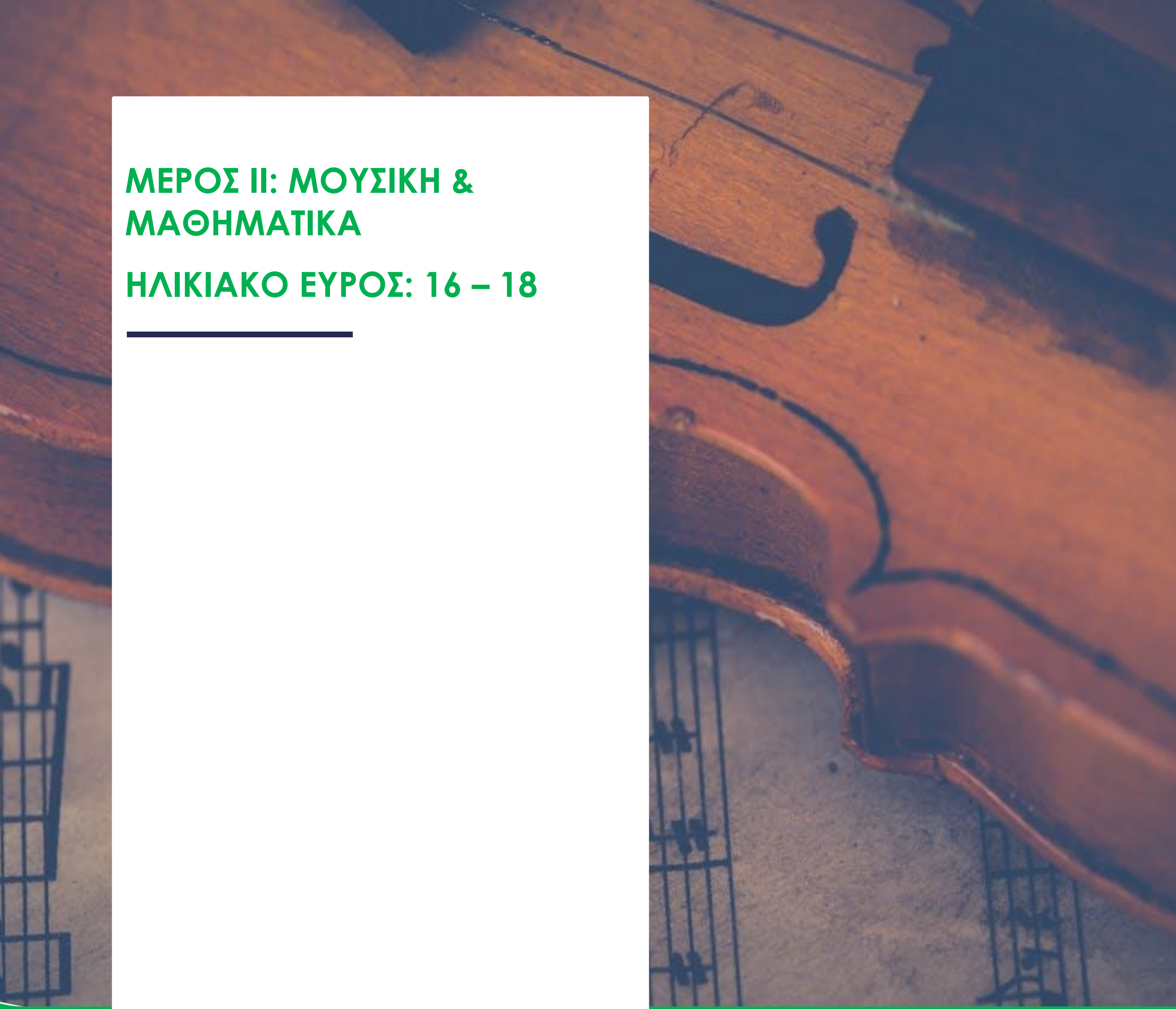


"Brown Violin"
(Source: https://www.pexels.com/photo/brown-violin-697672/)

ΜΕΡΟΣ II: ΜΟΥΣΙΚΗ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16 – 18

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 21: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΣΕΙΡΑ

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

TheArtOf Maths
Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε αρμονική σειρά

Ηλικιακό εύρος: 16 – 18 χρονών

Διάρκεια: 3 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Αρμονική σειρά στη μουσική, μουσικές νότες, συχνότητα των μουσικών νότων και τα ηχητικά κύματα.

Γενικοί Σκοποί: Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, να υπολογίσουν την περίοδο της γραφικής παράστασης μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης και να επιλύσουν τις τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Θα είναι ωφέλιμο να χρησιμοποιήσετε μια αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων (μπορεί να είναι η ηλεκτρονική αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων Desmos) για να δείξετε τα γραφήματα στους μαθητές και να παρουσιάσετε τις λύσεις των τριγωνομετρικών εξισώσεων. Επιπλέον, για να μπορέσουν οι μαθητές να αποκτήσουν μια πιο ξεκάθαρη εικόνα των τρόπων ταλάντωσης, παρακαλείστε τους δείξετε το βίντεο "Modes on a string" (βλ. «Μάθετε περισσότερα ...») μετά από την αντίστοιχη εξήγηση.

Πηγές: Ένα στυλό, ηλεκτρονικό υπολογιστή με σύνδεση στο διαδίκτυο, πρόσβαση στην ιστοσελίδα: https://www.desmos.com/

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Ξεκινήστε με την παρουσίαση γραφημάτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων και εξηγήστε τις ιδιότητές τους. Λύστε μια τριγωνομετρική εξίσωση για κάθε μία από τις τρεις συναρτήσεις που διδάσκονται, ώστε οι μαθητές να μπορούν να τις λύσουν μόνοι τους.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες:

Στο τέλος αυτής της ενότητας, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- Δημιουργεί τη γραφική παράσταση μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης·
- Υπολογίζει την περίοδο μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης·
- Λύνει τις εξισώσεις του τύπου $\eta\mu\omega\, x = a$, $\sigma\upsilon\nu\, x = a$ και $\varepsilon\varphi\omega\, x = a$.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά και η μουσική ήταν πάντα συνδεδεμένα. Ωστόσο, η πρώτη απόδειξη αυτής της σχέσης βρέθηκε μόλις τον 6ο αιώνα π.Χ. Ο Πυθαγόρας συνέκρινε τον ήχο που παράγεται από σφυριά διαφορετικού μήκους, που χρησιμοποιούνται από τους σιδεράδες, με τον ήχο του μονόχορδου, του οποίου ο εφευρέτης θεωρείται ότι ήταν ο Πυθαγόρας.

