ΜΕΡΟΣ V: ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16-18

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 49: ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ ΣΤΗΝ «Η ΑΛΙΚΗ ΣΤΗ ΧΩΡΑ ΤΩΝ ΘΑΥΜΑΤΩΝ» ΤΟΥ ΛΙΟΥΙΣ ΚΑΡΟΛ

LogoPsyCom

TheArtOf Maths

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Μαθηματικά στο παραμύθι «Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων» του Λιούις Κάρολ (1865)

Ηλικιακό Εύρος: 16-18 χρονών

Διάρκεια: 3 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Ευκλειδεία και μη-Ευκλείδεια γεωμετρία, κωνικές τομές.

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Λογοτεχνική ανάλυση, το μυθιστόρημα, μεταφορές.

Γενικοί Σκοποί: Οι μαθητές να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται στο βιβλίο και να μάθουν πώς να αναπτύσσουν τον μαθηματικό συλλογισμό στην καθημερινή ζωή.

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Οι μαθητές θα εξερευνήσουν τα μαθηματικά μέσω της λογοτεχνίας, εφαρμόζοντάς τα στην πραγματική ζωή και διαβάζοντας τα αποσπάσματα. Οι μαθητές σας θα ανακαλύψουν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες για να μάθουν τις κωνικές τομές.

Πηγές: Αυτό το εργαλείο παρέχει εικόνες και βίντεο. Τα θέματα που αναφέρονται σε αυτές τις πηγές θα σας βοηθήσουν να βρείτε άλλα υλικά για να εξατομικεύσετε και να δώσετε μια άλλη διάσταση στο μάθημά σας.

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Η μάθηση μέσα από την πράξη είναι πολύ αποτελεσματική, ειδικά για νεαρούς μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Πάντα να εξηγείτε την πρακτική χρήση κάθε μαθηματικής έννοιας.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες: Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- κατανοεί τη διαφορά ανάμεσα στην Ευκλείδεια και μη-Ευκλείδεια γεωμετρία·
- κατανοεί τι είναι οι κωνικές τομές·
- χρησιμοποιεί μια δευτεροβάθμια εξίσωση για να σχεδιάσει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Εισαγωγή

Η ανάγνωση μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τον κόσμο γύρω μας με τρόπο που δεν περιμέναμε. Επομένως, τα βιβλία αποτελούν πολύτιμους πόρους για τους μαθητές για να διερευνήσουν νέα θέματα και ιδέες που κρύβονται μέσα στην ιστορία. Μερικοί από τους συγγραφείς χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στις ιστορίες τους, στα οποία οι μαθητές συχνά δεν εστιάζουν παρόλο που είναι πιο πιθανό να καταλάβουν με βάση αυτά ένα θέμα που έχουν ήδη διαβάσει.

Βλέποντας τους χαρακτήρες να συλλογίζονται τα μαθηματικά προβλήματα και τις έννοιες, ο αναγνώστης θέλει να κατανοήσει αυτές τις έννοιες και να λύσει αυτά τα προβλήματα μαζί τους, όπως προσπαθεί συχνά να μαντέψει το τέλος μιας ιστορίας. Εδώ, θα μάθει νέα πράγματα ακολουθώντας τους χαρακτήρες στις περιπέτειες τους.

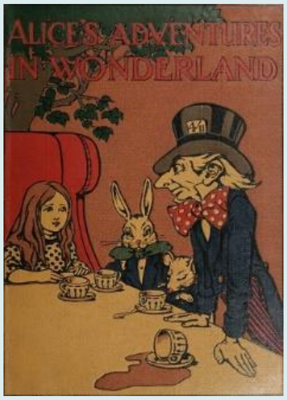
Ως εκ τούτου, διδάσκοντας τους μαθητές τα μαθηματικά που κρύβονται πίσω από μερικά γνωστά βιβλία μπορεί να αποτελέσει μια μεγάλη προστιθέμενη αξία στο μάθημα των μαθηματικών, δίνοντας στους μαθητές μια πιο εμβυθιστική εμπειρία των πιθανών χρήσεων των μαθηματικών.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

«Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων»

του Λιούις Κάρολ

1. Σύνοψη



Αυτό το μυθιστόρημα που έγραψε ο Λιούις Κάρολ το 1865 διηγείται την ιστορία ενός επτάχρονου κοριτσιού, της Αλίκης, που πέφτει σε ένα λαγούμι κουνελιών και καταλήγει στη χώρα των θαυμάτων, ένα φανταστικό μέρος με περίεργους ανθρώπους και ζώα που μιλάνε. Πηγαίνει από τόπο σε τόπο, αλλάζει μέγεθος και μορφή και ζει απροσδόκητες περιπέτειες. Ίσως να είστε πιο εξοικειωμένοι με την ταινία κινουμένων σχεδίων της Disney.

Εικόνα 1: Εξώφυλλο του βιβλίου «Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων»

2. Το γενικό πλαίσιο

Πριν εμβαθύνουμε στην ιστορία, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το πλαίσιο μέσα στο οποίο γράφτηκε. Το όνομα του συγγραφέα ήταν Τσαρλς Λούτγουϊτζ Ντότζσον (χρησιμοποίησε το Λιούις Κάρολ ως ψευδώνυμο). Ήταν δάσκαλος μαθηματικών στο Christ Church College της Οξφόρδης και ήταν ένας πολύ συντηρητικός μαθηματικός. Στήριξε όλες τις μαθηματικές γνώσεις του στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα, τα μαθηματικά άλλαζαν και αυξάνονταν οι νέες θεωρίες. Για παράδειγμα, η αφηρημένη άλγεβρα και οι «φανταστικοί αριθμοί» εμφανίστηκαν εκείνη την εποχή. Προκειμένου να δείξει τον παραλογισμό αυτών των νέων μαθηματικών, χρησιμοποίησε μεταφορές σε όλη την ιστορία της Αλίκης.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

3.Η σκηνή με την Κάμπια

Σε αυτή τη σκηνή, η Αλίκη έχει αλλάξει το μέγεθος αρκετές φορές τρώγοντας μαγικά μανιτάρια. Συναντά μια κάμπια που καπνίζει έναν ναργιλέ. Η λέξη «άλγεβρα» προέρχεται από την αραβική φράση "al jebr e al mokabala" που σημαίνει «αποκατάσταση και μείωση». Αυτό ακριβώς κάνει η Αλίκη όταν τρώει ένα μανιτάρι, ελπίζοντας να επανέλθει στο αρχικό της μέγεθος, και καταλήγει να συρρικνώνεται από σχεδόν 3 μ. σε 8 εκ. Αυτή η σκηνή ορίζει τον τόνο για τις επόμενες περιπέτειες, καθώς η Αλίκη θα χρειαστεί να φάει την ακριβή ποσότητα μανιταριού που είναι απαραίτητη για να βρει την ισορροπία και να κρατήσει το μέγεθος και τις αναλογίες του σώματός της.

