DEL II: Musik & Matematik

ÅLDER: 16-18

UPPGIFT 25: BACH OCH DET MUSIKALISKA MÖBIUSBANDET

Sandgärdskolan

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Lärarguide

Titel: Bach och det musikaliska möbiusbandet

Ålder: 16-18 år

Längd: 2 timmar

Matematikinnehåll: Oändlighet, cirkelns omkrets, radie och diameter på cirkeln, tvådimensionellt och tredimensionellt.

Konstinnehåll: Två-dimensionell, tre-dimensionell, hantverk.

Allmänna mål: Detta är en bra uppgift för att låta elever skapa och samtidigt upptäcka klassisk konst.

Instruktioner: Ge eleverna möjlighet att utforska matte genom musik och hantverk genom att använda den praktiskt. Den här uppgiften är en bra grund för din klass att upptäcka olika matematiska koncept genom att faktiskt arbeta med sina händer.

Resurser: Den här uppgiften tillhandahåller bilder och videor som läraren kan använda i klassrummet. Ämnen som behandlas här kommer också att vara inspiration för att hitta andra material som kan vara relevanta för att anpassa variera lektioner.

Tips till läraren: Trots att det är många praktiska aktiviteter involverade, kom ihåg att vara exakt med matematiken.

Mål: I slutet av denna uppgift ska eleven kunna:

- Förstå oändlighet på ett förbättrat sätt.
- Utforska sin hantverkskompetens.

Sammanfattning och utvärdering:

Skriv 3 saker du gillar med denna resurs:	1. 2. 3.
Skriv 2 saker du lärt dig	1. 2.
Skriv en sak som behöver bli bättre	1.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inledning

Är Möbius-bandet återupptäckt av August Ferdinand Möbius eller var det Möbius som upptäckte det? Redan de gamla grekerna använde symbolen Möbius så noggrant studerat för att beteckna evighet och oändlighet. Möbius upptäckte å andra sidan bandets matematiska egenskaper, det vill säga att det har en sida och en kant.

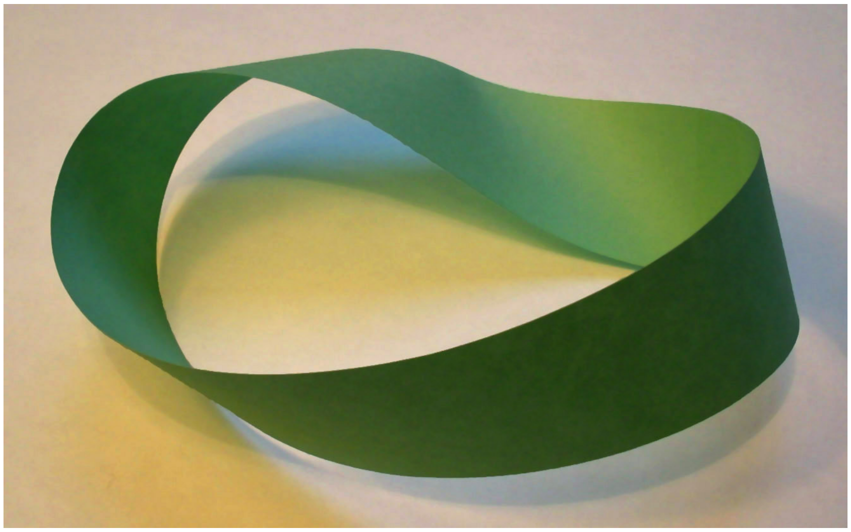

Bild 1 Möbius strip https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip.jpg

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Möbiusbandet

August Ferdinand Möbius, född 17 november 1790 i Schulpforta, död 26 september 1868 i Leipzig, var en tysk matematiker och astronom.

1816 blev Möbius extraordinär professor i astronomi och 1844 professor i högre mekanik och astronomi vid universitetet i Leipzig. Hans huvudsakliga forskningsarbete tillhör den rena matematiken, där han uppfann en ny geometrisk metod, den så kallade barycentriska beräkningen. Barycentriska beräkningar använder barycentriska koordinater.

Hans mest kända resultat är det så kallade Möbius-bandet, som är en icke-orienterbar yta som bara har en sida. Medan Möbius var helt upptagen med att tänka på hur detta band skulle kunna användas på olika sätt, samtidigt var en annan forskare som hette Listing inne på samma spår om en tvådimensionell remsa som bara har en sida och en kant. De två forskarna publicerade samtidigt artiklar om remsans funktioner och kom till samma resultat ungefär samtidigt men det var Möbius som till slut användes för att namnge remsan - och världen fick Möbiusbius-bandet.

