

ΜΕΡΟΣ II: Μουσική & Μαθηματικά

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16-18

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 22: ΜΟΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΦΙΜΠΟΝΑΤΣΙ

LogoPsyCom



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Μουσική και Φιμπονάτσι

Ηλικιακό Εύρος: 16-18 χρονών

Διάρκεια: 2 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Χρυσός Αριθμός, Χρυσή Τομή, Ακολουθία Φιμπονάτσι

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Αρχαία Ελληνική Μουσική, Μούσες, Αρμονία

Γενικοί σκοποί: Οι μαθητές να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες που κρύβονται πίσω από τις μουσικές συνθέσεις και να κατανοήσουν το συλλογισμό που κρύβεται πίσω από αυτές.

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Οι μαθητές θα εξερευνήσουν και τα δύο πεδία στο σύνολό τους, ακούγοντας ή παίζοντας μουσική και παρακολουθώντας τα προτεινόμενα βίντεο που αναλύουν μουσικές συνθέσεις. Θα ανακαλύψουν τη βάση των μαθηματικών εννοιών που παρέχονται.

Πηγές: Αυτό το εργαλείο σας παρέχει βίντεο για να τα χρησιμοποιήσετε στην τάξη σας. Τα θέματα που εξετάζονται στο εργαλείο θα σας βοηθήσουν να βρείτε επιπλέον υλικό για να εξατομικεύσετε και να δώσετε μια διαφορετική διάσταση στο μάθημα σας

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Η μάθηση μέσα από την πράξη είναι πολύ αποτελεσματική, ειδικά για νεαρούς μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Ενθαρρύνετε τους μαθητές, εάν είναι δυνατό, να πειραματιστούν με ένα μουσικό όργανο.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες: Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- Κατανοεί το συλλογισμό πίσω από τη μουσική σύνθεση
- Κατανοεί τη χρήση της Χρυσής Τομής και την ακολουθία Φιμπονάτσι στη μουσική
- Υπολογίζει τον νιοστό όρο της ακολουθίας Φιμπονάτσι.

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Εισαγωγή

Η μουσική και τα μαθηματικά δεν φαίνεται να έχουν μια προφανή σύνδεση για όσους δεν έχουν συνθέσει ή διαβάσει μια παρτιτούρα. Ωστόσο, φαίνεται ξεκάθαρα ότι ο συγχρονισμός των μουσικών συνθέσεων και η δομή της παρτιτούρας με μέτρα παραπέμπει σε έναν μαθηματικό τρόπο σκέψης.

Πολλοί ερευνητές έχουν μελετήσει τον αντίκτυπο των μαθηματικών στην τέχνη. Η μουσική ήταν ένα από τα σημεία εστίασης των ερευνών τους και διαπιστώθηκε ότι, ανά τους αιώνες, πολλοί μαθηματικοί είχαν διερευνήσει αυτό το ερώτημα. Ο Πυθαγόρας, ο Λεονάρντο Μπονάτσι (επίσης γνωστός ως Φιμπονάτσι), και πολλοί άλλοι έχουν συμβάλει στην έρευνα. Διαφορετικές πτυχές των μαθηματικών, που κυμαίνονται από τη βασική γεωμετρία και τις ακολουθίες αριθμών μέχρι την τριγωνομετρία, έχουν αποδειχθεί ότι χρησιμοποιούνται σε μουσικές συνθέσεις.

Μέσα σε αυτό το εργαλείο, θα επικεντρωθούμε στη δυνατότητα εφαρμογής των μαθηματικών σε μουσικές συνθέσεις, διερευνώντας τις επιλογές που προσφέρει η χρυσή τομή στη μουσική σύνθεση.

Η Θεία αναλογία στη μουσική

Στην αρχαία Ελλάδα, οι άνθρωποι αγαπούσαν τις δημιουργικές τέχνες, μεταξύ των οποίων η μουσική ήταν πολύ σημαντική, καθώς συχνά συνοδευόταν από άλλους δημιουργικούς τομείς όπως το θέατρο ή η ποίηση. Πίστευαν ότι κάθε καλλιτέχνης αντλούσε έμπνευση από μια μούσα.