4. Η σκηνή με το Γουρούνι και το Πιπέρι

Σε αυτή τη σκηνή, η Αλίκη είναι στην κουζίνα της Δούκισσας και όλοι αρχίζουν να φτερνίζονται λόγω της μαγείρισσας που προσθέτει πάρα πολύ πιπέρι στο φαγητό. Η Δούκισσα δίνει το μωρό της στην Αλίκη. Το μωρό στη συνέχεια μετατρέπεται αργά σε γουρούνι, το οποίο η Αλίκη συνειδητοποιεί μόνο όταν ακούει το μωρό να γρυλίζει αντί να φτερνίζεται. Αυτή η σκηνή δείχνει τον παραλογισμό της προβολικής γεωμετρίας, που μελετά αν οι ιδιότητες ενός σχήματος μπορούν να παραμείνουν ίδιες όταν προβάλλεται σε άλλη επιφάνεια, υπό την προϋπόθεση ότι διατηρεί τις βασικές του ιδιότητες. Ο συγγραφέας χρησιμοποιεί μια Ευκλείδεια τεχνική που ονομάζεται «reductio ad absurdum» λέγοντας ότι «αν ο κανόνας ισχύει για ένα τρίγωνο, θα πρέπει να ισχύει και για ένα μωρό. QED». Το μωρό διατηρεί μερικές από τις βασικές ιδιότητές του, είναι ακόμα ροζ και λαμπερό, γι 'αυτό και η Αλίκη αντιλαμβάνεται μόνο τη μεταμόρφωση όταν γρυλίζει.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ:

Η Δούκισσα καθόταν στη μέση πάνω σε ένα τρίποδο σκαμνί, κρατώντας στην αγκαλιά της ένα μωρό. Η μαγείρισσα, σκυμμένη πάνω απ’ τη φωτιά, ανακάτευε ένα μεγάλο καζάνι που φαινόταν να είναι γεμάτο με σούπα.

- Σίγουρα έχει πάρα πολύ πιπέρι σ’ αυτή τη σούπα!” είπε μονολογώντας η Αλίκη, όσο το φτέρνισμα της το επέτρεπε.

Και είχε σίγουρα πάρα πολύ από δαύτο στον αέρα. Ακόμη και η Δούκισσα φτερνιζόταν πότε πότε· όσο για το μωρό, αυτό φτερνιζόταν και τσίριζε διαδοχικά χωρίς να σταματά στιγμή. Τα μόνα δύο πλάσματα στην κουζίνα, που δεν φτερνίζονταν, ήταν ο μαγείρισσα και μια μεγάλη γάτα που ήταν ξαπλωμένη μπροστά στο τζάκι μ' ένα χαμόγελο που έφτανε ως τα αφτιά της.

-Σας παρακαλώ, μήπως θα μπορούσατε να μου πείτε», είπε κάπως δειλά η Αλίκη - επειδή δεν ήταν και πολύ σίγουρη- αν ήταν ευγενικό να μιλήσει αυτή πρώτη, γιατί χαμογελάει έτσι η γάτα σας;»

-Είναι μια γάτα του Τσέσαϊρ, είπε η Δούκισσα, γι' αυτό το λόγο. Γουρούνι!

Την τελευταία λέξη την είπε τόσο απότομα και άγρια, που η Αλίκη αναπήδησε· αλλά κατάλαβε αμέσως πώς απευθυνόταν στο μωρό κι όχι σ' εκείνη [...]

Κι αμέσως άρχισε να κουνάει πάλι το μωρό, τραγουδώντας του κάτι σαν νανούρισμα και δίνοντάς του ένα βίαιο ταρακούνημα στο τέλος κάθε γραμμής:

«Μίλα άγρια στο παιδί σου,
και χτύπα το σαν φτερνιστεί,
το κάνει για να σ'εκνευρίσει,
γιατί το ξέρει, σε ενοχλεί.»
ΧΟΡΩΔΙΑ.
(Στην οποία συμμετέχουν η μαγείρισσα και το μωρό):
'Ουά! Ουά! Ουά!' [...]

-Έλα! Μπορείς να το κρατήσεις λίγο, αν θέλεις; είπε η Δούκισσα στην Αλίκη και καθώς μιλούσε της πέταξε το μωρό.

-Πρέπει να πάω και να ετοιμαστώ για το κροκέτ της βασίλισσας, είπε και βγήκε βιαστικά από το δωμάτιο.

Την ώρα που έφευγε, της πέταξε η μαγείρισσα ένα τηγάνι, που παρά τρίχα να την πετύχει.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Η Αλίκη έπιασε με κάποια δυσκολία το μωρό, που ήταν ένα πλασματάκι με λίγο περίεργο σχήμα και είχε τεντωμένα τα χέρια και τα πόδια του προς όλες τις κατευθύνσεις «ακριβώς όπως ένας αστερίας», σκέφτηκε η Αλίκη. Όταν το πήρε στα χέρια της, ρουθούνιζε το καημενάκι σαν ατμομηχανή και δε σταματούσε να διπλώνεται και να τεντώνεται συνέχεια, έτσι που για ένα δύο λεπτά, το μόνο που μπορούσε να κάνει η Αλίκη ήταν να το κρατάει σφιχτά για να μην της πέσει. [...]

«Αν δεν πάρω αυτό το μωρό από εδώ μέσα», σκέφτηκε η Αλίκη, «αυτές σε μια δυο μέρες θα το ξεκάνουν. Δεν θα ήταν έγκλημα να τ' αφήσω εδώ;»
Τα τελευταία λόγια τα είπε δυνατά και το μωρό απάντησε μ' ένα γρύλισμα (τώρα πια είχε σταματήσει να φτερνίζεται).
-Μη γρυλίζεις, είπε η Αλίκη, αυτός δεν είναι καθόλου σωστός τρόπος για να εκφράζεσαι.
Το μωρό ξαναγρύλισε και η Αλίκη κοίταξε ανήσυχα το πρόσωπό του για να δει τι έχει. Δεν υπήρχε καμία αμφιβολία πως η μύτη του παραήταν ανασηκωμένη και πεταχτή και έμοιαζε περισσότερο με μουσούδα παρά με κανονική μύτη· τα μάτια του ήταν επίσης πολύ μικρά για ένα μωρό· σε γενικές γραμμές δεν άρεσε καθόλου Αλίκη αυτό που έβλεπε. «Ίσως να είναι μόνο από το κλάμα», σκέφτηκε, και ξανακοίταξε τα μάτια του, για να δει μήπως είχαν δάκρυα.
Όχι, δάκρυα δεν υπήρχαν.
-Αν έχεις σκοπό να γίνεις γουρούνι, χρυσό μου, είπε σοβαρά η Αλίκη, δεν θα έχω καμιά σχέση μαζί σου. Να το ξέρεις!
Το δύστυχο μικρό άφησε πάλι έναν λυγμό (ή γρύλισμα; Ήταν αδύνατο να πεις τι ακριβώς ήταν) και συνέχισαν να περπατούν για λίγο ακόμα σιωπηλά.
(Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων, Μετάφραση: Γιώργος Δεπάστας, Εκδόσεις: Μίνωας)