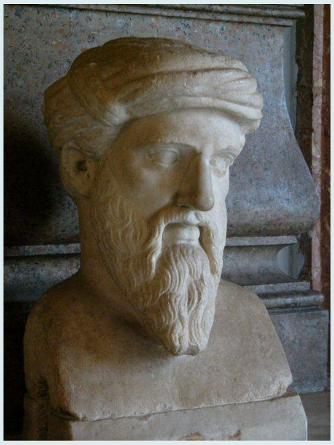
Αυτή η σύγκριση επέτρεψε στον Πυθαγόρα να ανακαλύψει και να βελτιώσει το μαθηματικό συλλογισμό πίσω από τους ήχους, μέσα από τη μελέτη των ήχων που παράγει το μονόχορδο. Διαίρεσε τη χορδή σε δύο ίσα μέρη, στη συνέχεια σε τρία ίσα μέρη και ούτω καθεξής. Ταίριαξε τους ήχους με μαθηματικό τρόπο σύμφωνα με τις υποδιαιρέσεις που έκανε και δημιούργησε την Πυθαγόρεια κλίμακα, όπου κάθε νότα διατηρούσε μια καλά καθορισμένη σχέση με την άλλη.

Πολλοί άνθρωποι και πολιτισμοί έχουν δημιουργήσει τις δικές τους κλίμακες. Για παράδειγμα ο κινεζικός λαός δημιούργησε την πεντατονική κλίμακα. Ωστόσο, η δυτική κουλτούρα υιοθέτησε μια 12-τόνη κλίμακα σε ίση ιδιοσυγκρασία, γνωστή ως συγκερασμένη κλίμακα ή χρωματική κλίμακα.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Αρμονική σειρά

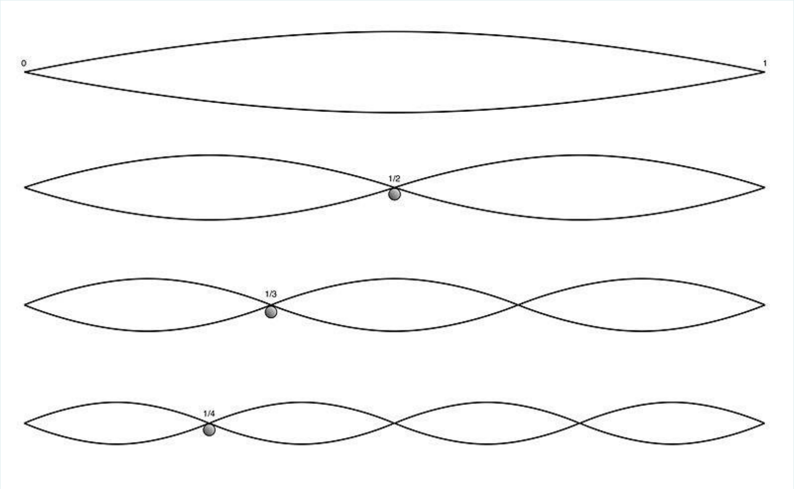
Αποτελεί γενική γνώση το ότι οι φυσικές μουσικές νότες είναι οι A, B, C, D, E, F και G. Ωστόσο, συμβολίζονται στις περισσότερες χώρες σύμφωνα με τη σύμβαση ονοματολογίας Solfège (Σολφέζ) Do-Re-Mi-Fa-Sol- Ti (ή Si) σύμφωνα με την παρακάτω αντιστοιχία: C-Do, D-Re, E-Mi, F-Fa, G-Sol, A-La και B-Ti (ή Si). Ο ορισμός αυτών των νοτών επηρεάστηκε ευρέως από τα Μαθηματικά.



Τον 6ο αιώνα π.Χ., ο Πυθαγόρας συνειδητοποίησε ότι όταν ταλαντεύεται μια χορδή, δεν πάλλεται μόνο σε ολόκληρη την έκτασή της, αλλά σχηματίζει επίσης μια σειρά δεσμών που διαιρούνται σε μικρότερα τμήματα, τις ανώτερες αρμονικές, οι οποίες πάλλονται σε συχνότητες υψηλότερες από τη βασική.

Για να μελετήσει τη σχέση ανάμεσα στο μήκος της παλλόμενης χορδής και τον μουσικό τόνο που παράγει, χρησιμοποίησε ένα μονόχορδο.

Η εικόνα 2 δείχνει τους δεσμούς και τα ανώτερα αρμονικά των πρώτων τεσσάρων συχνοτήτων μιας σειράς. Για να γίνει πιο εύκολα κατανοητό παρουσιάζονται ξεχωριστά, αλλά σε μια πραγματική χορδή αλληλεπικαλύπτονται, δημιουργώντας ένα σύνθετο σχέδιο, παρόμοιο με την κυματομορφή του οργάνου..



Εικ. 2 – Τρόποι δόνησης των 4 πρώτων αρμονικών
((Πηγή:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Φανταστείτε μια χορδή τεντωμένη, στερεωμένη στα άκρα της. Όταν αγγίζουμε το ένα άκρο αυτής της χορδής, ταλαντεύεται (Εικόνα 3) και παράγει μια νότα που ονομάζεται θεμέλιος νότα.

Εικ. 3 – Τρόποι δόνησης μια θεμέλιου νότας 1(f)
(Πηγή:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Ο Πυθαγόρας αποφάσισε να διαιρέσει μια χορδή σε δύο τμήματα (Εικόνα 4) ασκώντας πίεση στη μέση της χορδής. Ο ήχος που παράχθηκε ήταν ο ίδιος, αλλά σε υψηλότερη συχνότητα (συνήθως εκφράζεται ως "ίδια νότα, μια οκτάβα υψηλότερη"). Από τότε έχει αποδειχθεί ότι όποτε ο αριθμός των διαιρέσεων (ή ο αρμονικός αριθμός) είναι πολλαπλάσιος ενός προηγούμενου αριθμού, τότε ο ήχος θα επαναληφθεί αλλά με υψηλότερο τονικό ύψος.

