PARTE II: Música e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 16 – 18

UNIDADE 25: BACH E O A FITA MUSICAL DE MOEBIUS

Sandgärdskolan

TheArtOf Maths

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guia do Professor

Título: Bach e a Fita Musical de Moebius

Faixa Etária: 16 – 18 anos

Duração: 2 horas

Conceitos Matemáticos: Infinito, circunferência de um círculo, raio e diâmetro de um círculo, bidimensional vs. tridimensional.

Conceitos Artísticos: bidimensional vs. tridimensional. Artesanato.

Objetivos Gerais: esta é uma ótima unidade para permitir que os alunos criem e, ao mesmo tempo, descubram uma imagem clássica da arte.

Instruções e Metodologias: permita aos alunos a possibilidade de explorar a matemática através da música e do artesanato, aplicando-a à prática. Esta unidade é uma boa base para a sua turma descobrir diferentes conceitos matemáticos trabalhando com as suas próprias mãos.

Recursos: esta unidade fornece fotos e vídeos para o professor usar na sala de aula. Os tópicos abordados nesses recursos também serão uma inspiração para encontrar outros materiais que possam ser relevantes para personalizar e dar nuances à aula.

Dicas para o professor: embora existam muitas atividades práticas envolvidas, lembre-se de ser exato acerca da matemática.

Resultados de aprendizagem e competências: no final desta unidade, o aluno será capaz de:

- Entender o infinito de uma maneira aprimorada.
- Explorar as suas habilidades de artesanato.

Síntese e Avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado acerca desta atividade:	1. 2. 3.
Indique 2 conceitos que tenha aprendido:	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar:	1.

Introdução

A fita Moebius é redescoberta por August Ferdinand Moebius ou foi Moebius quem a descobriu? Os gregos antigos já usavam o símbolo Moebius tão cuidadosamente estudado, para denotar eternidade e infinito. Moebius, por outro lado, descobriu as propriedades matemáticas da fita, ou seja, que tem um lado e uma aresta.

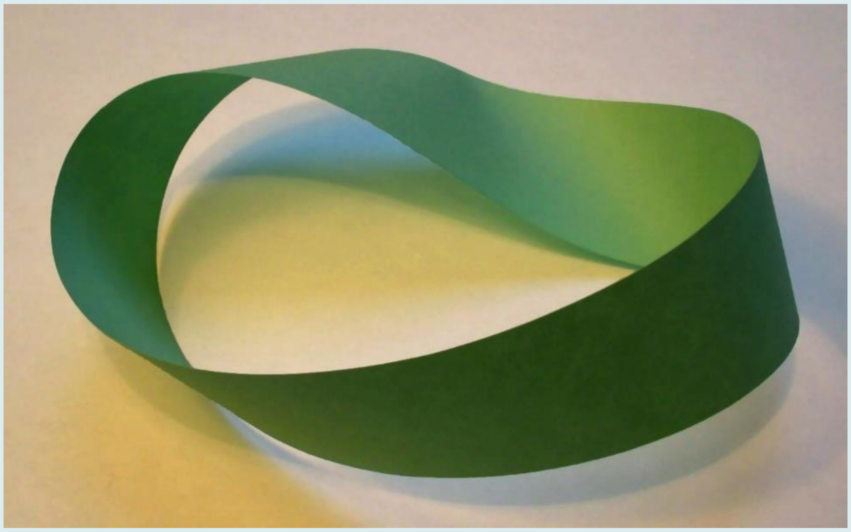

Figura 1: Tira de Moebius
(Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip.jpg)

A Fita de Moebius

Agosto Ferdinand Moebius, nascido em 17 de novembro de 1790 em Schulpforta, morreu em 26 de setembro de 1868 em Leipzig, era um matemático e astrónomo alemão.

Em 1816, Moebius tornou-se professor extraordinário de astronomia e, em 1844, professor de mecânica e astronomia superior na Universidade de Leipzig. O seu principal trabalho de pesquisa pertence à matemática pura, onde inventou um novo método geométrico, o chamado cálculo baricêntrico. Os cálculos baricêntricos usam coordenadas baricêntricas.