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

5. Η σκηνή με το Πάρτυ τσαγιού

Το πάρτυ τσαγιού στου Τρελοκαπελά προσπαθεί να παρουσιάσει το παραλογισμό στα έργα του μαθηματικού Γουίλιαμ Ρόουαν Χάμιλτον, στα οποία πειραματίστηκε με τετραδόνια, που πρόκειται για ένα σύστημα αριθμών με βάση τέσσερις όρους. Οι τρεις πρώτοι όροι είναι οι τρεις διαστάσεις και ο τέταρτος είναι μια έξτρα χωρική μονάδα, η έννοια του Χρόνου.

Ο τίτλος αυτού του κεφαλαίου «Πάρτυ τσαγιού» που μπορεί να διαβαστεί ως «τ-πάρτυ», δεδομένου ότι το λατινικό «t» συμβολίζει τον χρόνο στα μαθηματικά. Οι τρεις καλεσμένοι του πάρτυ, ο Τρελοκαπελάς, ο Τυφλοπόντικας και ο Μαρτιάτικος Λαγός αντιπροσωπεύουν τους τρεις αρχικούς όρους. Ο χρόνος παραμένει ο τέταρτος και ο Τρελοκαπελάς λέει ότι είχαν μια διαμάχη και τώρα ο χρόνος δεν θα πραγματοποιήσει αυτό που του ζητάει. Ως αποτέλεσμα, και οι τρεις καλεσμένοι αναγκάζονται τώρα να γυρίζουν γύρω από το τραπέζι για μια αιωνιότητα. Το αίνιγμα του Τρελοκαπελά «Γιατί μοιάζει ένα κοράκι με γραφείο;» δεν έχει νόημα, το οποίο μπορεί επίσης να αντικατοπτρίζει την ιδέα του Χάμιλτον για τον καθαρό χρόνο, η αιτία και το αποτέλεσμά του δεν συνδέονται πλέον. Ο συγγραφέας χρησιμοποίησε τη δημιουργικότητά του για να αποδείξει τον παραλογισμό των νέων μαθηματικών θεωριών, που δημιούργησαν έναν παράλογο κόσμο.

Για να μάθετε περισσότερα για την ιστορία του Χρόνου, μπορείτε να παρακολουθήσετε το βίντεο TED-Ed: https://www.youtube.com/watch?v=R3tbVHlsKhs.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Γλωσσάρι

Ψευδώνυμο: ένα ψευδές όνομα που χρησιμοποιείται από έναν καλλιτέχνη, συγγραφέα κλπ. για να υπογράψει τη δουλειά του.

Ευκλείδης (4ος – 3ος αιώνας π.Χ.): ένας Έλληνας μαθηματικός από την Αρχαιότητα που έθεσε τις βάσεις της γεωμετρίας.

Αφηρημένη άλγεβρα: ένας κλάδος της άλγεβρας που μελετά τις αλγεβρικές δομές.

Φανταστικοί αριθμοί: είναι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν ως πραγματικοί αριθμοί πολλαπλασιασμένοι με τη φανταστική μονάδα i, για την οποία γνωρίζουμε ότι $\boldsymbol{i} = -\mathbf{1}$. Για παράδειγμα, αi = - α^2. Σε αυτή τη θεωρία, το μηδέν είναι τόσο φανταστικό όσο και πραγματικό.

Μεταφορά: είναι ένα σχήμα λόγου που μας επιτρέπει να αναφερθούμε σε κάτι έμμεσα αναφέροντας κάτι διαφορετικό αλλά δείχνοντας την ομοιότητα που θέλουμε να τονίσουμε.
Π.χ.: ψαρεύω για κομπλιμέντα: το άτομο δεν ψαρεύει κυριολεκτικά, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την εικόνα ως μεταφορά.

Ναργιλές: μια ανατολίτικη πίπα καπνίσματος που έχει ένα μακρύ σωλήνα που αντλεί καπνό από ένα μπολ γεμάτο με νερό.

Reductio ad absurdum (λατινικά): σημαίνει «Εις άτοπον απαγωγή» και είναι ένα επιχείρημα που χρησιμοποιείται στη λογική για να δείξει ότι μια δήλωση είναι παράλογη και δεν μπορεί να ληφθεί σοβαρά υπόψη.

QED (λατινικά): «Quod erat demonstrandum» σημαίνει «Όπερ έδει δείξαι» και χρησιμοποιείται συχνά στο τέλος των μαθηματικών ή φιλοσοφικών δείξεων.

Τετραδόνια: είναι ένα σύστημα αριθμών που επεκτείνει τους μιγαδικούς αριθμούς. Ένα από τα χαρακτηριστικά τους είναι ότι ο πολλαπλασιασμός δύο τετραδονίων δεν είναι μεταθετικός.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Τα μαθηματικά πίσω από το λογοτεχνικό έργο «Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων»

Πρόκειται να μάθετε για τις Ευκλείδειες και μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, οι οποίες θα σας επιτρέψουν να καταλάβετε με τι συμφώνησε ο συγγραφέας και τι βρήκε εντελώς παράλογο.

Ευκλείδειες και μη ευκλείδειες γεωμετρίες

1. Ευκλείδεια γεωμετρία

Η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι αυτή για την οποία μαθαίνουμε τα περισσότερα. Ο Ευκλείδης ήταν ο «πατέρας της γεωμετρίας» και έγραψε τα αξιώματα, τους ορισμούς και τις κοινές έννοιες στα βιβλία του «Στοιχεία». Το πέμπτο αξίωμα προκάλεσε κάποιες σκέψεις ανάμεσα σε άλλους γνωστούς μαθηματικούς σε όλη την ιστορία. Ο Ευκλείδης στήριξε τη γεωμετρία του σε απόσταση και γωνίες, που δεν θα μας απασχολήσουν στις ακόλουθες μελέτες στη γεωμετρία.

