

ΜΕΡΟΣ II: Μουσική & Μαθηματικά

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 13 –15

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 16: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΕΙΡΑ ΣΕ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΣΕΙΡΑ

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

«Παρτιτούρα»

(Πηγή: <https://www.pexels.com/photo/black-and-white-keys-music-note-534283/>)



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Αριθμητική σειρά σε αρμονική σειρά

Ηλικιακό Εύρος: 13 – 15 χρονών

Διάρκεια: 3 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Αριθμητική σειρά

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Αρμονική σειρά στη μουσική, μουσικές νότες και συχνότητες μουσικών νοτών

Γενικοί σκοποί: Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια των αριθμητικών σειρών και να είναι σε θέση να υπολογίσουν κάποιους από τους όρους όπως το νιοστό όρο.

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Για να μπορέσουν οι μαθητές να αποκτήσουν μια πιο ξεκάθαρη εικόνα των τρόπων ταλάντωσης, ζητήστε τους να παρακολουθήσουν το βίντεο «Modes on a string» (βλ. «Μάθετε περισσότερα ...») μετά από την αντίστοιχη επεξήγηση.

Πηγές: Στυλό, η εργασία 1 χρειάζεται ένα χάρτινο κουτί, ένα λάστιχο και δύο μαρκαδόρους.

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Ξεκινήστε δίνοντας παραδείγματα αριθμητικών σειρών για να εξηγήσετε την κεντρική ιδέα και στη συνέχεια διδάξτε πώς να τις ολοκληρώσετε. Επεξηγήστε τον τρόπο υπολογισμού των όρων των αριθμητικών σειρών δείχνοντας ένα παράδειγμα.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες:

Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- Αναγνωρίζει αριθμητικές σειρές
- Υπολογίζει τους όρους μιας μαθηματικής σειράς
- Υπολογίζει τον νιοστό όρο μιας αριθμητικής σειράς

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά και η μουσική ήταν πάντα συνδεδεμένα. Ωστόσο, η πρώτη απόδειξη αυτής της σχέσης βρέθηκε μόλις τον 6ο αιώνα π.Χ. Ο Πυθαγόρας συνέκρινε τον ήχο που παράγεται από σφυριά διαφορετικού μήκους, που χρησιμοποιούνται από τους σιδεράδες, με τον ήχο του μονόχορδου, του οποίου ο εφευρέτης θεωρείται ότι ήταν ο Πυθαγόρας.

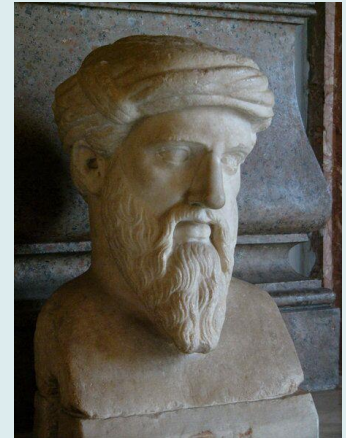
Αυτή η σύγκριση επέτρεψε στον Πυθαγόρα να ανακαλύψει και να βελτιώσει το μαθηματικό συλλογισμό πίσω από τους ήχους, μέσα από τη μελέτη των ήχων που παράγει το μονόχορδο. Διείρεσε τη χορδή σε δύο ίσα μέρη, στη συνέχεια σε τρία ίσα μέρη και ούτω καθεξής. Ταίριαξε τους ήχους με μαθηματικό τρόπο σύμφωνα με τις υποδιαιρέσεις που έκανε και δημιούργησε την Πυθαγόρεια κλίμακα, όπου κάθε νότα διατηρούσε μια καλά καθορισμένη σχέση με την άλλη.