Παρακολουθήστε αυτό το βίντεο TED-Ed που εξηγεί αυτό το φαινόμενο με περισσότερες λεπτομέρειες: <https://www.youtube.com/watch?v=-1aAunaw1GA>.

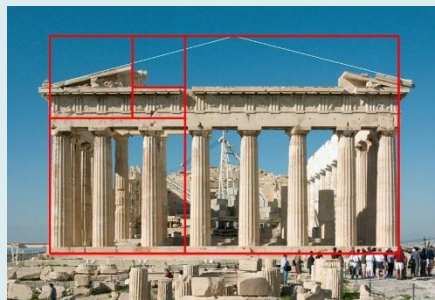
Αυτός ο κεντρικός ρόλος που έπαιξε η μουσική στην κοινωνία δεν ήταν μόνο εμπνευσμένος από μούσες. Οι Έλληνες είχαν επίσης ανακαλύψει μια τέλεια αναλογία που ονομάζεται «χρυσή τομή» ή «θεία αναλογία». Αυτή η αναλογία συνδέεται στενά με την ακολουθία του Φιμπονάτσι που θα μάθετε αργότερα. Πιθανότατα την έχετε δει περισσότερες από μία φορές, ακόμη και χωρίς να το καταλάβετε. Μπορείτε να τη βρείτε στην αρχαία αρχιτεκτονική καθώς και στη φύση και στους πίνακες ζωγραφικής. Αυτό που οι περισσότεροι άνθρωποι δεν γνωρίζουν είναι ότι μπορείτε επίσης να ακούσετε τη χρυσή τομή και την Ακολουθία Φιμπονάτσι!

Εδώ βρίσκονται δύο παραδείγματα όπου μπορείτε να τα δείτε:

- Το ηλιοτρόπιο περιέχει την ακολουθία Φιμπονάτσι
- Ο ελληνικός ναός έχει τις θείες αναλογίες του χρυσού ορθογωνίου.




Εικόνα 1: Ηλιοτρόπιο με την ακολουθία Φιμπονάτσι




Εικόνα 2: Ελληνικός ναός με τη χρυσή αναλογία¹


¹ Η εικόνα ανακτήθηκε από: <https://www.telitec.com/2019/05/27/golden-ratio/>

 Μπορείτε να μάθετε περισσότερα για το πώς η ακολουθία του Φιμπονάτσι αντιπροσωπεύεται στη φύση: <https://www.youtube.com/watch?v=GkxCIW46to>.

Η ακολουθία του Φιμπονάτσι βασίζεται στις τέλει αναλογίες της χρυσής τομής, γεγονός που την καθιστά μια μεγάλη έμπνευση για τους μουσικούς για να πειραματίζονται στις συνθέσεις τους. Θα βρείτε πολλές διαφορετικές ερμηνείες για το πώς η χρυσή τομή και η ακολουθία Φιμπονάτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μουσικές συνθέσεις. Μερικοί αποφασίζουν να παίξουν μια σειρά νοτών που αντιστοιχούν στους αριθμούς Φιμπονάτσι, μερικοί διαμοιράζουν αυτούς τους αριθμούς στα πλήκτρα του πιάνου τους...

Μπορείτε να παρακολουθήσετε τα παρακάτω βίντεο για να ακούσετε πώς η μουσική ακούγεται όταν συνδέεται με την ακολουθία Φιμπονάτσι και τη χρυσή τομή.

 Σε αυτό το βίντεο, ο μουσικός χρησιμοποιεί τον ίδιο τον χρυσό αριθμό: https://www.youtube.com/watch?v=W_Ob-X6DMI4.