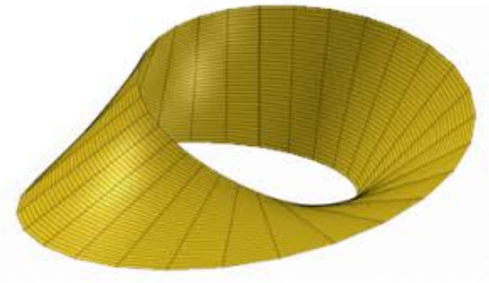

Bild 2: Möbiusbandet https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip_(plot).png

Möbiusbandet:

- är en lång rektangulär yta
- som roteras 180 grader med ändarna fast
- så att den längs sin nya väg har en sida och en kant.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

- Ytan är inte orienterbar och kommer tillbaka till samma punkt hela tiden men speglas eftersom den bara har en sida.

Inte bara Listing och Möbius fascinerades av den enkelsidiga remsan där ett streck kan målas på "alla" sidor utan att pennan lyftes. Än idag används Möbius-remsan i grafisk design eftersom den skapar en dynamisk och obegränsad bild. Inom science fiction-litteratur används Möbius-remsan som en beskrivning för ett möjligt universum.

Möbius-bandet är det matematiska objekt som används mest utanför matematikens värld. Om man jämför ett Möbius-band gjort av papper med en musikslinga, kommer du att se det som ett musikstycke som kan spelas igenom från början till slut och låta harmoniskt och melodiskt korrekt. Detta är detsamma som att ta sig runt ett Möbius-band en gång. Sedan, om du går igenom det en andra gång, men börjar i slutet av stycket, så att den sista tonen blir den första tonen i stycket, låter det ändå bra. Där har du Möbius-musik.

Bild 3: Recycle symbol **Bild 4:** Bracelet

Se ett musikaliskt Möbius-band här: https://www.youtube.com/watch?v=3x03nJnk-wk

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Numera används Möbius-band bland annat i transportbandet som finns i kassan vid mataffärer. Bandet som transporterar varorna vi köper är format som ett Möbius-band, eftersom detta minskar slitage och därmed ökar livslängden. I början av industrialismen användes Möbius-bandet som kraftöverföringen mellan ångmotorer och de maskiner som ångmotorerna använde (svarvar, trösklar, etc.)

Bild 5: Knitted scarf

Du kan skapa ditt eget Möbius-band genom att ta en rektangulär pappersremsa, vrida ena änden ett halvt varv och fästa ihop ändarna. Om du nu tänker dig att någon eller något, till exempel en myra, kryper längs remsan, kommer den att vara på andra sidan bandet när den kommit ett varv. Således har Möbius-bandet en enda sida.

Ordlista

Barycentriska koordinater: I astronomi är barycentriska koordinater icke-roterande koordinater med ursprung i barycentret för två eller flera kroppar.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Matematiken bakom Möbius-bandet

Ett Möbius-band kan liknas vid ett område i ett koordinatsystem. Den här delen av uppgiften visar hur detta område kan beräknas med integraler och funktioner.

Integraler och funktioner

Att beräkna integralen i en funktion motsvarar att beräkna området mellan diagrammet och x-axeln.

Vi börjar med ett exempel

Vi har följande funktion:

$f(x) = 2x + 4$

och är intresserade av att känna till arean för området som ligger mellan diagrammet och x-axeln, och som avgränsas av de vertikala linjerna x = 0 och x = 2.