Πολλοί άνθρωποι και πολιτισμοί έχουν δημιουργήσει τις δικές τους κλίμακες. Για παράδειγμα ο κινεζικός λαός δημιούργησε την πεντατονική κλίμακα. Ωστόσο, η δυτική κουλτούρα υιοθέτησε μια 12-τόνη κλίμακα σε ίση ιδιοσυγκρασία, γνωστή ως συγκερασμένη κλίμακα ή χρωματική κλίμακα.

Αρμονική σειρά

Είναι γενικά γνωστό ότι οι φυσικές μουσικές νότες είναι Α, Β, C, D, E, F και G. Ωστόσο, συμβολίζονται στις περισσότερες χώρες σύμφωνα με τη σύμβαση ονοματολογίας Solfège (Σολφέζ) Do-Re-Mi-Fa-Sol- Ti (ή Si) σύμφωνα με την παρακάτω αντιστοιχία: C-Do, D-Re, E-Mi, F-Fa, G-Sol, A-La και B-Ti (ή Si). Ο ορισμός αυτών των νοτών επηρεάστηκε ευρέως από τα Μαθηματικά.

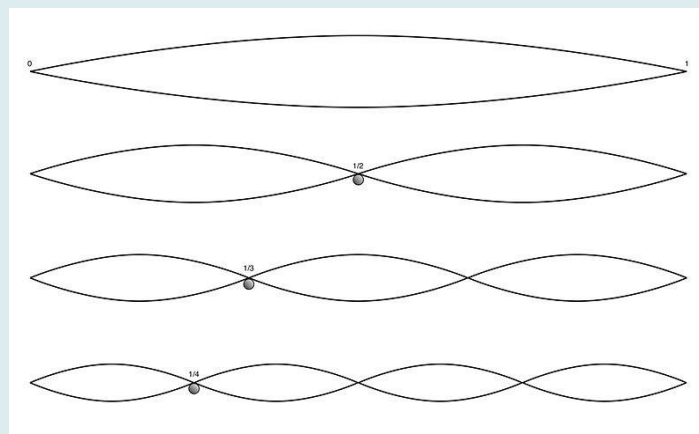
Τον 6ο αιώνα π.Χ., ο Πυθαγόρας συνειδητοποίησε ότι όταν ταλαντεύεται μια χορδή, δεν πάλλεται μόνο σε ολόκληρη την έκτασή της, αλλά σχηματίζει επίσης μια σειρά δεσμών που διαιρούνται σε μικρότερα τμήματα, τις ανώτερες αρμονικές, οι οποίες ταλαντεύονται σε συχνότητες υψηλότερες από τη βασική.



Εικ. 1 – Προτομή Πυθαγόρα
(Πηγή:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg)

Για να μελετήσει τη σχέση ανάμεσα στο μήκος της ταλαντούμενης χορδής και τον μουσικό τόνο που παράγει, χρησιμοποίησε ένα μονόχορδο.

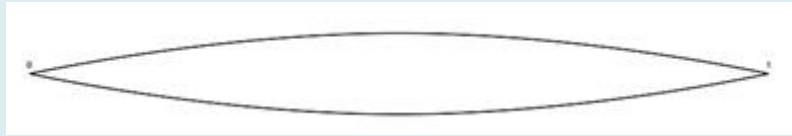
Η εικόνα 2 δείχνει τους δεσμούς και τα ανώτερα αρμονικά των πρώτων τεσσάρων συχνοτήτων μιας σειράς. Για να γίνει πιο εύκολα κατανοητό παρουσιάζονται ξεχωριστά, αλλά σε μια πραγματική χορδή αλληλεπικαλύπτονται, δημιουργώντας ένα σύνθετο σχέδιο, παρόμοιο με την κυματομορφή του οργάνου.