Εικ. 4 – Τρόποι δόνησης μια θεμέλιου νότας 2(f)
(Πηγή:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Στη συνέχεια, αποφάσισε να δοκιμάσει τι θα ακουγόταν εάν η χορδή διαιρούταν σε 3 τμήματα (Εικόνα 5) και παρατήρησε ότι προέκυψε ένας νέος ήχος, διαφορετικός από τον προηγούμενο. Αυτή τη φορά, δεν ήταν η "ίδια νότα, μια οκτάβα υψηλότερη", αλλά μια εντελώς διαφορετική νότα, η οποία άξιζε να έχει διαφορετικό όνομα - η πέμπτη.

Εικ. 5 – Τρόποι δόνησης μιας θεμέλιου νότας 3(f)
(Πηγή:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Αυτός ο ήχος, αν και διαφορετικός, ταιριάζει καλά με τον προηγούμενο ήχο. Δημιουργούσε μια ευχάριστη αρμονία στο αυτί, η οποία οφειλόταν στο γεγονός ότι οι διαιρέσεις που έγιναν είχαν τις μαθηματικές σχέσεις του 1/2 και 2/3. Με τη διαίρεση της χορδής σε τέσσερα μέρη, προέκυψε μια νότα, γνωστή σήμερα ως «τετάρτη». Αυτές οι τρεις νότες είναι αρμονικές με τη θεμέλιο νότα.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Με αυτόν τον τρόπο, συνέχισε να υποδιαιρεί τη χορδή, παίρνοντας τις αρμονικές της θεμέλιου νότας και συνδυάζοντας με μαθηματικό τρόπο τους ήχους δημιούργησε κλίμακες που οδηγούν σε νότες, οι οποίες σχετίζονταν φυσικά μεταξύ τους. Με την πάροδο του χρόνου δόθηκαν στις νότες τα ονόματα που γνωρίζουμε σήμερα, τα οποία αναφέρθηκαν νωρίτερα.

Σε αυτή τη διαδικασία, κάθε νότα που προέρχεται από ένα αντικείμενο, δέχεται την επίδραση της θεμελιώδους συχνότητας που διεγείρει άλλες αρμονικές, που οδηγεί σε μια σειρά συχνοτήτων - την αρμονική σειρά. Οι αρμονικές σειρές είναι άπειρες, αποτελούμενες από ημιτονοειδή κύματα με όλες τις ακέραιες πολλαπλές συχνότητες της θεμελιώδους συχνότητας. Δεν υπάρχει μια ενιαία αρμονική σειρά, αλλά μια διαφορετική σειρά για κάθε θεμελιώδη συχνότητα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα μιας αρμονικής σειράς που ξεκινά από το A2 / Lá1 (110 Hz). Οι πρώτες 16 αρμονικές για αυτή τη σειρά μπορούν να παρατηρηθούν στον παρακάτω πίνακα:

Harmonic #	Note (English)	Note (Neo-latin)	Frequency (Hz)
1 (F)	A_2	$Lá_1$	110
2	A_3	$Lá_2$	220
3	E_4	Mi_3	330
4	A_5	$Lá_3$	440
5	$C\#_5$	$Do\#_4$	550
6	E_4	Mi_4	660
7	G_4	Sol_4	770
8	A_5	$Lá_4$	880
9	B_5	Si_4	990
10	$C\#_6$	$Do\#_5$	1100
11	$D\#_6$	$Ré\#_5$	1210
12	E_6	Mi_5	1320
13	$F\#_6$	$Fá\#_5$	1430
14	G_6	Sol_5	1540
15	$G\#_5$	$Sol\#_5$	1650

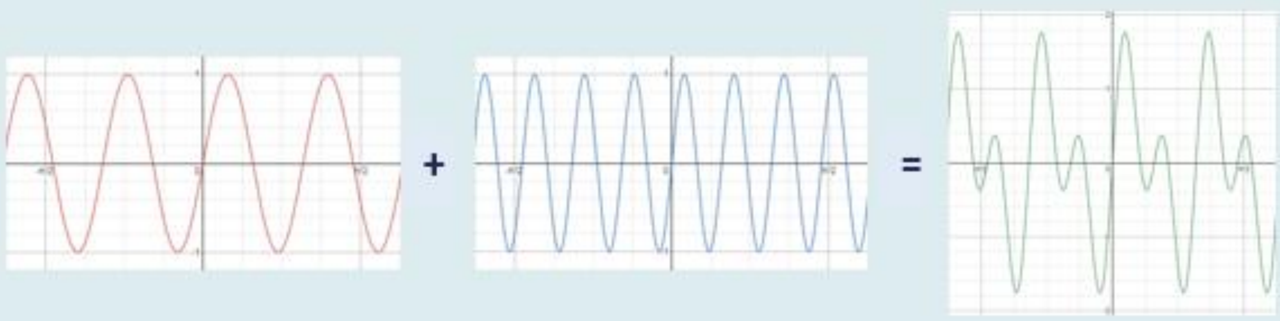
Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

16	A_6	Λά$_5$	1760

Πίνακας 1 – Οι πρώτες 16 αρμονικές

Ηχητικά Κύματα

Όταν ένα μουσικό όργανο παράγει ήχο, ταλαντεύεται και εκπέμπεται μια σειρά ημιτονοειδών κυμάτων. Εκτός από τη θεμελιώδη συχνότητα που ορίζει τη νότα, εκπέμπονται επίσης πολλές αρμονικές συχνότητες (κύμα με συχνότητα που είναι ένα θετικό ακέραιο πολλαπλάσιο της συχνότητας του αρχικού κύματος). Με αυτό τον τρόπο, η ύπαρξη αρκετών συχνοτήτων στο ίδιο χρονικό διάστημα, που παράγονται από την ίδια πηγή ήχου, οδηγεί στο σχηματισμό σύνθετων/ακανόνιστων κυμάτων, που προκύπτουν από το άθροισμα απλών ημιτονοειδών αρμονικών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.



Εικ. 6 – Δημιουργία ακανόνιστου ηχητικού κύματος
(Πηγή: Desmos)

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Γλωσσάρι

Πέμπτη: διάστημα ανάμεσα σε μια μουσική νότα και μια άλλη, η οποία είναι τέσσερις βαθμίδες μακριά από την πρώτη σε μια κλίμακα.