 Οι μουσικοί σε αυτό το βίντεο προσπαθούν να συνθέσουν με βάση την ακολουθία Φιμπονάτσι και τη χρυσή τομή: <https://www.youtube.com/watch?v=9mozmHgg9Sk>

Γλωσσάρι

Ελληνικές Δημιουργικές Τέχνες: Στην αρχαία ελληνική κοινωνία, οι δημιουργικές τέχνες ήταν η ιστορία, η κωμωδία, η ποίηση, το τραγούδι, οι ύμνοι, η επική ποίηση, ο χορός, η αστρονομία, η τραγωδία. Κάθε τέχνη θεωρούνταν ότι εμπνέεται από μια Μούσα.

Μούσα: Στην αρχαία Ελλάδα, οι Μούσες ήταν οι θεές που ενέπνεαν την ανθρώπινη δημιουργικότητα. Σήμερα, χρησιμοποιούμε τη λέξη για οποιοδήποτε πρόσωπο, ανθρώπινο ή θεϊκό, που δίνει έμπνευση σε έναν καλλιτέχνη στο έργο του.

Αρμονία: ένας ευχάριστος μουσικός ήχος από διαφορετικές νότες που παίζονται ή τραγουδιούνται την ίδια στιγμή.

Leonardo Bonacci, ή Fibonacci ήταν ένας Ιταλός μαθηματικός που γεννήθηκε τον 12ο αιώνα. Είναι γνωστός κυρίως για την ακολουθία αριθμών του, η οποία βρίσκεται σε πολλές πτυχές της δημιουργικής τέχνης.

Τα μαθηματικά πίσω από τη μουσική σύνθεση

Η Χρυσή Τομή:

Ο Χρυσός αριθμός είναι ένας μάλλον μοναδικός αριθμός στα μαθηματικά. Η τιμή του είναι περίπου **1,618** και χρησιμοποιείται συχνά στην τέχνη, τη μουσική, την αρχιτεκτονική, κλπ.

Χρησιμοποιούμε το ελληνικό γράμμα **φ** για να αναφερθούμε σε αυτόν.

Η χρυσή τομή είναι η χρήση αυτού του αριθμού σε διάφορους κλάδους.

Φανταστείτε ότι κόβουμε μια γραμμή σε **δύο** διαφορετικά μέρη **a** και **b**. Όταν χρησιμοποιούμε τη χρυσή τομή, **ολόκληρο το μήκος** που διαιρείται από τη **μεγάλη πλευρά** είναι ίσο με τη **μεγάλη πλευρά** που διαιρείται από τη **μικρή πλευρά**.



Εικόνα 3: Γραμμή χωρισμένη σύμφωνα με τη Χρυσή Τομή

Για τη διευκόλυνση σας, να θυμάστε αυτόν τον τύπο:

$$\varphi = \frac{(a+b)}{a} = \frac{a}{b} = \mathbf{1,618}$$

Η χρυσή τομή μπορεί στη συνέχεια να εφαρμοστεί σε ένα ορθογώνιο, που ονομάζεται **Χρυσό ορθογώνιο**. Καθώς θεωρήθηκε ως το πιο τέλειο σχήμα στην αρχαιότητα, πολλοί καλλιτέχνες και αρχιτέκτονες το χρησιμοποίησαν στα έργα τους.

Όπως κάναμε με τη **γραμμή ab**, ας χωρίσουμε ένα **ορθογώνιο AB** σε δύο διαφορετικά μέρη: ένα **τετράγωνο A** και ένα **ορθογώνιο B** στο οποίο όλες οι πλευρές του τετραγώνου και οι μεγάλες πλευρές του ορθογωνίου έχουν μήκος **a** και οι μικρές πλευρές του ορθογωνίου έχουν μήκος **b**.