O seu resultado mais famoso é a chamada fita de Moebius, que é uma superfície não orientável que tem apenas um lado. Enquanto Moebius estava totalmente empenhado em pensar no modo como essa fita poderia ser usada de maneiras diferentes, simultaneamente, outro pesquisador, chamado Listing estava nos mesmos caminhos de uma fita bidimensional que só tem um lado e uma aresta. Os dois cientistas publicaram simultaneamente artigos sobre as funções da fita e chegaram ao mesmo resultado aproximadamente ao mesmo tempo, mas foi o nome Moebius que foi finalmente usado para nomear a fita - e o mundo agora tinha a fita Moebius.
A fita de Moebius:

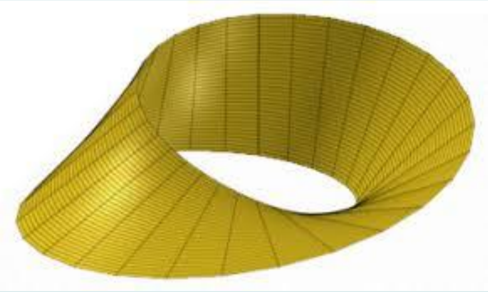

Figura 2: A fita de Moebius
(Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip_(plot).png)

- é uma superfície retangular longa
- que é girado 180 graus com as extremidades sobrepostas
- para que, ao longo de seu novo caminho, tenha um lado e uma aresta.

• a superfície não é orientável e volta ao mesmo ponto constantemente, mas espelhada, uma vez que possui apenas um lado.

Não foram apenas Listing e Moebius que ficaram fascinados com a fita de um lado, onde um traço pode ser pintado em "todas" as páginas sem que a caneta seja levantada. Ainda hoje, a fita Moebius é usada em design gráfico, pois cria uma imagem dinâmica e ilimitada. Na literatura de ficção científica, a fita de Moebius é usada como descrição para um universo possível.

A fita de Moebius é o objeto matemático mais usado fora do mundo da matemática. Comparando a fita Moebius feita de papel com um loop de música, aprenderá que uma música que pode ser tocada do começo ao fim soando harmonicamente e melodicamente correta (basicamente, soando bem) é a mesma coisa que percorrera fita de Moebius uma vez. Então, se passar uma segunda vez, ainda assim começa no final da peça, para que a última nota se torne a primeira nota da peça, e, ainda assim, pareça agradável, obtendo a música de Moebius. Para descobrir isso sozinho, imprima as anotações, recorte-as e cole-as nas fitas de Moebius.

Dê uma olhadela numa fita musical de Moebius:

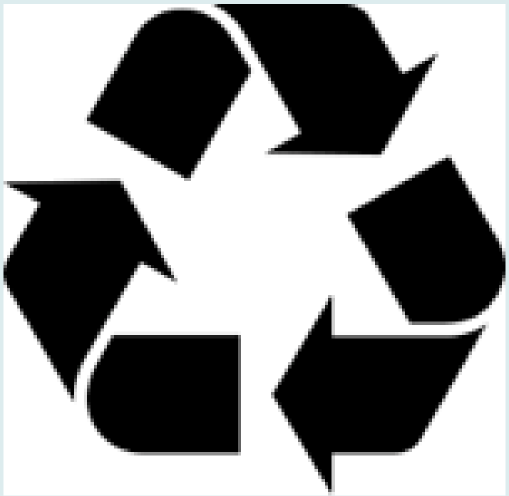

Figura 4: Símbolo de Reciclagem
(Fonte: https://creazilla.com/nodes/46010-recycling-symbol-emoji-clipart)

Figura 3: Bracelete
(Fonte:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6biusWeddingBand.JPG)

O uso atual das fitas Moebius inclui, entre outras coisas, a correia transportadora encontrada na fila de caixas num supermercado. A fita real que transporta os produtos que compramos tem o formato de uma fita de Moebius, pois desse modo reduz o desgaste e, consequentemente, aumenta a vida útil. Durante o período inicial de industrialização, a fita Moebius foi usada como o elo entre os motores a vapor e as máquinas que os motores a vapor usavam (tornos, debulhadores, etc.)

Figura 5: Cachecol tricotado
(Fonte: https://www.flickr.com/photos/smittenkittenoriginals/5080610523/)

Para fazer a sua fita de Moebius precisa de uma fita de papel em formato retangular. Depois, torça uma extremidade em meia volta e cole as pontas. Se considera que alguém, digamos uma formiga, caminha ao longo da fita, quando ela for a meio do percurso, estará do outro lado da fita. A fita Moebius tem, assim, um único lado. Moebius descobriu a fita enquanto observava as triangulações do avião.

Glossário

Coordenadas baricêntricas: em astronomia, as coordenadas baricêntricas são coordenadas não rotativas com a origem no baricentro de dois ou mais corpos.

A Matemática por trás da fita de Moebius

Uma fita de Moebius pode ser semelhante a uma área num sistema de coordenadas. Esta parte da ferramenta mostrará como essa área pode ser calculada usando integrais e funções.

Integrais e funções

Ao calcular o integral de uma função, é equivalente a calcular a área entre o gráfico e o eixo das abcissas.

Vamos começar com um exemplo.