Παρακολουθήστε το παρακάτω βίντεο TED-Ed σχετικά με την Ευκλείδεια και τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία: https://www.youtube.com/watch?v=LPET_HhN0VM

2. Μη Ευκλείδεια προβολική γεωμετρία:

Η προβολική γεωμετρία χρησιμοποιείται στις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες όπως η ελλειπτική και η υπερβολική γεωμετρία. Εστιάζει στην προβολή σχημάτων σε άλλες επιφάνειες και δηλώνει ότι **ένα σχήμα μπορεί να κάμψει ή να επεκταθεί σε ένα άλλο εάν διατηρεί τις βασικές του ιδιότητες**. Υποθέτει ότι το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη είναι λάθος.

Η καμπυλότητα της επιφάνειας πάνω στην οποία προβάλλονται τα σχήματα είναι ένα μεγάλο μέρος που διαφοροποιεί τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες από την Ευκλείδεια γεωμετρία.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Η προοπτική, για παράδειγμα, είναι ένα από τα αποτελέσματα αυτού του συλλογισμού. Οι μαθηματικοί μελέτησαν τις ιδιότητες των προβαλλόμενων σχημάτων για να δουν αν παρέμειναν οι ίδιες με την προοπτική.

Παράδειγμα δύο παράλληλων γραμμών:

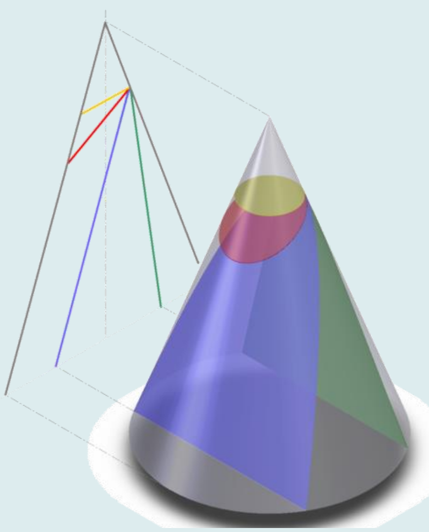
Εικόνα 2: Εικόνα ενός δρόμου από την οπτική του θεατή

Σύμφωνα με την Ευκλείδεια γεωμετρία, δύο παράλληλες γραμμές δεν πρέπει ποτέ να συναντηθούν αλλά κατά την προοπτική ή την προβολή σε άλλη επιφάνεια, οι γραμμές αυτές φαίνεται να συναντώνται στον ορίζοντα, σε κάποιο σημείο στο **άπειρο**. Με την έννοια του άπειρου, είμαστε αντιμέτωποι με μια γεωμετρία που δεν λαμβάνει υπόψη τις γωνίες και τις αποστάσεις των σχημάτων.

Κωνικές τομές

Όταν κόβετε ένα κώνο με επίπεδα σε διάφορα μέρη, θα προκύψει ένα διαφορετικό σχήμα.

Ας ρίξουμε μια ματιά στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 3: Αναπαράσταση μιας κωνικής τομής

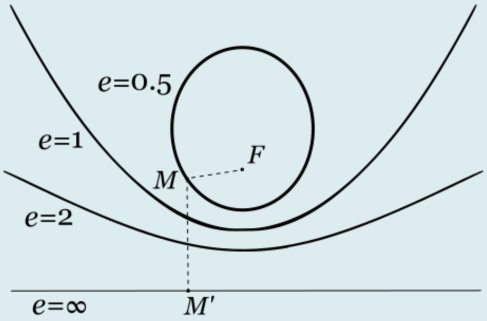
Όπως μπορείτε να δείτε, καθώς κόβουμε τον κώνο με επίπεδο θα προκύψουν διαφορετικά σχήματα.

- Με **Κίτρινο**: τον κόβουμε κατευθείαν οριζόντια και καταλήγουμε με έναν **κύκλο.**
- Με **Κόκκινο**: τον κόβουμε πλαγίως ως προς τον άξονά του και έχουμε μια **έλλειψη**.
- Με **Μπλε**: τον κόβουμε παράλληλα προς μια γενέτειρα αυτού και παίρνουμε μια **παραβολή**.
- Με **Πράσινο:** τον κόβουμε παράλληλα προς τον άξονα του χωρίς να διερχόμαστε από την κορυφή και παίρνουμε μια **υπερβολή.**

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Μπορείτε επίσης να χρησιμοποιήσετε ένα σημείο (εστία) και μια ευθεία γραμμή (διευθετούσα) για να ορίσετε αυτές τις καμπύλες:

Μετρήστε την απόσταση:



Εικόνα 4 «Εκκεντρότητα» από Seahen (CC BY-SA 3.0)

- από την εστία (F) προς ένα σημείο πάνω στην καμπύλη (M)
- κάθετα από τη διευθετούσα (M') προς εκείνο το σημείο όπου ακτίνα ανάμεσα στις δύο αποστάσεις θα παραμείνει το ίδιο.
- Για κύκλο, η **ακτίνα = 0**
- Για έλλειψη, **0 < ακτίνα < 1**
- Για παραβολή, η **ακτίνα = 1** (ίδιες αποστάσεις)
- Για υπερβολή, η **ακτίνα > 1**

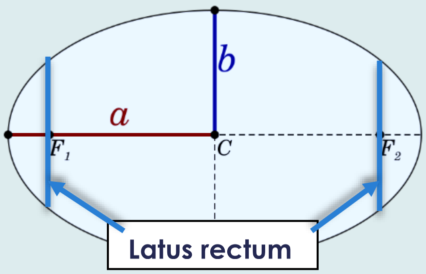
Η ακτίνα ονομάζεται **εκκεντρότητα**, που σημαίνει:

«όλα τα σημεία των οποίων η απόσταση από την εστία είναι ίση με την εκκεντρότητα επί την απόσταση από τη διευθετούσα[1]»

[1] https://www.mathsisfun.com/geometry/conic-sections.html

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Η **Latus Rectum** (παράμετρος) είναι μια γραμμή που περνάει από την εστία και είναι παράλληλη στη διευθετούσα.



- Είναι 4 φορές όσο η εστιακή απόσταση στις παραβολές
- Είναι η διάμετρος των κύκλων
- Είναι το $\frac{2b^2}{a}$ σε μια έλλειψη όπου a και b είναι το μισό της **μέγιστης (a)** και της **μικρής (b) διαμέτρου**.

Ας θυμηθούμε κάποιες εξισώσεις για κάθε μία από αυτές τις καμπύλες:

1. Η Έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Ο Κύκλος (όπου a = b)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ και έτσι, $x^2 + y^2 = a^2$

Προσοχή: ο κύκλος είναι μια έλλειψη με ίσες διαμέτρους.

