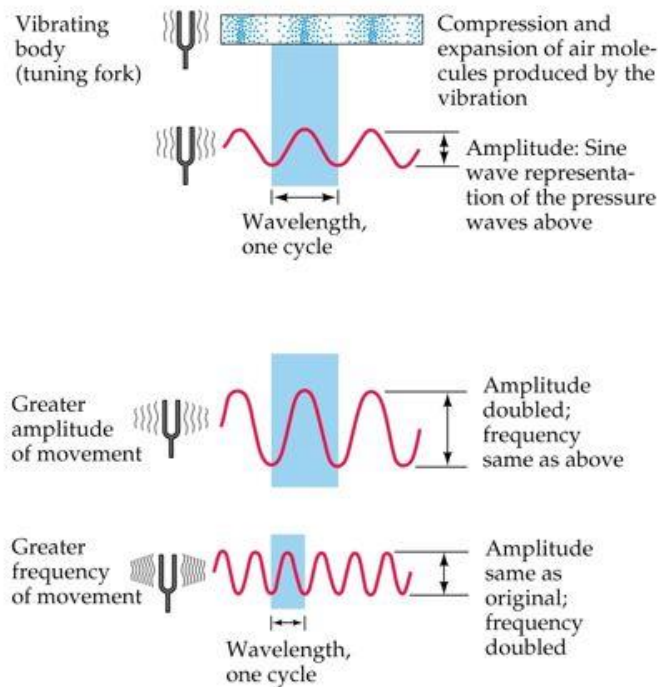
Εικόνα 4 Κορυφή μέσω μήκους κύματος και πλάτους

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Crest_trough_wavelength_amplitude.png

Το μήκος κύματος είναι η χωρική περιοδικότητα ενός περιοδικού κύματος – η απόσταση κατά την οποία το σχήμα του κύματος επαναλαμβάνεται. Είναι η απόσταση μεταξύ διαδοχικών αντίστοιχων σημείων της ίδιας φάσης στο κύμα, όπως δύο γειτονικές κορυφές, κοιλάδες ή μηδενοδιελεύσεις, και είναι χαρακτηριστικό εξίσου των διαδιδόμενων κυμάτων και των στάσιμων κυμάτων, όπως επίσης και άλλων σχηματισμών του κύματος στο χώρο. Το μήκος κύματος είναι η απόσταση μεταξύ των ηχητικών κυμάτων σε έναν χώρο όπου διαδίδονται τα κύματα χώρου. Το μήκος

κύματος ενός τόνου σε μέτρα είναι η ταχύτητα του ήχου (περίπου 340 μέτρα ανά δευτερόλεπτο) διαιρούμενη από τη συχνότητα σε Herz. Η συχνότητα είναι ο αριθμός των επαναλήψεων ενός γεγονότος ανά μονάδα χρόνου. Η χαμηλότερη ακουστική συχνότητα (για έναν άνθρωπο) έχει μήκος κύματος $340/15 = 22.7$ μέτρα. Η υψηλότερη ακουστική συχνότητα έχει μήκος κύματος $340/20000 = 0.017$ μέτρα, δηλαδή 17 χιλιοστά. Ο αγωγός αέρα ενός πνευστού μουσικού οργάνου έχει συνήθως μήκος που αντιστοιχεί στο μισό μήκος κύματος της ρίζας του (ο χαμηλότερος δυνατός τόνος).

Physics of sound



© 2001 Sinauer Associates, Inc.

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

Εργασία 1: Δημιουργήστε το δικό σας μουσικό όργανο και εφαρμόστε τη θεωρία των χορδών του Πυθαγόρα.

1. Βάλτε στη σειρά οχτώ γυάλινα ποτήρια ή γυάλινα μπουκάλια πάνω σε ένα τραπέζι σε ευθεία γραμμή.
2. Γεμίστε τα με διαφορετικές ποσότητες νερού. Για παράδειγμα 0,25 dl, 0,5 dl, 0,75 dl, 1 dl κ.ο.κ.. Επίσης εάν θέλετε, προσθέστε λίγο χρώμα στο νερό.
3. Χτυπήστε προσεχτικά κάθε μπουκάλι με ένα μικρό κουτάλι.
4. Ταξινομήστε τα μπουκάλια σε μια σειρά από το υψηλότερο στο χαμηλότερο τόνο. Εάν δύο από αυτά ακούγονται πολύ όμοια, προσθέστε ή αφαιρέστε λίγο νερό μέχρι να έχετε τον ήχο που επιθυμείτε. Επίσης εάν θέλετε, χρησιμοποιήστε ένα διαπασών για να δείτε ποιο τόνο έχετε.
5. Φτιάξτε ένα τραγούδι να παίξετε στα μουσικά σας μπουκάλια και προσκαλέστε τους φίλους σας για μια συναυλία.
6. Ποια είναι η σύνδεση μεταξύ του τόνου και της ποσότητας του νερού; Οι υψηλοί τόνοι σημαίνουν χαμηλά ή υψηλά μήκη κυμάτων;

Εργασία 2:

Χρησιμοποιήστε τα ίδια μουσικά μπουκάλια και συγκρίνετε το χτύπημα με το φύσημα σε αυτά. Παίξτε το τραγούδι Twinkle twinkle little star (Φεγγαράκι μου λαμπρό). Προσπαθήστε να παίξετε το τραγούδι φυσώντας μέσα στα μπουκάλια και χτυπώντας τα. Γιατί υπάρχει διαφορά;

Εργασία 3:

Το μήκος κύματος του τόνου είναι τέσσερις φορές η απόσταση από το στόμιο στην επιφάνεια του νερού, συνεπώς το $\frac{1}{4}$ μέρος του κύματος σχηματίζεται στο μπουκάλι!

$$\frac{340 \text{ m/s}}{\text{συχνότητα}} = \text{μήκος κύματος}$$



Ποια είναι η συχνότητα στα μπουκάλια σας; Παρακαλώ να έχετε υπόψη σας ότι οι τόνοι μπορεί να μην είναι απολύτως καθαροί εξαιτίας του σχήματος του μπουκαλιού.

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ...

Μπορείτε να μάθετε περισσότερα για τον Πυθαγόρα και τη μαθηματική του φιλοσοφία μέσω των ιστοσελίδων της Βικιπαίδεια. Εδώ βρίσκονται κάποια παραδείγματα:

[Pythagoras theorem](#)

[Pythagorean tuning](#)

Μπορείτε επίσης να δείτε κάποια βίντεο εδώ:



[Pythagorean Tuning \[Philosophia Mūsicae: A Philosophy of Music\]](#)

[The Math of Music - TWO MINUTE MUSIC THEORY #32](#)

[The connection between maths and music - Pythagoras Comma \(Longer version\)](#)