Εικ. 2 – Τρόποι ταλάντωσης των πρώτων 4 αρμονικών

(Πηγή:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%Aancia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

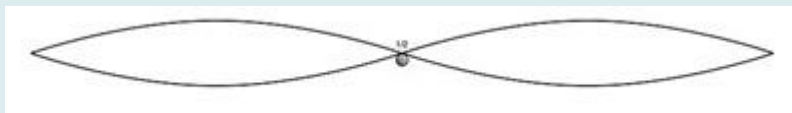
Φανταστείτε μια χορδή τεντωμένη, στερεωμένη στα άκρα της. Όταν αγγίζουμε το ένα άκρο αυτής της χορδής, ταλαντεύεται (Εικόνα 3) και παράγει μια νότα που ονομάζεται θεμέλιος νότα.



Εικ. 3 – Τρόποι δόνησης μιας θεμέλιου νότας 1(f)

(Πηγή: https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Ο Πυθαγόρας αποφάσισε να διαιρέσει μια χορδή σε δύο τμήματα (Εικόνα 4) ασκώντας πίεση στη μέση της χορδής. Ο ήχος που παράχθηκε ήταν ο ίδιος, αλλά σε υψηλότερη συχνότητα (συνήθως εκφράζεται ως "ίδια νότα, μια οκτάβα υψηλότερη"). Από τότε έχει αποδειχθεί ότι όποτε ο αριθμός των διαιρέσεων (ή ο αρμονικός αριθμός) είναι πολλαπλάσιος ενός προηγούμενου αριθμού, τότε ο ήχος θα επαναληφθεί αλλά με υψηλότερο τονικό ύψος.



Εικ. 4 – Τρόποι ταλάντωσης μιας θεμέλιου νότας 2(f)

(Πηγή: https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

6

Στη συνέχεια, αποφάσισε να δοκιμάσει τι θα ακουγόταν εάν η χορδή διαιρούταν σε 3 τμήματα (Εικόνα 5) και παρατήρησε ότι προέκυψε ένας νέος ήχος, διαφορετικός από τον προηγούμενο. Αυτή τη φορά, δεν ήταν η "ίδια νότα, μια οκτάβα υψηλότερη", αλλά μια εντελώς διαφορετική νότα, η οποία άξιζε να έχει διαφορετικό όνομα - η πέμπτη.



Εικ. 5 – Τρόποι δόνησης μιας θεμέλιου νότας 3(f)

(Πηγή: https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Αυτός ο ήχος, αν και διαφορετικός, ταίριαζε με τον προηγούμενο ήχο. Δημιουργούσε μια ευχάριστη αρμονία στο αυτί, κάτι που οφειλόταν στο γεγονός ότι οι διαιρέσεις που έγιναν είχαν τις μαθηματικές σχέσεις $1/2$ και $2/3$. Με τη διαίρεση της χορδής σε τέσσερα μέρη, προέκυψε μια νότα, γνωστή σήμερα ως «τετάρτη». Αυτές οι τρεις νότες είναι αρμονικές με τη θεμέλιο νότα.

Με αυτόν τον τρόπο, συνέχισε να υποδιαιρεί τη χορδή, παίρνοντας τις αρμονικές της θεμέλιου νότας και συνδυάζοντας με μαθηματικό τρόπο τους ήχους δημιουργήσε κλίμακες που οδηγούν σε νότες, οι οποίες σχετίζονταν φυσικά μεταξύ τους. Με την πάροδο του χρόνου δόθηκαν στις νότες τα ονόματα που γνωρίζουμε σήμερα, τα οποία αναφέρθηκαν νωρίτερα.

Σε αυτή τη διαδικασία, κάθε νότα που προέρχεται από ένα αντικείμενο, δέχεται την επίδραση της θεμελιώδους συχνότητας που διεγείρει άλλες αρμονικές, γεγονός που οδηγεί σε μια σειρά συχνοτήτων - την αρμονική σειρά. Οι αρμονικές σειρές είναι άπειρες, αποτελούμενες από ημιτονοειδή κύματα με όλες τις ακέραιες πολλαπλές συχνότητες της θεμελιώδους συχνότητας. Δεν υπάρχει μια ενιαία αρμονική σειρά, αλλά μια διαφορετική σειρά για κάθε θεμελιώδη συχνότητα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα μιας αρμονικής σειράς που ξεκινά από το A_2 / Λά₁ (110 Hz). Οι πρώτες 16 αρμονικές για αυτή τη σειρά μπορούν να παρατηρηθούν στον παρακάτω πίνακα:

Αρμονική #	Νότα (Αγγλικά)	Νότα (Νέα λατινικά)	Συχνότητα (Hz)
1 (F)	A_2	Λά ₁	110
2	A_3	Λά ₂	220
3	E_4	Μι ₃	330
4	A_5	Λά ₃	440
5	$C\#_5$	Do ₄ [#]	550
6	E_4	Μι ₄	660
7	G_4	Sol ₄	770
8	A_5	Λά ₄	880
9	B_5	Si ₄	990
10	$C\#_6$	Do ₅ [#]	1100
11	$D\#_6$	Ré ₅ [#]	1210
12	E_6	Μι ₅	1320

13	F# ₆	Fά# ₅	1430
14	G ₆	Sol ₅	1540
15	G# ₅	Sol# ₅	1650
16	A ₆	Λά ₅	1760

Πίνακας 1 – Πρώτες 16 αρμονικές

Γλωσσάρι

Πέμπτη: διάστημα ανάμεσα σε μια μουσική νότα και μια άλλη, η οποία είναι τέσσερις βαθμίδες μακριά από την πρώτη σε μια κλίμακα.

Τετάρτη: διάστημα ανάμεσα σε μια μουσική νότα και μια άλλη, η οποία απέχει τρεις βαθμίδες από την πρώτη σε μια κλίμακα.

Συχνότητα: φυσικό μέγεθος που υποδεικνύει τον αριθμό επαναλήψεων ενός γεγονότος σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Θεμελιώδης συχνότητα: η χαμηλότερη και η ισχυρότερη συνιστώσα συχνότητας της αρμονικής σειράς ήχου.

Θεμέλιος νότα: η κύρια νότα μιας χορδής, από την οποία προέρχονται οι άλλες συγχορδίες

Αρμονική σειρά: σύνολο κυμάτων που αποτελείται από τη θεμελιώδη συχνότητα και από όλα τα ακέραια πολλαπλάσια αυτής της συχνότητας.

Αρμονική: ήχος μιας σειράς που αποτελεί μια νότα.

Αρμονία: ταυτόχρονος συνδυασμός ήχων.

Μονόχορδο: ένα παλιό μουσικό όργανο αποτελούμενο από ένα ακουστικό ηχείο, πάνω στο οποίο εκτεινόταν μια μοναδική χορδή στερεωμένη από δύο κινητά τάστα.

Οκτάβα: διάστημα μεταξύ μιας μουσικής νότας και μιας άλλης με τη μισή ή τη διπλάσια συχνότητά της.

Πεντατονική κλίμακα: σύνολο όλων των κλιμάκων που αποτελούνται από πέντε νότες ή τόνους.

Τονικό ύψος: ήχος υψηλής συχνότητας για την ανθρώπινη ακοή, συνήθως πάνω από 5 KHz

(Μουσική) Κλίμακα: διατεταγμένη ακολουθία τόνων από τη συχνότητα δόνησης των ήχων (συνήθως από τον χαμηλότερο ήχο συχνότητας έως τον υψηλότερο ήχο συχνότητας).

Συγκερασμένη κλίμακα: διαίρεση της οκτάβας σε δώδεκα ίσα ημιτόνια.

Τα μαθηματικά πίσω από την Αρμονική Σειρά

Οι διαιρέσεις που έγιναν από τον Πυθαγόρα πάνω στη χορδή του μονοχόρδου αντιστοιχούν στις διαιρέσεις της μονάδας από τους φυσικούς αριθμούς, π.χ. ακολουθείστε τη σειρά 1, 2, 3, 4, ..., n. Με άλλα λόγια, αντιστοιχούν στην ακολουθία

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$. Όσον αφορά την ταλάντευση, η αντιστοιχία θα ήταν η ακολουθία

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}$.