Τετάρτη: διάστημα ανάμεσα σε μια μουσική νότα και μια άλλη, η οποία απέχει τρεις βαθμίδες από την πρώτη σε μια κλίμακα.

Συχνότητα: φυσικό μέγεθος που υποδεικνύει τον αριθμό επαναλήψεων ενός γεγονότος σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα..

Θεμελιώδης συχνότητα: η χαμηλότερη και η ισχυρότερη συνιστώσα συχνότητας της αρμονικής σειράς ήχου.

Θεμέλιος νότα: η κύρια νότα μιας χορδής, από την οποία προέρχονται οι άλλες συγχορδίες

Αρμονική σειρά: σύνολο κυμάτων που αποτελείται από τη θεμελιώδη συχνότητα και από όλα τα ακέραια πολλαπλάσια αυτής της συχνότητας.

Αρμονική: ήχος μιας σειράς που αποτελεί μια νότα.

Αρμονία: ταυτόχρονος συνδυασμός ήχων.

Μονόχορδο: ένα παλιό μουσικό όργανο αποτελούμενο από ένα ακουστικό ηχείο, πάνω στο οποίο εκτεινόταν μια μοναδική χορδή στερεωμένη από δύο κινητά τάστα.

Οκτάβα: διάστημα μεταξύ μιας μουσικής νότας και μιας άλλης με τη μισή ή τη διπλάσια συχνότητά της.

Πεντατονική κλίμακα: σύνολο όλων των κλιμάκων που αποτελούνται από πέντε νότες ή τόνους.

Τονικό ύψος: ήχος υψηλής συχνότητας για την ανθρώπινη ακοή, συνήθως πάνω από 5 KHz

Ημιτονοειδές κύμα: μια μαθηματική καμπύλη που περιγράφει μια ομαλή περιοδική ταλάντωση

(Μουσική) Κλίμακα: διατεταγμένη ακολουθία τόνων από τη συχνότητα δόνησης των ήχων (συνήθως από τον χαμηλότερο ήχο συχνότητας έως τον υψηλότερο ήχο συχνότητας).

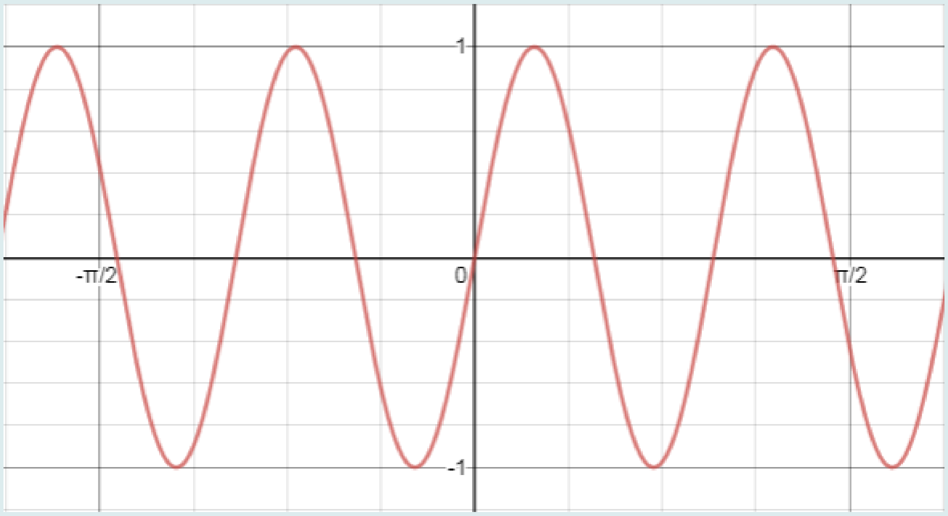
Συγκερασμένη κλίμακα: διαίρεση της οκτάβας σε δώδεκα ίσα ημιτόνια.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Τα Μαθηματικά πίσω από την Αρμονική Σειρά

Όταν ένα μουσικό όργανο είναι σε θέση να παράγει ήχους, ταλαντεύεται και εκπέμπεται μια σειρά ημιτονοειδών κυμάτων. Όταν απομονωθούν, αυτά τα κύματα τηρούν την παρακάτω μαθηματική συνάρτηση: $\mathbf{f(x) = ημω\ (f_i.\,2πx)}$, όπου $\mathbf{f_i}$ είναι η συχνότητα της αρμονικής σειράς $\mathbf{i}$.

Ας δούμε ένα παράδειγμα: αν η συχνότητα μιας αρμονικής είναι 1, τότε τα εκπεμπόμενα κύματα θα μοιάζουν κάπως έτσι:



Εικ. 7 – Ημιτονοειδή κύματα της συνάρτησης $\mathbf{f(x) = sin(f_i.\,2πx)}$ όπου $\mathbf{f_i = 1}$.

Ας αφιερώσουμε λίγο στην τριγωνομετρία και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις για να καταλάβουμε καλύτερα τα ημιτονοειδή κύματα.

1. Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ως πραγματικές συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών

Αν σε οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό **x** αντιστοιχεί ένας και μόνο ένας πραγματικός αριθμός **y** έτσι ώστε **y** = **ημω x** και $\mathbf{y = συν\,x}$, τότε $\mathbf{y = ημω\,x}$, $\mathbf{y = συν\,x}$ και $\mathbf{y = εφω\,x}$ $\left(\mathbf{\tan x = \frac{ημω\,x}{εφω\,x}}\right)$ θεωρούνται πλέον πραγματικές συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών.

