

## ΜΕΡΟΣ II: Μουσική & Μαθηματικά

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 13-15

---

### ΕΡΓΑΛΕΙΟ 15: ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΚΟΥΡΔΙΣΜΑ ΚΑΙ ΛΟΓΟΙ

---

LogoPsyCom



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



## Οδηγός Εκπαιδευτικού

**Τίτλος:** Πυθαγόρειο Κούρδισμα και Λόγοι

**Ηλικιακό Εύρος:** 13-15 χρονών

**Διάρκεια:** 1 ώρα

**Μαθηματικές Έννοιες:** Πυθαγόρειο κούρδισμα, λόγοι

**Καλλιτεχνικές Έννοιες:** Νότες, διαστήματα, ηχητικά κύματα, τονικό ύψος, συχνότητα, Πυθαγόρας

**Γενικοί Σκοποί:** Να ανακαλύψουν οι μαθητές τις μαθηματικές έννοιες που κρύβονται πίσω από τις μουσικές συνθέσεις και να δουν την πιο πρακτική πλευρά της χρήσης των μαθηματικών.

**Οδηγίες και Μεθοδολογία:** Οι μαθητές θα διερευνήσουν και τα δύο πεδία ως σύνολο, ακούγοντας ή παίζοντας μουσική και παρακολουθώντας τα προτεινόμενα βίντεο που αναλύουν τις μουσικές συνθέσεις. Θα ανακαλύψουν τη βάση των προαναφερθέντων μαθηματικών εννοιών.

**Πηγές:** Αυτό το εργαλείο σας παρέχει βίντεο και ηλεκτρονικές πηγές για να τα χρησιμοποιήσετε στην τάξη σας. Τα θέματα που εξετάζονται στο εργαλείο θα σας βοηθήσουν να βρείτε επιπλέον υλικό για να εξατομικεύσετε και να δώσετε μια διαφορετική διάσταση στο μάθημα σας.

**Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό:** Η μάθηση μέσα από την πράξη είναι πολύ αποτελεσματική, ειδικά για νεαρούς μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Πάντα να εξηγείτε την πρακτική χρήση της κάθε μαθηματικής έννοιας και να δημιουργείτε μια διαδραστική εμπειρία για αυτούς.

**Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες :** Στο τέλος του συγκεκριμένου εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- ο κατανοεί το συλλογισμό πίσω από τη μουσική σύνθεση·
- ο κατανοεί τη χρησιμότητα του Πυθαγόρειου κούρδισματος στη μουσική·
- ο κατανοεί και να υπολογίζει τους λόγους στα διαστήματα.

### Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

## Εισαγωγή

Η μουσική και τα μαθηματικά δεν φαίνεται να έχουν μια ξεκάθαρη σύνδεση για όσους δεν έχουν συνθέσει ή δεν έχουν διαβάσει μια παρτιτούρα. Ωστόσο, είναι εμφανές ότι ο συγχρονισμός των μουσικών συνθέσεων και η δομή της παρτιτούρας με μέτρα παραπέμπουν σε έναν μαθηματικό τρόπο σκέψης.

Πολλοί ερευνητές έχουν μελετήσει τον αντίκτυπο των μαθηματικών στην τέχνη. Η μουσική ήταν ένα από τα σημεία εστίασης των ερευνών τους και διαπιστώθηκε ότι, ανά τους αιώνες, πολλοί μαθηματικοί είχαν διερευνήσει αυτό το ερώτημα. Ο Πυθαγόρας, ο Leonardo Bonacci (επίσης γνωστός ως Fibonacci), και πολλοί άλλοι έχουν συμβάλει στην έρευνα. Διαφορετικές πτυχές των μαθηματικών, που κυμαίνονται από τη βασική γεωμετρία και τις ακολουθίες αριθμών μέχρι την τριγωνομετρία, έχουν αποδειχθεί ότι χρησιμοποιούνται σε μουσικές συνθέσεις.

Μέσα σε αυτό το εργαλείο, θα επικεντρωθούμε στη δυνατότητα εφαρμογής των μαθηματικών σε μουσικές συνθέσεις εξετάζοντας αρχικά το Πυθαγόρειο σύστημα κουρδίσματος και εξερευνώντας τις επιλογές που προσφέρει στη μουσική σύνθεση.