Αριθμητικές Ακολουθίες

Μια **ακολουθία** ή διαδοχή είναι ένα σύνολο αντικειμένων οποιασδήποτε φύσης, οργανωμένα ή γραμμένα με συγκεκριμένη σειρά.

Παραδείγματα:

Το σύνολο Ιανουάριος, Φεβρουάριος, Μάρτιος, Απρίλιος, ..., Δεκέμβριος είναι μια ακολουθία ή διαδοχή των μηνών του έτους.

Το σύνολο 0, 1, 2, 3, 4, ... ονομάζεται ακολουθία ή ακολουθία φυσικών αριθμών.

Μια **αριθμητική ακολουθία** είναι μια συνάρτηση που έχει ως πεδίο το σύνολο των φυσικών αριθμών και ως πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Οι αριθμητικές ακολουθίες μπορούν να είναι πεπερασμένες όταν είναι δυνατόν να «μετρηθούν» τα στοιχεία τους, ή άπειρες, όταν δεν είναι δυνατόν να «μετρηθούν» τα στοιχεία τους. Δείτε παρακάτω τις μαθηματικές παραστάσεις και των δύο περιπτώσεων:

Πεπερασμένη ακολουθία: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

Άπειρη ακολουθία: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$

Διαβάζοντας τους προηγούμενους όρους:

$a_1 \rightarrow a$ δείκτης 1 (πρώτος όρος ή όρος της σειράς 1)

$a_2 \rightarrow a$ δείκτης 2 (δεύτερος όρος ή όρος της σειράς 2)

$a_3 \rightarrow a$ δείκτης 3 (τρίτος όρος ή όρος της σειράς 3)

$a_n \rightarrow a$ δείκτης n (νιοστός όρος ή όρος της σειράς n)

Ρίξτε μια ματιά στα παραδείγματα πεπερασμένων και άπειρων ακολουθιών:

Πεπερασμένη ακολουθία: (5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19)

Άπειρη ακολουθία: (3, 5, 7, 11, 13, 17, ...)

Οι ακολουθίες αποδίδονται κυρίως από ένα μαθηματικό τύπο που ονομάζεται **γενικός όρος**. Αυτός είναι ο νόμος του σχηματισμού ο οποίος ορίζει οποιονδήποτε από τους όρους της ακολουθίας.

Παραδείγματα:

- 1) Δεδομένης της ακολουθίας που ορίζεται από $a_n = 4n - 1$, με $n \in \mathbb{N}$, υπολογίστε τον πρώτο και τον τρίτο όρο.

Θυμηθείτε ότι το πεδίο ορισμού αυτής της ακολουθίας είναι \mathbb{N} , οπότε ο πρώτος όρος είναι a_1 και υπολογίζεται αντικαθιστώντας n με 1.

Για $n = 1$, έχουμε: $a_1 = 4 \times 1 - 1 = 3$

Για $n = 3$, έχουμε: $a_3 = 4 \times 3 - 1 = 11$.

- 2) Εξετάστε την αριθμητική ακολουθία 5, 8, 11 ...

Ο πρώτος όρος της ακολουθίας είναι 5 και μετά τον πρώτο όρο, οποιοσδήποτε άλλος όρος προκύπτει προσθέτοντας 3 στον προηγούμενο όρο.