Για να έχουμε το τέλειο ορθογώνιο, θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο τύπο. Φανταστείτε για παράδειγμα ότι το τετράγωνο A είναι 2εκ x 2εκ. Αν θέλουμε να βρούμε την πλευρά b:

Ξέρουμε ότι:

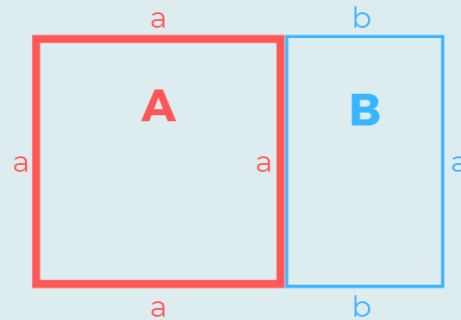
- $\frac{A}{b} = 1,618$
- $a = 2$

Μπορούμε να πούμε ότι:

- $\frac{2}{b} = 1,618$
- $2 = b \times 1,618$

Εάν απομονώσουμε το b, έχουμε:

$$b = \frac{2}{1,618} = 1,236$$



Εικόνα 4: Ορθογώνιο χωρισμένο σύμφωνα με τη χρυσή τομή

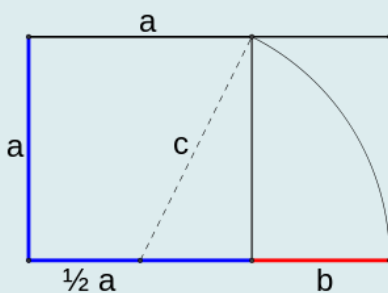
Ας ελέγξουμε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας και τους δύο τύπους:

$$\blacktriangleright \frac{2 + 1,236}{2} = 1,618$$

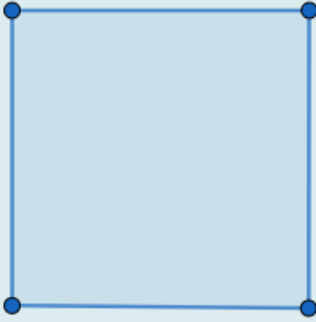
$$\blacktriangleright \frac{2}{1,236} = 1,618$$



Μπορείτε επίσης να χρησιμοποιήσετε διαβήτη και χάρακα για να σχεδιάσετε το τέλειο ορθογώνιο:



1. Τοποθετήστε τη μύτη του διαβήτη σας στο μέσο της κάτω πλευράς
2. Ανοίξτε τον διαβήτη σας για να αγγίξετε την απέναντι γωνία
3. Σχεδιάστε μια καμπύλη από την προέκταση της κάτω πλευράς στην απέναντι γωνία.
4. Σχεδιάστε το ορθογώνιο B από την αρχή της καμπύλης στην προέκταση των άνω και κάτω πλευρών του τετραγώνου A.



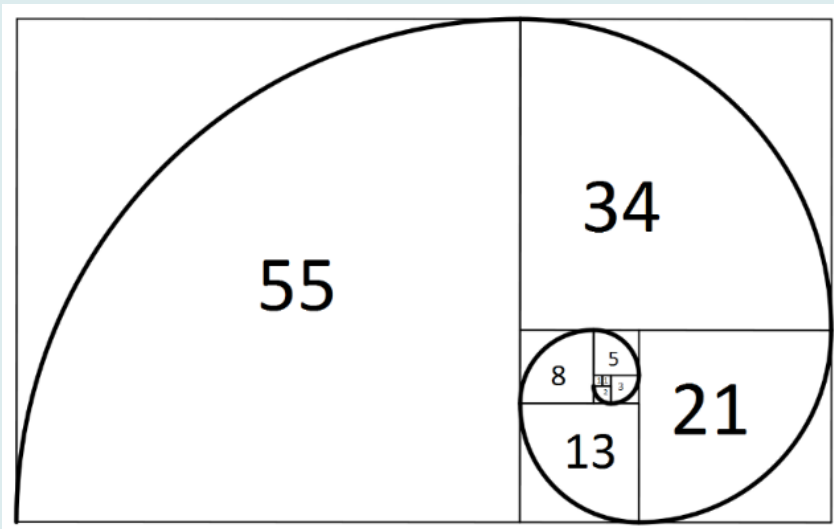
Ακολουθία του Φιμπονάτσι:

Η ακολουθία Φιμπονάτσι είναι μια σειρά αριθμών όπου ο επόμενος αριθμός προκύπτει με την πρόσθεση των δύο προηγούμενων.
 $0+1=1 \rightarrow 1+1=2 \rightarrow 1+2=3 \rightarrow 2+3=5 \rightarrow 3+5=8 \rightarrow 5+8=13 \dots$

Η Χρυσή τομή συσχετίζεται συχνά με την ακολουθία Φιμπονάτσι.