Temos a seguinte função:

$$\boldsymbol{f(x) = 2x + 4}$$

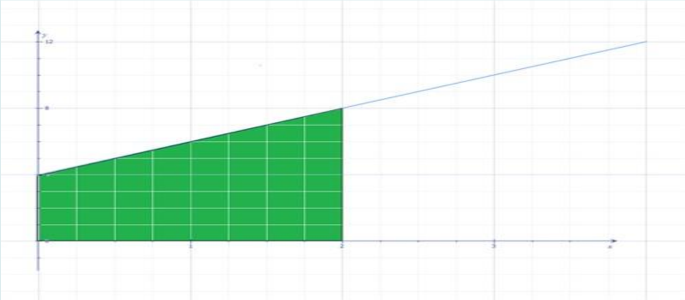

Figura 6: Sistema de coordenadas
(Fonte: autor)

Considere que está interessado em conhecer a área da área que fica entre o gráfico e o eixo das abcissas, e que é delimitada pelas linhas verticais $\boldsymbol{x} = 0$ e $\boldsymbol{x} = 2$.

Existe uma fórmula geral para calcular esses tipos de áreas:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Em primeiro lugar, à esquerda, temos o sinal integral: $\int$

Os números $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ indicam o limite inferior e superior da área em que estamos interessados (no nosso exemplo, a = 0 e b = 2). À direita do sinal integral vem a função, com seus limites, que constitui o limite superior da área. Na parte final à esquerda, vem d $\boldsymbol{x}$, que indica que o cálculo da área deve ser feito com relação à alteração no $\boldsymbol{x}$.

No canto direito, a diferença é indicada: $\boldsymbol{F(b) - F(a)}$

Esta é a diferença entre o valor da função primitiva F no limite superior (x = b) e o limite inferior (x = a).
É muito conteúdo novo que vem com esta fórmula de uma só vez; portanto, a coisa mais simples é continuar com o nosso exemplo:

Assim, temos a função conhecida $\boldsymbol{y(x) = 2x + 4}$ e sabemos o limite inferior é a = 0 e o limite superior é b = 2. Assim, podemos caracterizar a parte esquerda da fórmula, que no nosso exemplo se parece com o que segue (assumimos explicitamente, neste caso, que a integral é uma área, A):

$$A = \int_0^2 (2x + 4)dx$$

A parte direita da fórmula inclui a função primitiva F, que ainda não conhecemos; portanto, na próxima etapa, temos que calculá-la, o que fazemos com base nas regras criadas na seção anterior. Temos o seguinte:

$$F(x) = x^2 + 4x + C$$

Ao calcular a integral, geralmente escreve-se o cálculo da seguinte maneira:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

que no nosso exemplo torna-se

$$\int_0^2 (2x + 4)dx = [x^2 + 4x]_0^2$$

Como deve ter notado na fórmula acima, ignoramos o termo constante C ao escrever o lado direito. A razão para isso é que esse termo desaparecerá, pois está incluído em F (b) e F (a). No entanto, incluímos o termo constante no seguinte cálculo, para que veja como ele desaparece:

A = $\int_0^2 (2x+4)\,dx = [x^2+4x]_0^2 =$

$= (2^2+4\times 2+C)-(0^2+4\times 0+C)=$

$= 4 + 8 + C - C = 12\ u.a.$

Assim, a área pedida é de 12 unidades de área.

No exemplo acima, tivemos uma função cujo gráfico ao longo de todo o intervalo estava acima do eixo das abcissas. Assim, toda a área em que calcularíamos a área está acima do eixo das abcissas.

O que acontece com os cálculos se a função tiver valores negativos no intervalo e a área calculada nesse caso estiver abaixo do eixo das abcissas? Bem, nesse caso os cálculos de integração baseados no método que usamos acima levarão a um resultado negativo. Mas, uma área não pode ter um valor negativo, e é por isso que precisamos mudar o sinal da integral no caso da área a calcular estar abaixo do eixo das abcissas.

TAREFA

Calcule a área da área delimitada pela curva $y = x^2 + 2x + 2$, o eixo das abcissas e:

a) as retas x = -1 e x = 1

b) as retas x = -2 e x = 0.

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Formigas a caminhar numa fita de Moebius

https://www.youtube.com/watch?v=ZN4TxmWK0bE

Aulas sobre a fita de Moebius:

https://www.youtube.com/watch?v=JNtKcK27x1s

https://www.youtube.com/watch?v=1xKiSSVY5bI

Um pequeno filme de ficção científica que aborda o tema da fita de Moebius:

https://www.youtube.com/watch?v=HD9MYY0aPug

"Isto é Matemática" T06 E07 – A Fita de Moebius:

https://www.youtube.com/watch?v=aZZ_d-FF0Bc

Uma breve introdução à integral de linha

https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions/line-integrals/v/introduction-to-the-line-integral