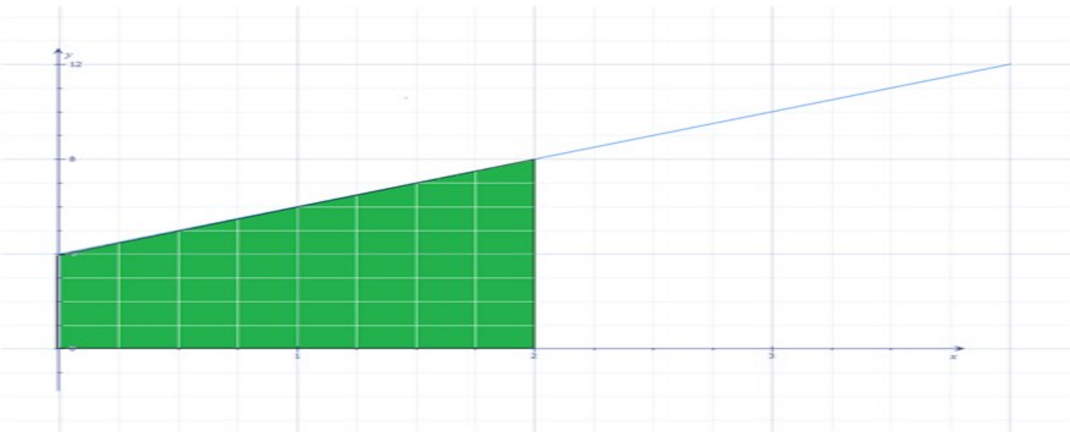

Bild 6: Koordinatsystem källa författaren

Det finns en allmän formel för att beräkna dessa typer av områden:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Till vänster i formeln har vi tecknet för integralen

$$\int$$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Talen a och b anger den nedre och övre gränsen för det område vi är intresserade av (i vårt exempel, a = 0 och b = 2). Till höger om integraltecknet med dess gränser kommer funktionen som utgör områdets övre gräns. Sist kommer dx, vilket indikerar att areaberäkningen måste göras med avseende på förändring i x-ledet.

Till höger visas differensen

$$\mathbf{F\,(b)\ - F\,(a)}$$

Detta är skillnaden mellan värdet på den primitiva funktionen F vid den övre gränsen (x = b) och den nedre gränsen (x = a).

Det är mycket nytt som kommer på en gång med denna formel, så det enklaste är att fortsätta med vårt exempel:

Så vi har den kända funktionen y (x) = 2x + 4 och vi känner till den nedre gränsen vid a = 0 och den övre gränsen vid b = 2. Således kan vi ställa in den vänstra delen av formeln, som i vår exempel ser ut så här (vi antar uttryckligen i det här fallet att integralen är ett område, A):

$$A = \int_0^2 (2x + 4)\,dx$$

Den högra delen av formeln inkluderar den primitiva funktionen F, som vi inte känner till ännu, så i nästa steg måste vi beräkna den, vilket vi gör baserat på reglerna vi kom med i föregående avsnitt. Vi får följande:

$$F(x) = x^2 + 4x + C$$

När man beräknar integralen skriver man uträkningen på följande sätt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Vilket I vårt exempel blir:

$$\int_0^2 (2x+4)dx = [x^2+4x]_0^2$$

Som du kanske har märkt i formeln ovan, ignorerade vi konstanten C när vi skrev in på höger sida. Anledningen till detta är att denna term kommer att försvinna eftersom den ingår i både F (b) och F (a). Vi inkluderar dock den konstanta termen i följande beräkning, så att du ser hur det försvinner:

$$A = \int_0^2 (2x+4)\,dx = [x^2+4x]_0^2 =$$

$$= (22 + 4 \cdot 2 + C) - (02 + 4 \cdot 0 + C) =$$

$$= 4 + 8 + C - C = 12a.e.$$

Alltså är den eftersökta arean 12 area-enheter

I exemplet ovan hade vi en funktion vars graf över hela intervallet var ovanför x-axeln. Således är hela området vi beräknar ytan ovanför x-axeln.

Vad händer med våra beräkningar om funktionen ska ha negativa värden i intervallet och det beräknade området i så fall ligger under x-axeln? Jo, då kommer integralberäkningar baserade på metoden vi använde ovan att leda till ett negativt resultat. Men ett område kan inte ha ett negativt värde, och därför måste vi ändra integralens tecken om området där arean skall beräknas är under x-axeln

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

UPPGIFT

Areaberäkning av begränsad yta

Beräkna arean på det område som avgränsas av grafen $\boldsymbol{Y = x^2 + 2x + 2}$ x-axeln och

a) Linjerna x = -1 and x = 1

b) Linjerna x = -2 and x = 0

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

LÄR DIG MER…

Myror som går på ett Möbius-band

https://www.youtube.com/watch?v=ZN4TxmWK0bE

Två lektioner om Möbius-band

https://www.youtube.com/watch?v=JNtKcK27x1s

https://www.youtube.com/watch?v=1xKiSSVY5bI

En kort science fiction med Möbius-band

https://www.youtube.com/watch?v=HD9MYY0aPug

En kort introduktion till linjeintegraler

https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions/line-integrals/v/introduction-to-the-line-integral

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.