Δείτε, για παράδειγμα, τους παρακάτω υπολογισμούς που σχετίζονται με τους πρώτους όρους:

n	Υπολογισμός νιοστού όρου	
1	5	= 5 + 0 x 3 = 5
2	5 + 3	= 5 + 1 x 3 = 8
3	5 + 3 + 3	= 5 + 2 x 3 = 11
4	5 + 3 + 3 + 3	= 5 + 3 x 3 = 14
5	5 + 3 + 3 + 3 + 3	= 5 + 4 x 3 = 17

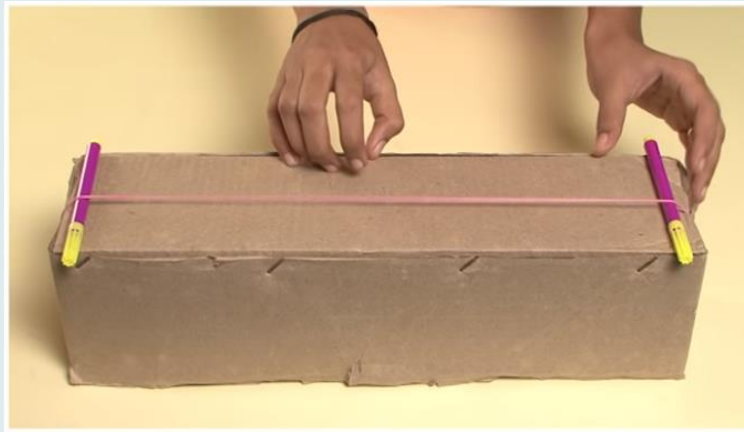
Πίνακας 2 – Υπολογισμός αριθμητικής σειράς

Ο πίνακας δείχνει ότι μπορούμε να λάβουμε τον όρο της σειράς n (όπου n είναι οποιοσδήποτε όρος της σειράς) από τον πρώτο όρο 5 και προσθέτοντας τον λόγο 3 επανειλημμένα σε $n - 1$ φορές. Αυτό μπορεί να γραφτεί αλγεβρικά ως $5 + 3(n - 1)$. Η απλοποιημένη έκδοχή αυτής της έκφρασης έχει τη μορφή $3n + 2$.

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Χρησιμοποιώντας ένα χαρτόκουτο, ένα λάστιχο και δύο μαρκαδόρους, κάνουμε το πείραμα που έκανε ο Πυθαγόρας με ένα μονόχορδο.



Παρατηρήστε ότι με την αλλαγή της θέσης ενός μαρκαδόρου παράγεται διαφορετικό τονικό ύψος. Βρείτε περισσότερες πληροφορίες στο παρακάτω βίντεο:

<https://www.youtube.com/watch?v=AQJw95-H9mM>

13

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Γράψτε τους πρώτους τέσσερις όρους της ακολουθίας (u_n), δεδομένου ότι:

2.1) $u_n = 5n - 2$

2.2) $u_n = -3n + 1$

2.3) $u_n = \frac{1}{n}$

2.4) $u_n = \frac{1}{3n}$

2.5) $u_n = \frac{1}{n^3}$

ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Γράψτε τους παρακάτω δύο όρους και το γενικό όρο της ακολουθίας (u_n), όπου οι πρώτοι όροι είναι:

3.1) $3, 6, 9, 12, 15, \dots$

3.2) $4, 9, 14, 19, 24, \dots$

3.3) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$

3.4) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ...

Τα μαθηματικά της μουσικής

<https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug>

Κλίμακες σε μια χορδή

<https://www.youtube.com/watch?v=cnH2lffW48U>

Η αρμονική σειρά

<https://www.oberton.org/en/overtone-singing/harmonic-series/>

Η διαδρομή για την κατανόηση των μουσικών διαστημάτων, των κλιμάκων, του κουρδίσματος και του ηχοχρώματος

<http://in.music.sc.edu/fs/bain/atmi02/hs/hs.pdf>

Πυθαγόρας και Μουσική

https://ba278b9d8106536501a2-57da1f3fe93ccf3a9828e6ce67c3d52c.ssl.cf5.rackcdn.com/07_richards.pdf

Αριθμητική σειρά

<https://www.mathsisfun.com/numberpatterns.html>

Μουσικές νότες στον Πίνακα Μετατροπής Συχνότητας

<https://www.audiology.org/sites/default/files/ChasinConversionChart.pdf>