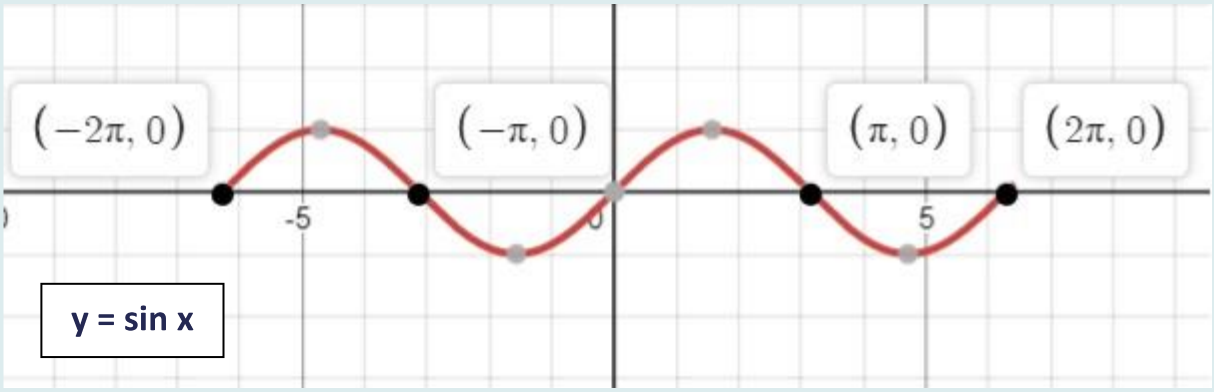
Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, ακρότατα και μηδενικά τριγωνομετρικών συναρτήσεων

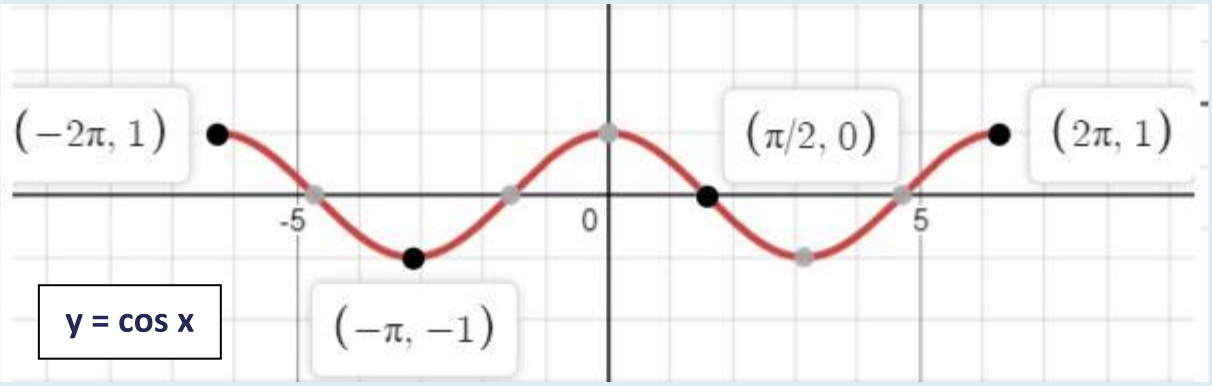
Σε μια συνάρτηση **f (x)**, η τιμή x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και ονομάζεται συνήθως **πεδίο ορισμού**. Όσο για το σύνολο Y στο οποίο όλο το σύνολο τιμών της συνάρτησης επιβάλεται να μειωθεί ονομάζεται **πεδίο τιμών**. Με άλλα λόγια, κάθε τιμή που εισέρχεται σε μια συνάρτηση είναι το πεδίο ορισμού και η τιμή που προκύπτει είναι το πεδίο τιμών.

Κατά τη μοντελοποίηση μιας συνάρτησης f (x), θα παρατηρήσετε ότι έχει μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή. Αυτά είναι τα **ακρότατα** και αντιστοιχούν στο **μέγιστο** και στο **ελάχιστο σημείο** μιας συνάρτησης. Επιπλέον, μια συνάρτηση μπορεί να έχει μηδενικά. Αυτά είναι τα σημεία τομής στον άξονα του x, δηλαδή το μηδέν μιας συνάρτησης είναι ένα όρισμα που έχει τιμή 0.

Εξετάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: **y = ημω x**, **y = συν x** και **y = εφω x** στο διάστημα **[-2π, 2π].**

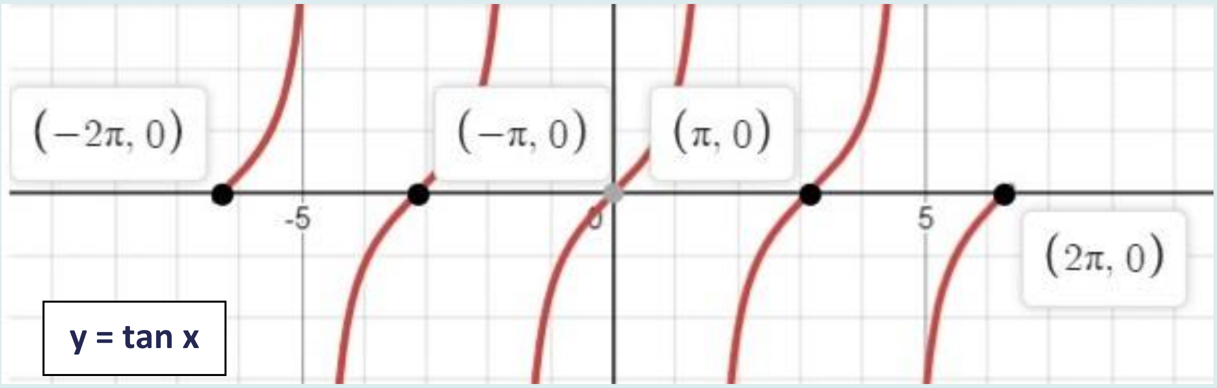


Εικ. 8 – Γραφική παράσταση συνάρτησης y=ημω x
(Πηγή: Desmos.com)



Εικ. 9 – Γραφική παράσταση συνάρτησης y=συν x
(Source: Author, at Desmos.com)

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.



Εικ. 10 – Γραφική παράσταση της συνάρτησης y=εφω x
(Πηγή: Desmos.com)

Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις, είναι δυνατόν να συμπεράνουμε ότι:

Συνάρτηση	$\mathbf{y = ημω\,x}$	$\mathbf{y = συν\,x}$	$\mathbf{y = εφω\,x}$
Πεδίο ορισμού	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$
Πεδίο τιμών	[-1 , 1]	[-1 , 1]	$\mathbb{R}$
Μέγιστο σημείο	1 το: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\ \epsilon\ \mathbb{Z}$	1 το: $x = 2k\pi, k\ \epsilon\ \mathbb{Z}$	------
Ελάχιστο σημείο	-1 το: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	-1 το: $x = \pi + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	------
Μηδενικά	$x = k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	$x = k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$

2. Μονοτονία τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Εξετάζοντας τα προηγούμενές γραφικές παραστάσεις στο διάστημα **[-2π, 2π]**, είναι δυνατόν να συμπεράνουμε ότι:

- **ημω** (x) αυξάνεται $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, και μειώνεται στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$;

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

• $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\ (\mathbf{x})$ αυξάνεται στο $\left[\boldsymbol{\pi}, \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}\right]$ και στο $\left[\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}, \mathbf{2\pi}\right]$, και μειώνεται στο $\left[\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$ και στο $\left[\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\pi}\right]$;

Όσον αφορά τη συνάρτηση **y = συνx**, είναι δυνατόν να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση αυξάνεται σε όλα τα διαστήματα στα οποία αυτή ορίζεται.