## Πώς λειτουργεί η μουσική;

Όταν παίζουμε μουσική, οι ταλαντώσεις που παράγονται και η κίνηση των σωματιδίων του αέρα περνάν μέσα στα αυτιά μας και μας επιτρέπουν να ακούμε τους ήχους στη σωστή συχνότητα. Αν παρατηρήσετε μια χορδή κιθάρας, μπορείτε να δείτε ότι κινείται με ένα συγκεκριμένο τρόπο και με ένα συγκεκριμένο ρυθμό. Όταν τεντώνουμε μια χορδή, το τονικό της ύψος πηγαίνει υψηλότερα και η συχνότητά της γίνεται γρηγορότερη. Αυτό που παράγεται ονομάζεται ηχητικό κύμα και πηγαίνει κατευθείαν στα αυτιά μας, μετακινώντας το υγρό του κοχλία μας, στο εσωτερικό μέρος του αυτιού μας.

Φυσικά, ο Πυθαγόρας, Έλληνας φιλόσοφος από το 570 – περ. 495 π.Χ. δεν γνώριζε όλα όσα γνωρίζουμε σήμερα για το ανθρώπινο σώμα και τη μουσική σύνθεση. Ωστόσο, ανέπτυξε μια θεωρία για τον τρόπο υπολογισμού των λόγων των διαστημάτων, κάτι το οποίο θα μάθετε σε αυτό το μάθημα. Ο θρύλος λέει ότι άκουσε διαφορετικούς ήχους που προέρχονταν από σφυριά στο σιδηρουργείο και ανακάλυψε ότι όταν ένα σφυρί ήταν διπλάσιο σε μέγεθος ή βάρος από το άλλο, παρήγαγε την ίδια νότα αλλά κατά μία οκτάβα υψηλότερη.

Μπορείτε να μάθετε περισσότερα για την προέλευση του ήχου στο παρακάτω βίντεο:



[https://www.youtube.com/watch?v=i\\_0DXxNeaQ0](https://www.youtube.com/watch?v=i_0DXxNeaQ0)

## Γλωσσάρι

**Συχνότητα:** μας δίνει την ταχύτητα της ταλάντωσης και το τονικό ύψος ενός ήχου.

**Τονικό ύψος:** είναι το κατά πόσο μια νότα ακούγεται υψηλή ή χαμηλή και μετρείται σε Hertz.

**Ηχητικό κύμα:** αντιπροσωπεύει τη ταλάντωση που παράγεται από έναν ήχο. Το μήκος και η ταχύτητα του καθορίζουν το τονικό ύψος ή τη συχνότητα του ήχου.

**Κοχλίας:** η ελικοειδής κοιλότητα η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό του αυτιού που αντιδρά σε ηχητικές ταλαντώσεις.

**Διάστημα:** είναι η διαφορά του τονικού ύψους ανάμεσα σε δύο ήχους.

**Οκτάβα:** είναι η διαφορά του τονικού ύψους ανάμεσα σε μια νότα και μια άλλη νότα που έχει τη διπλάσια συχνότητά της.

## Τα μαθηματικά πίσω από τη μουσική σύνθεση

 Δείτε αυτό το βίντεο από το Working iveshoot που εξηγεί αυτό το φαινόμενο με περισσότερες λεπτομέρειες: <https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug>.

### Νότες και Διαστήματα:

Ένα σύστημα κουρδίσματος είναι αυτό που χρησιμοποιείται για να καθορίσει σε ποιο τονικό ύψος παίζουμε.

Υπάρχουν 12 νότες στο Πυθαγόρειο σύστημα κουρδίσματος:



Εικόνα 1: Πλήκτρα πιάνου με νότες

Τα διαστήματα αποτελούνται από δύο νότες. Για παράδειγμα, το διάστημα C προς E ονομάζεται μείζον τρίτο διάστημα. Το κούρδισμα του Πυθαγόρα βασίζεται στο λόγο **(1: 2)** σε διαστήματα που ονομάζονται **οκτάβες**, όπως το C προς C' και στο λόγο **(2: 3)** σε διαστήματα που ονομάζονται **καθαρά πέμπτα διαστήματα**, όπως C προς G.

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι μόνο οι νότες των οποίων οι συχνότητες ήταν κλάσματα με μικρούς αριθμούς ήταν ευχάριστες να ακούγονται μαζί. Αυτός είναι ο λόγος που επέλεξαν την οκτάβα και την καθαρή πέμπτη ως βάση για τη δημιουργία μουσικών συνθέσεων.