3. Η Υπερβολή

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4. Η Παραβολή

$y^2 = 4ax$ με a > 0

Στη συνέχεια, μπορούμε να βρούμε έναν γενικό τύπο για όλους δεδομένου ότι, ακόμα και εάν αυτές οι καμπύλες έχουν αποκοπεί από ένα στερεό, τώρα ανήκουν στην επιπεδομετρία και οι καρτεσιανές συντεταγμένες τους μπορούν να βρεθούν.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Ωστόσο, δεδομένου ότι είναι κυρτές και δεν έχουν ευθείες γραμμές, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τα x και y σε αυτή την εξίσωση.

Θα χρησιμοποιήσουμε έτσι:

- x και y
- x^2 και y^2
- xy
- μια σταθερά
- έναν παράγοντα για το καθένα

Οι γραφικές παραστάσεις των δευτεροβάθμιων εξισώσεων με δύο μεταβλητές αναπαριστούν πάντα μια κωνική τομή.

Εδώ είναι η γενική εξίσωσή τους:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

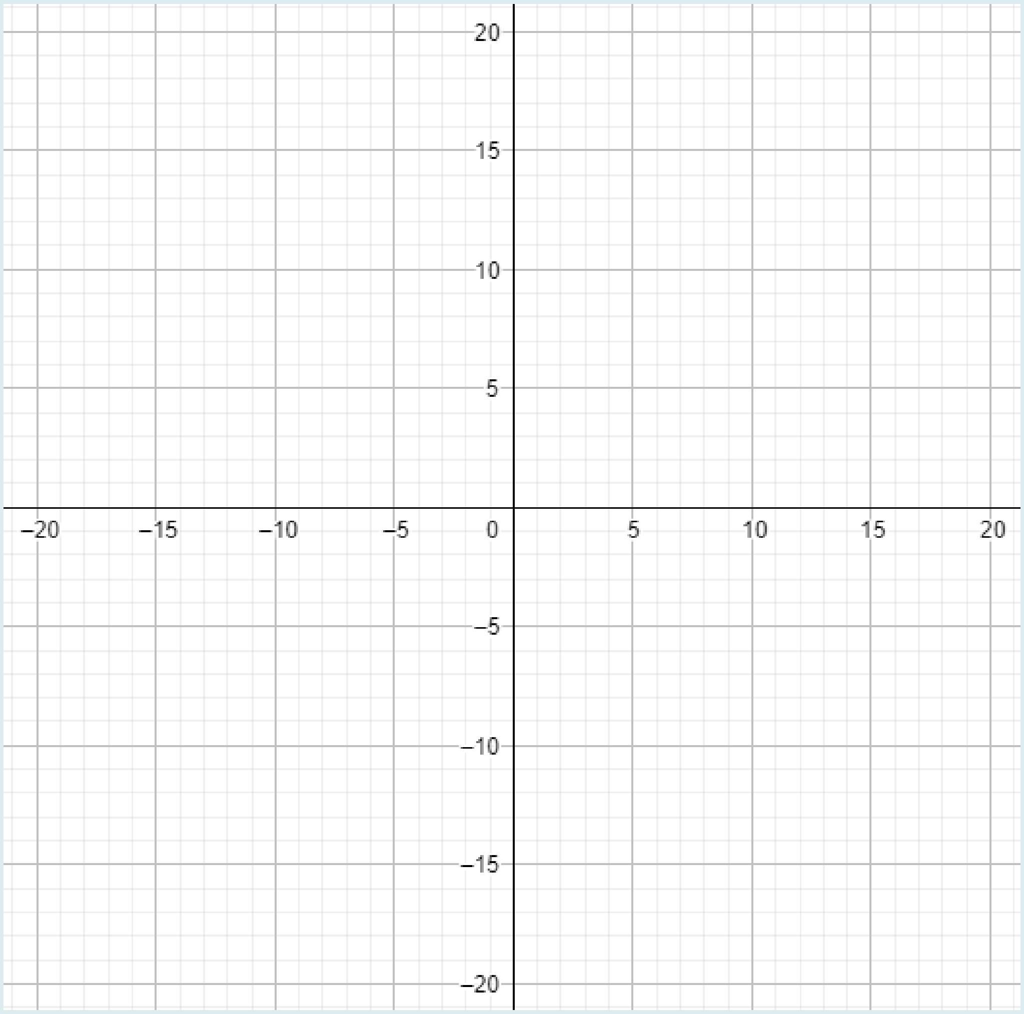
Θυμηθείτε ότι όλοι οι συντελεστές αυτής της εξίσωσης πρέπει να είναι πραγματικοί αριθμοί και ότι οι A, B και C δεν μπορούν να είναι όλοι μηδέν.

Ας κάνουμε κάποιες ασκήσεις για να πειραματιστούμε με αυτούς τους τύπους:

1. Βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει την κορυφή της στο (0, 0) και την εστία της στο (-5, 0)