3. Συμμετρία και ισότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Άρτια συνάρτηση

• Μια συνάρτηση f είναι άρτια αν και μόνο αν f (-x) = f (x), $\forall x \in D\_f$.

• Η γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική σε σχέση με τον άξονα y.

Η συνάρτηση $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\, x}$ είναι μια **άρτια συνάρτηση**, δηλαδή, $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\, x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$**.**

Περιττή συνάρτηση

• Μια συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι αν και μόνο αν $\mathbf{f}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$.

• Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική σε σχέση με την προέλευση των συντεταγμένων.

Η συνάρτηση $\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta\mu\omega}\,\mathbf{x}$ είναι μια **περιττή συνάρτηση**, δηλαδή, $\boldsymbol{\eta\mu\omega}(-\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\eta\mu\omega}\,\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega}\,\mathbf{x}$ είναι μια **περιττή συνάρτηση**, δηλαδή, $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega}(-\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega}\,\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \mathbf{k\pi}, \mathbf{k\epsilon}\mathbb{Z}\right\}$.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

4. Η περίοδος των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι περιοδική της **περιόδου** $\mathbf{p}$ εάν η $\mathbf{p}$ εναι μικρότερη θετική σταθερά, έτσι ώστε $\mathbf{f(x+p)=f(x)}$ για το σύνολο $\mathbf{x}$ του πεδίου ορισμού της $\mathbf{f}$.

- Η περίοδος της συνάρτησης $y = ημω\ x$ is $2π$: $ημω\ (x+k\times 2π)\ ημω\ x, \forall x \epsilon \mathbb{R}\ (k \in \mathbb{Z})$;
- Η περίοδος της συνάρτησης $y =\ συν\ x$ is $2π$:$συν\ (x+k\times 2π) = συν\ x, \forall x \epsilon \mathbb{R}\ (k \in \mathbb{Z})$;
- Η περίοδος της συνάρτησης $y =\ εφω\ x$ is $π$: $εφω\ (x+kπ) = εφω\ x, \forall x \epsilon \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{π}{2}+kπ\right\}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Σε γενικές γραμμές, σε $\mathbf{k \neq 0}$:

Συνάρτηση	$\mathbf{y = A + Bημω(kx + C)}$	$\mathbf{y = A + Bσυν(kx + C)}$	$\mathbf{y = A + Bεφω(kx + C)}$
Περίοδος	$\mathbf{\frac{2π}{\lvert k\rvert}}$	$\mathbf{\frac{2π}{\lvert k\rvert}}$	$\mathbf{\frac{π}{\lvert k\rvert}}$

5. Επίλυση εξισώσεων του τύπου $\mathbf{ημω\ x\ =\ a}$

Γενικά, για να λυθεί, σε $\mathbb{R}$, μια εξίσωση τύπου $\mathbf{ημω\ x = a}$ πρέπει να λάβουμε υπόψη τις παρακάτω πληροφορίες:

- Η εξίσωση του τύπου $ημω\ x = a$ έχει μόνο λύση εάν a $\in [-1,1]$.
- Στο διάστημα $[0,2π]$ υπάρχουν δύο τιμές που έχουν ίδια ημιτονοειδή τιμή: α και $π - α$.
- $ημω\ x = ημω\ α \Leftrightarrow x = α + 2kπ \vee x = π - α + 2kπ, k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα της επιλύσης μιας εξίσωσης του τύπου $\mathbf{ημω\ x = a}$:

Λύστε, σε $\mathbb{R}$, την εξίσωση $\mathbf{ημω\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

➔ Πρώτο βήμα:

Βρείτε τη λύση της εξίσωσης $\boldsymbol{\eta\mu\omega}\ \mathbf{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Γνωρίζουμε ότι $\boldsymbol{\eta\mu\omega}\ \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και ότι $\boldsymbol{\eta\mu\omega}\ (-\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\eta\mu\omega}\ \mathbf{x}$. Επομένως,

$\boldsymbol{\eta\mu\omega}\ \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Η λύση της εξισώσης είναι $-\frac{\pi}{4}$.

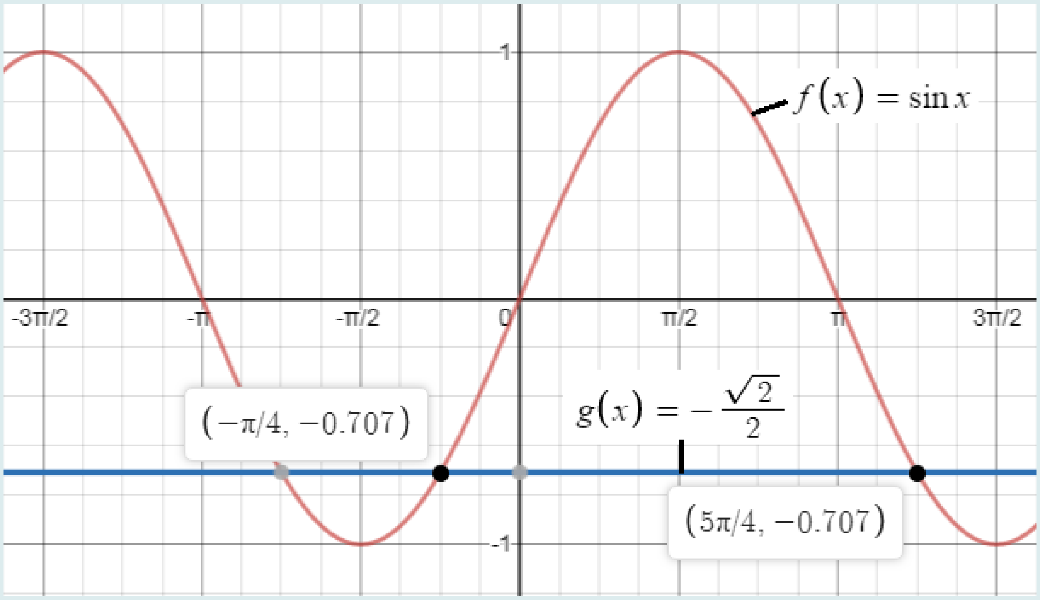
➔ Δεύτερο βήμα:

Υπολογίστε $\boldsymbol{\pi} - \frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\pi} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

➔ Τρίτο βήμα:

Γράψτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $\mathbf{x} = -\frac{\pi}{4} + 2\mathbf{k}\pi \vee \mathbf{x} = \frac{5\pi}{4} + 2\mathbf{k}\pi, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}$.