Ποιοι είναι οι επόμενοι τρεις αριθμοί;

Όταν φτιάχνουμε τετράγωνα με αυτά τα πλάτη, προκύπτει ένα ωραίο σπирάλ:



Εικόνα 5: Αναπαράσταση της Χρυσής Τομής χρησιμοποιώντας την ακολουθία του Φιμπονάτσι

Παρατηρήστε πως, εάν προσθέσουμε τις πλευρές των τετραγώνων 5 και 8, παίρνουμε την πλευρά του τετραγώνου 13. Σημειώστε επίσης ότι ο λόγος στα διαμορφωμένα ορθογώνια πλησιάζει όλο και πιο κοντά στο φ.

Στο ορθογώνιο που σχηματίζεται από τα τετράγωνα 21 και 13:

$$a = 21$$

$$b = 13$$

Ας εφαρμόσουμε τον τύπο: $\frac{a}{b} = 1,615$

Ας πάρουμε το επόμενο χρυσό ορθογώνιο που σχηματίζεται από τα τετράγωνα 34 και 21:

$$a = 34$$

$$b = 21$$

$$\frac{a}{b} = 1,619$$

Τα αποτελέσματα δεν είναι ακριβώς ο χρυσός αριθμός, αλλά είναι πολύ κοντά, κάτι που δείχνει πως η ακολουθία του Φιμπονάτσι συνδέεται με τη χρυσή τομή!

Η ακολουθία μπορεί να γραφτεί σε μαθηματική σημειογραφία, παρατηρώντας τον παρακάτω πίνακα:

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_n =$	0	1	1	2	3	5	8	13	21

Ο όρος αριθμός 7 ονομάζεται $n_7 = 13$

Μπορείτε να θυμηθείτε αυτόν τον κανόνα:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Όπου:

x_n είναι ο όρος αριθμός «n»

x_{n-1} είναι ο προηγούμενος όρος (n-1)

x_{n-2} είναι ο όρος πριν από αυτό (n-2)

Καθώς η ακολουθία Φιμπονάτσι είναι πολύ κοντά στη χρυσή τομή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ϕ για να βρούμε οποιοδήποτε αριθμό της ακολουθίας με αυτόν τον τύπο:

$$x_n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}}$$

Αν εξετάσουμε τους αριθμούς της ακολουθίας, μπορούμε να εντοπίσουμε ένα ενδιαφέρον μοτίβο:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Παρατηρούμε ότι:

- $x_3 = 2$ και ότι κάθε τρίτος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του δύο (2, 8, 34, 144, 610)
- $x_4 = 3$ και κάθε τέταρτος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του τρία (3, 21, 144)
- $x_5 = 5$ και κάθε πέμπτος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του πέντε (5, 55, 610)

Ας δούμε τους λόγους (r) μεταξύ των αριθμών:

R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8
1	1	1,5	1,666	1,6	1,625	1,615	1,619

Παρατηρούμε ότι οι **περιττοί λόγοι** (R1, R3, R5, R7) είναι πάντοτε **κάτω** από τον χρυσό αριθμό, ενώ οι **άρτιοι λόγοι** (R2, R4, R6, R8) είναι πάντοτε **πάνω** από αυτόν.