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

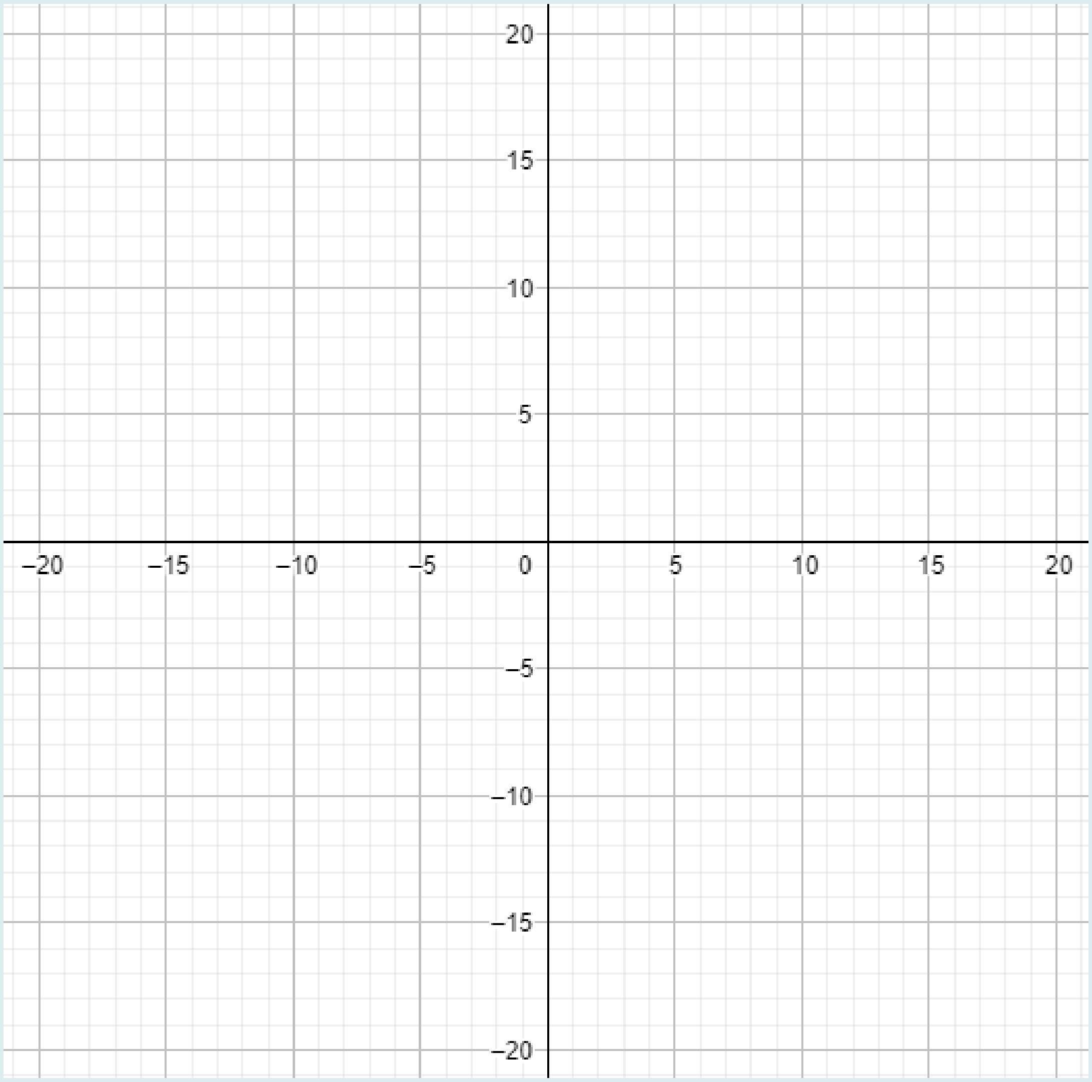
2. Σχεδιάστε την στον παρακάτω άξονα:



3. Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

4. Σχεδιάστε τον κύκλο στον παρακάτω άξονα:



Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΕΡΓΑΣΙΑ

Χαμογελάστε όπως η Γάτα του Τσεσάιρ:

Στη χώρα των θαυμάτων, η Αλίκη συναντά μια παράξενη γάτα που εξαφανίζεται αργά, αφήνοντας μόνο το χαμόγελο της. Δεν σας θυμίζει ένα σχήμα το οποίο μόλις μάθαμε;


Εικόνα 5: Εικονογραφήσεις από το βιβλίο "Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων" του Λιούις Κάρολ

Στην πρώτη εικόνα, βλέπουμε το κεφάλι της πολύ καθαρά, αλλά φαίνεται ότι δεν έχει σώμα. Στη δεύτερη, μπορούμε να δούμε ότι εξαφανίζεται μέσα στο φύλλωμα των δέντρων. Το πρόσωπό της και το χαμόγελο είναι ακόμα ορατά και το πηγούνι φαίνεται να στηρίζεται σε ένα από τα κλαδιά του δέντρου.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

1. Σχεδιάστε τη διευθετούσα, την εστία και την καμπύλη στην εικόνα:

Απάντηση:

2. Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

α) Τι καμπύλη βρήκατε;

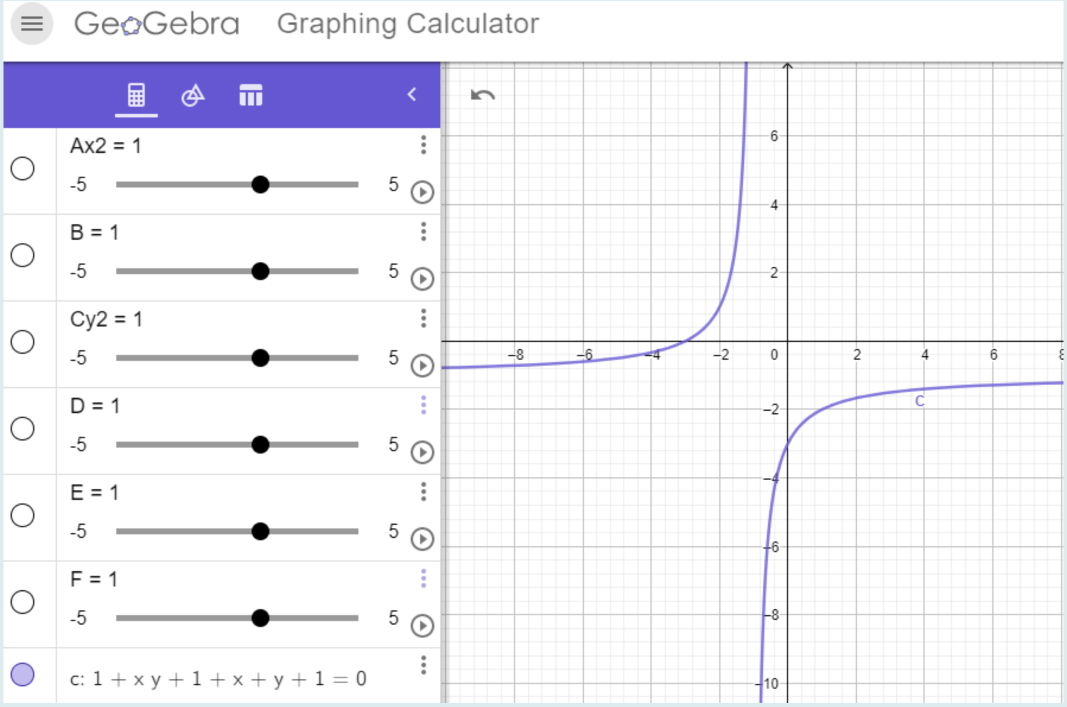
β) Γιατί πιστεύετε ότι ο συγγραφέας έδωσε στη γάτα αυτή την ικανότητα να εμφανίζεται και να εξαφανίζεται όποτε αυτή επιθυμεί;

---

3. Χρησιμοποιήστε το εργαλείο [Geogebra] και σχεδιάστε πιο εύκολα τα σχήματα:

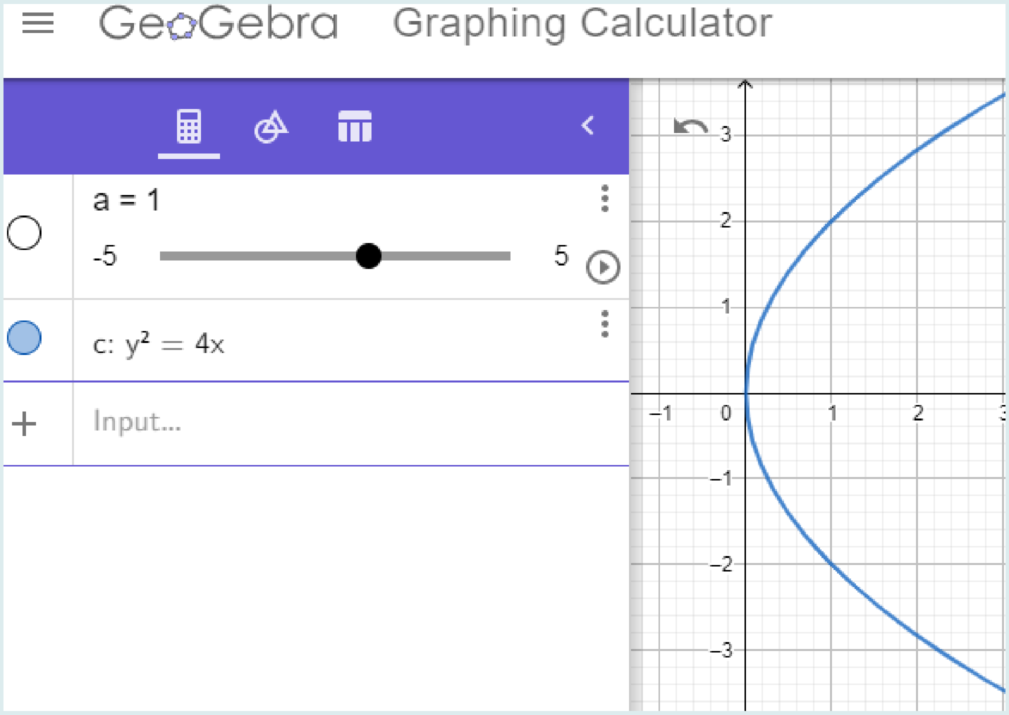
Εάν πληκτρολογήσουμε τη γενική εξίσωση, τότε προκύπτει αυτό:

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.



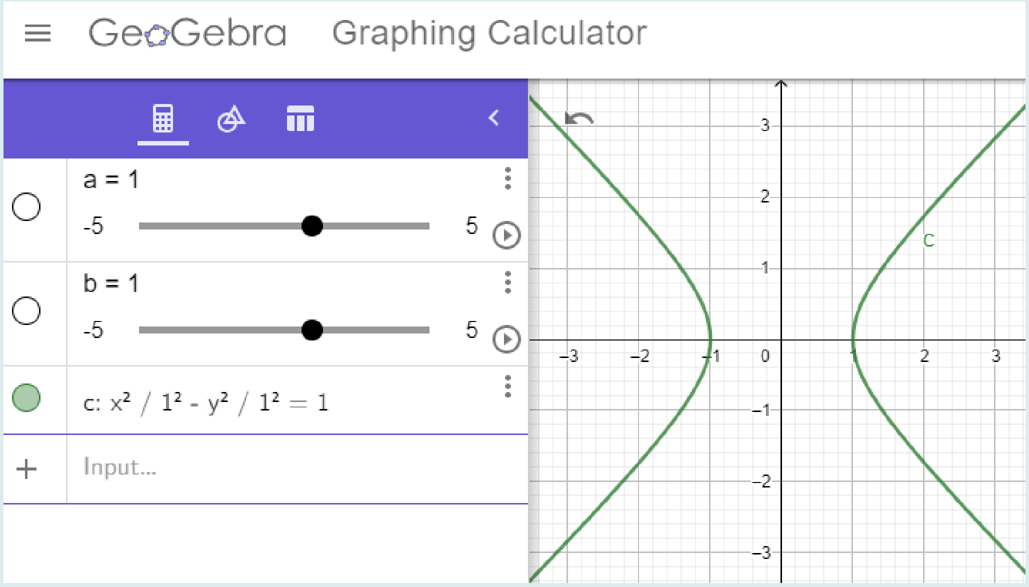
Προσπαθήστε να κάνετε κλικ στα κουμπιά «αναπαραγωγή» για να δείτε τι θα συμβεί 😉

Ας γράψουμε τον τύπο για να σχεδιάσουμε μια παραβολή στο πρόγραμμα:



Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

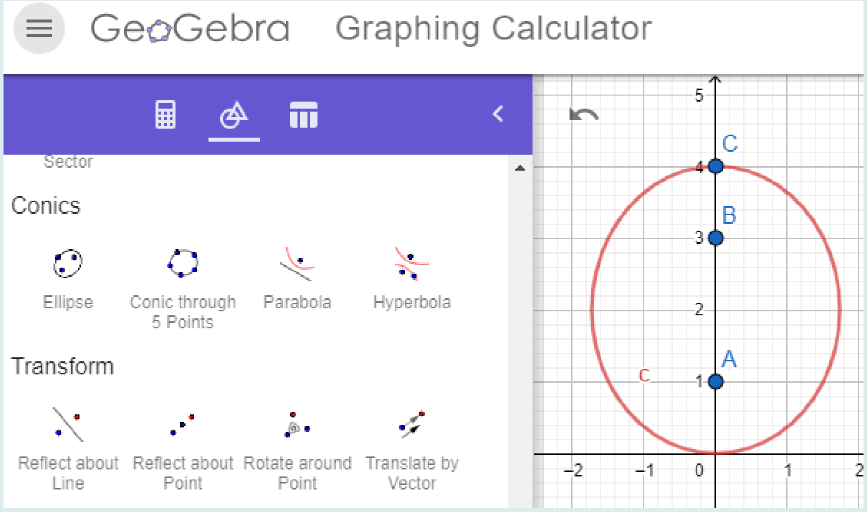
Τώρα, ας προσπαθήσουμε με μια υπερβολή:



Μπορείτε επίσης να δημιουργήσετε τα δικά σας σχήματα και να πάρετε τις συντεταγμένες και τις εξισώσεις τους:

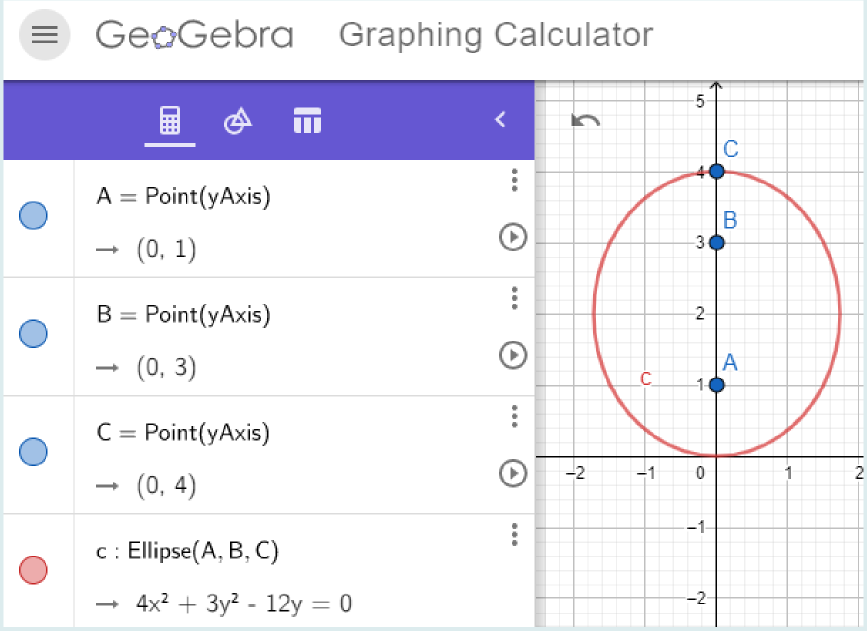
- Για την έλλειψη:

Αυτό το εργαλείο σάς επιτρέπει να σχεδιάσετε τη δική σας έλλειψη όπου θέλετε στο γράφημα:

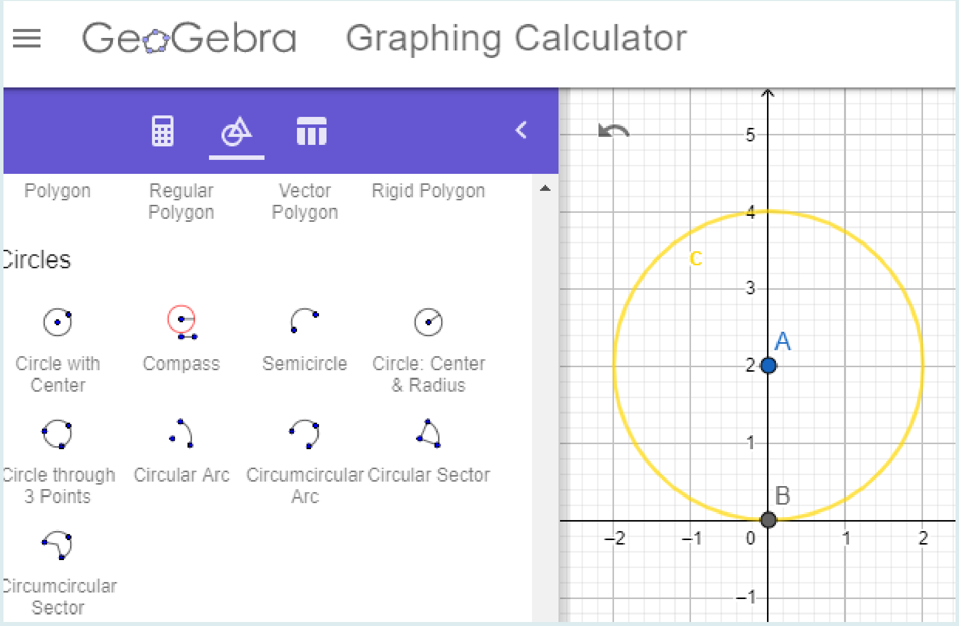


Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

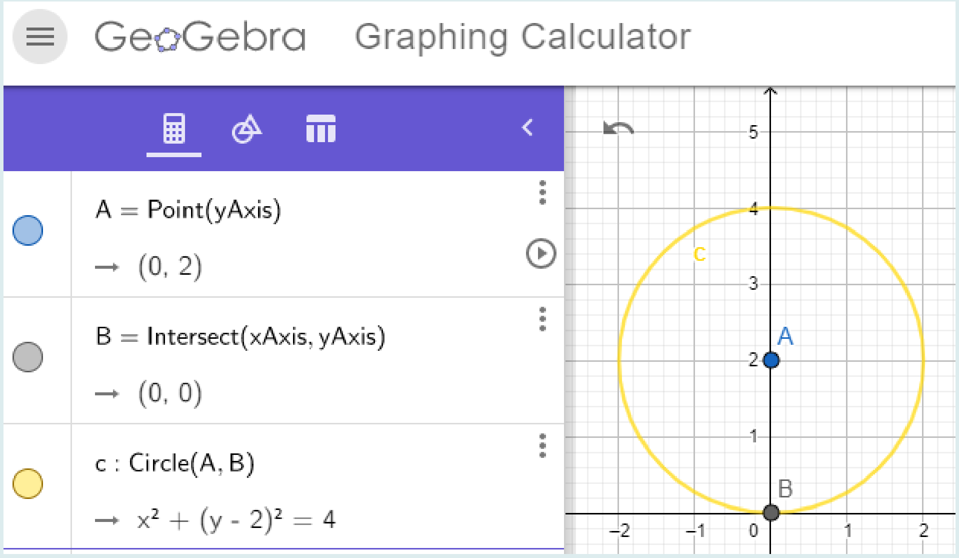
Στο τμήμα αυτό, μπορείτε να δείτε τις συντεταγμένες και τις εξισώσεις της έλλειψης που σχηματίζεται:



- Για τον κύκλο:



Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.



Όταν κάνατε κλικ στα κουμπιά «αναπαραγωγή», διαπιστώσατε ότι το σχήμα μπορούσε να κάμψει, να επεκταθεί και να συρρικνωθεί σε άλλες μορφές.

Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο ορισμένοι μαθηματικοί κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ένα σχήμα μπορεί να κάμπτεται και να επεκτείνεται σε άλλα σχήματα εάν διατηρεί τις βασικές ιδιότητές του, όπως ακριβώς το μωρό της Δούκισσας που μετατράπηκε σε γουρούνι!

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ…

Τα μαθηματικά στο λογοτεχνικό έργο «Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων»

http://www.massline.org/ScottH/science/MathOfAliceInWonderland-100308.pdf

Άλγεβρα στην Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων

https://www.newscientist.com/article/mg20427391-600-alices-adventures-in-algebra-wonderland-solved/

Τα κρυμμένα μαθηματικά στην Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων:

https://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_03_10.html

Προβολική γεωμετρία

https://www.britannica.com/science/projective-geometry

Τα αξιώματα του Ευκλείδη στα Στοιχεία:

https://www.youtube.com/watch?v=LPET_HhN0VM

Ιστορία μη Ευκλείδειας γεωμετρίας – μέρος 1:

https://www.youtube.com/watch?v=nkvVR-sKJT8

Ιστορία μη Ευκλείδειας γεωμετρίας – μέρος 2:

https://www.youtube.com/watch?v=vUWKMo5scKY

Ιστορία μη Ευκλείδειας γεωμετρίας – μέρος 3:

https://www.youtube.com/watch?v=H74AayZkpXg

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.