Χρησιμοποιώντας τη διαδικτυακή αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων Desmos, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τις δύο τιμές που προέκυψαν:



Εικ. 11 – Η γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης ημω $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, στο $\mathbb{R}$.

(Πηγή: Desmos)

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

6. Επίλυση εξισώσεων τύπου $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\, x = a}$

Αφού αφομοιώσαμε την επίλυση μιας εξίσωσης του τύπου $\boldsymbol{\eta\mu\omega\, x = a}$, είναι πολύ απλό να λύσουμε μια εξίσωση του τύπου $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\, x = a}$.

Η διαφορά είναι μόνο ότι παρατηρούμε: $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{-\alpha}$ έχουν το ίδιο συνημίτονο, δηλαδή, $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(\alpha) = \sigma\upsilon\nu(-\alpha) = a}$.

Επομένως, για να λυθεί, σε $\mathbb{R}$, μια εξίσωση τύπου $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\, x = a}$ πρέπει να λάβουμε υπόψη τις ακόλουθες πληροφορίες:

- Η εξίσωση τύπου $\sigma\upsilon\nu\, x = a$ έχει μόνο μια λύση εάν a $\in [-1,1]$.
- Στο διάστημα [0, 2π] υπάρχουν δύο τιμές που έχουν το ίδιο ημίτονο: α and $-\alpha$.
- $\sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu\, \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα επίλυσης εξίσωσης τύπου $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\, x = a}$.

Λύστε, σε $\mathbb{R}$, την εξίσωση $\boldsymbol{1 - 2\sigma\upsilon\nu\, x = 0}$.

Λύση: $\boldsymbol{1 - 2\,\sigma\upsilon\nu\, x = 0 \Leftrightarrow -2\,\sigma\upsilon\nu\, x = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\, x = \frac{1}{2}}$.

➔ Πρώτο βήμα:

Ορίστε $\boldsymbol{\alpha}$, σε ακτίνια, έτσι ώστε $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\, \alpha = \frac{1}{2}}$.

Γνωρίζουμε $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\, \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$, επομένως, $\boldsymbol{= \frac{\pi}{3}}$.

➔ Δεύτερο βήμα:

Εάν $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}}$ είναι η λύση της εξίσωσης, είναι και $\boldsymbol{-\alpha = -\frac{\pi}{3}}$.

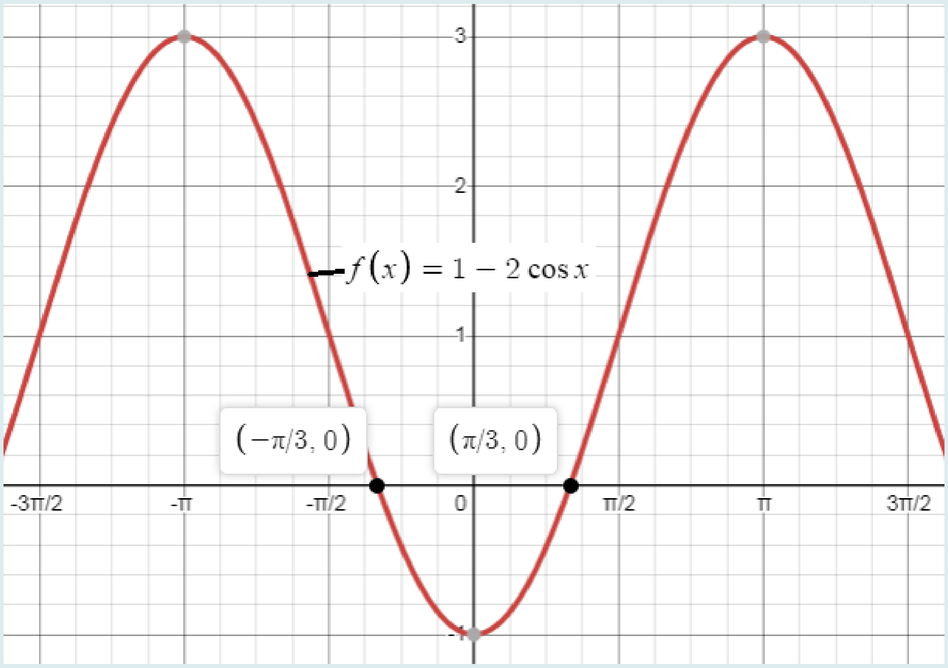
➔ Τρίτο βήμα:

Γράψτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Erasmus+ | The Art Of Maths

Χρησιμοποιώντας τη διαδικτυακή αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων Desmos, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τις δύο τιμές που λήφθηκαν:



Εικ. 12 – Γραφική αναπαράσταση της εξίσωσης $1 - 2συν\, x = 0$
(Πήγη: Desmos)

7. Επίλυση εξισώσεων τύπου $\mathbf{εφω\, x = a}$

Στο διάστημα $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, η εξίσωση $\mathbf{εφω\, x = a}$ έχει μία και μοναδική λύση: ας είναι $\boldsymbol{\alpha}$.

Δεδομένου ότι η περίοδος της συνάρτησης $\mathbf{y = εφω\, x}$ is $\boldsymbol{\pi}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι εάν $\boldsymbol{\alpha}$ είναι η λύση της εξίσωσης $\mathbf{εφω\, x = a}$, τότε το $\boldsymbol{\alpha + k\pi, k} \in \mathbb{Z}$ είναι επίσης μια λύση.