ΕΡΓΑΣΙΑ

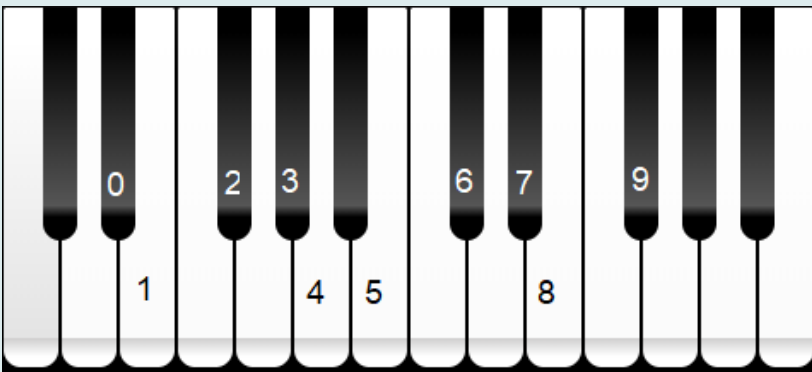
Αυτή η εργασία θα σας επιτρέψει να χρησιμοποιήσετε τα μαθηματικά που έχετε μάθει για τη Χρυσή τομή και το Φιμπονάτσι σε μια μουσική σύνθεση.

Ας παίξουμε!



Ας δούμε τους αριθμούς που θα πρέπει να παίξετε στο πιάνο για να χρησιμοποιήσετε την ακολουθία Φιμπονάτσι.

Θυμηθείτε: Στην περίπτωση αυτή, οι αριθμοί 0 έως 9 βρίσκονται ως έχουν στο πληκτρολόγιο.



Θα χρησιμοποιήσετε αυτό το διαδικτυακό πληκτρολόγιο: <https://virtualpiano.net/> ή κατεβάστε το virtual piano app στο Play Store ή στο App Store.

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα με τους αριθμούς που θα πρέπει να παίξετε στο πληκτρολόγιο.

X ₁₆	X ₁₇	X ₁₈	X ₁₉	X ₂₀



Χρησιμοποιείστε τον τύπο $X_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$ για να βρείτε τους αριθμούς που

λείπουν:

$X_{16} =$

$X_{17} =$

$X_{18} =$

$X_{19} =$

$X_{20} =$

Τώρα μπορείτε να παίξετε αυτά τα ψηφία ξεχωριστά στο πληκτρολόγιο για να ακούσετε την ακολουθία Φιμπονάτσι!

Αποτέλεσμα:



Αυτό το μουσικό πείραμα από το aSongScout δείχνει πώς να χρησιμοποιήσετε την ακολουθία του Φιμπονάτσι σε μουσικές συνθέσεις:

<https://www.youtube.com/watch?v=IGJeGOw8TzQ>.

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ...

Βίντεο σχετικά με τη χρήση του Φιμπονάτσι και της Χρυσής τομής στη μουσική σύνθεση:

<https://www.youtube.com/watch?v=9mozmHgg9Sk>

Μάθετε πώς ο Φιμπονάτσι και η χρυσή τομή αναπαρίστανται στη φύση:

<https://www.youtube.com/watch?v=GkxCIW46to>

Πώς συνθέτουμε ένα τραγούδι με την ακολουθία του Φιμπονάτσι και τη χρυσή τομή:

<http://www.faena.com/aleph/articles/how-to-compose-a-song-with-the-golden-ratio-and-the-fibonacci-sequence/>

Συμβουλή για τη χρήση του Φιμπονάτσι στις μουσικές συνθέσεις:

<https://www.classicfm.com/discover-music/fibonacci-sequence-in-music/>

Ερευνητική εργασία σχετικά με τη μαθηματική μελέτη της μουσικής:

http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/1/covered/MIMS_ep2010_103.pdf

Ερευνητική εργασία σχετικά με την ακολουθία Φιμπονάτσι στη μουσική σύνθεση:

<http://www.nntdm.net/papers/nntdm-20/NNTDM-20-1-72-77.pdf>

TED Talk σχετικά με το πώς ο Φιμπονάτσι βρίσκεται γύρω μας:

<https://www.youtube.com/watch?v=0vVxL60YFJU>