## Πως λειτουργεί αυτό;

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο κούρδισμα, για να υπολογίσουμε τους λόγους σε μια κλίμακα, θα χρειαστεί να δουλέψουμε με την οκτάβα και το καθαρό πέμπτο διάστημα.

### Ας δούμε μερικά παραδείγματα: ξεκινώντας από το C και χρησιμοποιώντας μόνο μείζονες κλίμακες (τις λευκές):<sup>1</sup>

1) Τι ξέρουμε: C προς G είναι (2:3) και G προς D' είναι επίσης (2:3)

Τι θέλουμε: Να βρούμε C προς D'

Τι κάνουμε: πολλαπλασιάζουμε και τους δύο λόγους.

$$\text{Τα μαθηματικά: } \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

Οπότε ο λόγος είναι (4:9)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
2:				3							x2
				2:				3			x3
4:								9			

2) Τι ξέρουμε: C προς D' είναι (4:9) και η οκτάβα D προς D' είναι (1:2)

Τι θέλουμε να βρούμε: C προς D

Τι κάνουμε: διαιρούμε τον λόγο (4:9) με (1:2)

$$\text{Τα μαθηματικά: } \frac{9/4}{2/1} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Οπότε ο λόγος είναι (8:9)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
4:								9:			x2
	1:							2			x9
8:	9										

<sup>1</sup> Εμπνευσμένο από ένα βίντεο από Working iveshoot: <https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug>



## ΕΡΓΑΣΙΑ

### Βρείτε περισσότερους λόγους!<sup>2</sup>

Βρείτε τα άλλα στοιχεία της μείζονος κλίμακας ξεκινώντας από το C.

Για να το κάνετε αυτό, συμπληρώστε τους παρακάτω πίνακες.

1) Τι ξέρουμε: C προς D είναι (8:9) και D προς A είναι (2:3)

Τι θέλουμε να βρούμε: C προς A

Τι κάνουμε:

Τα μαθηματικά:

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	

2) Τι ξέρουμε: C προς A είναι (\_\_\_:\_\_\_) και A προς E' είναι (2:3)

Τι θέλουμε να βρούμε: C ως E'

Τι κάνουμε:

Τα μαθηματικά:

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	

<sup>2</sup> Εμπνευσμένο από το βίντεο του Working iveshoot : <https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug>



3) Τι ξέρουμε: C προς E' είναι (\_\_\_:\_\_\_) και E προς E' είναι (1:2)

Τι θέλουμε να βρούμε: C προς E

Τι κάνουμε:

Τα μαθηματικά:

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	

4) Τι ξέρουμε: C προς E είναι (\_\_\_:\_\_\_) και E προς B είναι (2:3)

Τι θέλουμε να βρούμε: C προς B

Τι κάνουμε:

Τα μαθηματικά:

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	

5) Τι ξέρουμε: C προς B είναι (\_\_\_:\_\_\_) και B προς F' είναι (2:3)

Τι θέλουμε να βρούμε: C προς F'

Τι κάνουμε:

Τα μαθηματικά:

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	

6) Τι ξέρουμε: C προς F' είναι (\_\_\_:\_\_\_) και F προς F' είναι (1:2)

Τι θέλουμε να βρούμε: C προς F

Τι κάνουμε:

Τα μαθηματικά:

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	

**Τώρα μπορείτε να αποδώσετε τους λόγους για όλες τις νότες!**

C	D	E	F	G	A	B	C'
1/1	9/8			3/2			2/1

## Μάθετε περισσότερα...

Βίντεο σχετικά με την προέλευση του ήχου:

[https://www.youtube.com/watch?v=i\\_0DXxNeaQ0](https://www.youtube.com/watch?v=i_0DXxNeaQ0)

Βίντεο σχετικά με τη χρήση των μαθηματικών στη μουσική:

<https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug>

Θεωρίες του Πυθαγόρα για τη μουσική, τη γεωμετρία και τα μαθηματικά:

[http://www.historyofmusictheory.com/?page\\_id=20](http://www.historyofmusictheory.com/?page_id=20)

“An Exploration of the Relationship between Mathematics and Music” του Saloni Shah, 2010:

[http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/1/covered/MIMS\\_ep2010\\_103.pdf](http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/1/covered/MIMS_ep2010_103.pdf)

Πείραμα με το Πυθαγόρειο Κούρδισμα:

<https://www.youtube.com/watch?v=CKGsiGYzYxA>