Επομένως, για να λυθεί, σε $\mathbb{R}$ μια εξίσωση του τύπου $\mathbf{εφω\, x = a}$ πρέπει να λάβουμε υπόψη τις ακόλουθες πληροφορίες:

- Η εξίσωση $εφω\, x = a$ έχει λύση για οποιαδήποτε πραγματική τιμή a.
- $εφω\, x = εφω\, \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα επίλυσης μιας εξίσωσης τύπου $\mathbf{εφω\, x = a}$

Λύστε την εξίσωση $\mathbf{εφω\, x = \sqrt{3},\ \ 0 \le x \le 2\pi\ (rad)}$.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Είναι γνωστό ότι $\mathbf{εφω}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Επομένως, $\mathbf{x} = \frac{\pi}{3} + \mathbf{k\pi}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbf{k = 0 \;\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}};$$

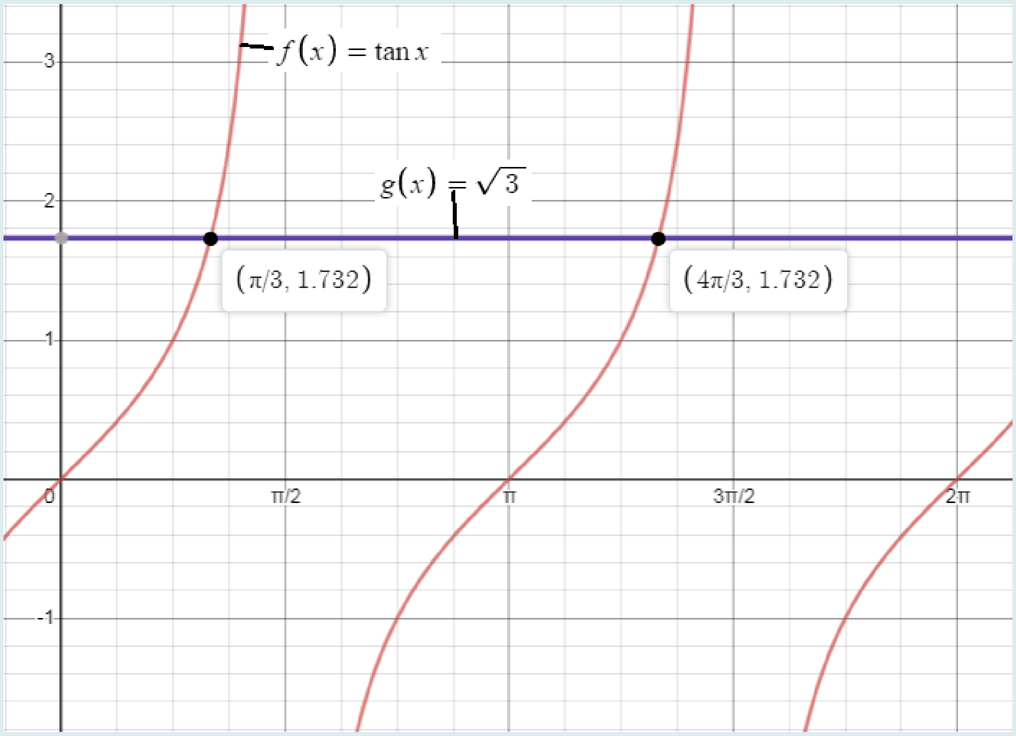
$$\mathbf{k = 1 \;\Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}};$$

$$\cancel{\mathbf{k}} = \mathbf{2 \;\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi\;\; (μεγαλύτερο\ από\ 2\pi)};$$

$$\cancel{\mathbf{k}} = \mathbf{-1 \;\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - 2\pi\;\; (μικρότερο\ από\ 0)}.$$

Επομένως, $\mathbf{S} = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

Χρησιμοποιώντας τη διαδικτυακή αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων Desmos, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τις δύο τιμές που προέκυψαν:



Εικ. 13 – Γραφική παράσταση της εξίσωσης εφω $\mathbf{x} = \sqrt{3},\; 0 \le \mathbf{x} \le 2\pi$ (rad).
(Πηγή: Desmos)

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Προσδιορίστε την περίοδο κάθε μιας από τις παρακάτω τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

1.1. $y = \eta\mu\omega\,(2x)$;

1.2. $y = 5\eta\mu\omega\,(\frac{\pi}{3}x)$;

1.3. $y = -2\sigma\upsilon\nu\,(-5x)$;

1.4. $y = -20\sigma\upsilon\nu\,(\pi x)$;

1.5. $y = -3\varepsilon\varphi\omega\,(2x)$;

1.6. $y = -3\varepsilon\varphi\omega\,(-\frac{\pi}{2}x)$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Λύστε, σε $\mathbb{R}$, τις παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

2.1. $-2\eta\mu\omega(x) = \sqrt{2}$;

2.2. $2\eta\mu\omega(x) + \sqrt{3} = 0$;

2.3. $-2\eta\mu\omega(x) = -4$;

2.4. $2\eta\mu\omega(2x) - 1 = 0$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Επιλύστε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις στα υποδεικνυόμενα σύνολα.

Σημείωση: Γράψτε τις λύσεις σε ακτίνια.

3.1. $\sigma\upsilon\nu(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, σε $\mathbb{R}$;

3.2. $2\sigma\upsilon\nu(x) + 1 = 0$, σε $\mathbb{R}$;

3.3. $\sigma\upsilon\nu(x) = -1$, σε $[0, 3\pi]$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 4

Επιλύστε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις στα υποδεικνυόμενα σύνολα.

Σημείωση: Γράψτε τις λύσεις σε ακτίνια.

4.1. $3\varepsilon\varphi\omega\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{3}$, σε $\mathbb{R}$;

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

4.2. $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega(2x) = 1}$, σε $[\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ…

Τα Μαθηματικά της Μουσικής

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

Κλίμακες σε μια χορδή

https://www.youtube.com/watch?v=cnH2ItfW48U

Οι Αρμονικές Σειρές

https://www.oberton.org/en/overtone-singing/harmonic-series/

Η διαδρομή για την κατανόηση των μουσικών διαστημάτων, των κλιμάκων, του κουρδίσματος και του ηχοχρώματος

http://in.music.sc.edu/fs/bain/atmi02/hs/hs.pdf

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

https://www.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-trig-functions

Εξερευνήστε γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τη διαδικτυακή εφαρμογή Desmos https://www.desmos.com/

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.