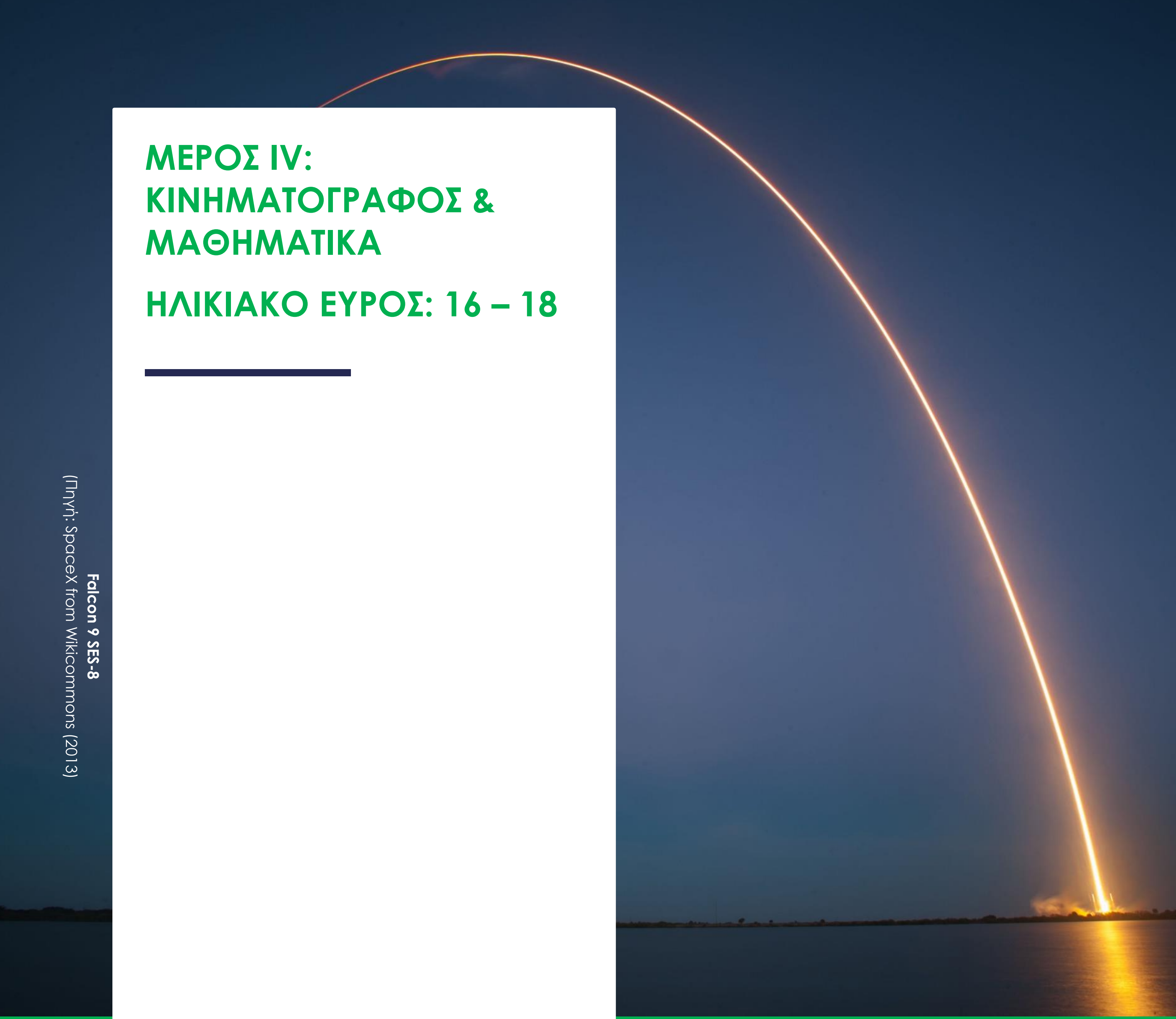
ΜΕΡΟΣ IV: ΚΙΝΗΜΑΤΟΓΡΑΦΟΣ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16 – 18



Falcon 9 SES-8
(Πηγή: SpaceX from Wikicommons (2013)

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 43: ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΑΙΝΙΑ «ΟΝΕΙΡΑ ΤΟΥ ΟΥΡΑΝΟΥ»

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

TheArtOf Maths

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Τετραγωνική συνάρτηση μέσα από την ταινία «Όνειρα του ουρανού» (October Sky)

Ηλιακιακό εύρος: 16 – 18 χρονών

Διάρκεια: 2 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Τετραγωνική συνάρτηση

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Ελευθερή πτώση, κατακόρυφη βολή

Γενικοί Σκοποί: Οι μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες των τετραγωνικών συναρτήσεων, να υπολογίσουν τις συντεταγμένες της κορυφής της, να λύσουν τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις και τις ανισότητες. Επίσης να υπολογίσουν τη θέση ενός βλήματος όταν κάνει ελεύθερη πτώση ή κατακόρυφη βολή.

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Δείξτε το απόσπασμα της ταινίας «Όνειρα του ουρανού», στο οποίο αναφέρεται η τετραγωνική συνάρτηση (βλ. σύνδεσμο «Αναζήτηση στο διαδίκτυο») και προτείνετε στους μαθητές να παρακολουθήσουν ολόκληρη την ταινία στο σπίτι. Χρησιμοποιήστε μια αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων (για παράδειγμα, την ηλεκτρονική αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων Desmos) για να δείξετε στους μαθητές γραφήματα, καθώς και τα αποτελέσματα των δευτεροβάθμιων εξισώσεων/ανισοτήτων.

Πηγές: Υπολογιστής με σύνδεση στο διαδίκτυο, πρόσβαση στην ιστοσελίδα: https://www.desmos.com/

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Αρχίστε με γραφικές παραστάσεις ορισμένων τετραγωνικών συναρτήσεων για να εξηγήσετε τις ιδιότητές τους. Δώστε ένα παράδειγμα για κάθε μία από τις έννοιες που διδάσκονται και στη συνέχεια αφήστε τους μαθητές να λύσουν παρόμοιες ασκήσεις.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες: Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- προβλέψει την εμφάνιση μιας τετραγωνικής συνάρτησεις και να λάβει τα αποτελέσματά της.
- υπολογίζει το μέγιστο ή το ελάχιστο σημείο μιας τετραγωνικής συνάρτησης.
- λύνει τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις και ανισότητες.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

- υπολογίζει τη θέση ενός βλήματος όταν κάνει ελεύθερη πτώση ή κατακόρυφη βολή.

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Εισαγωγή

Μερικές φορές βρίσκουμε πτυχές που σχετίζονται με τα μαθηματικά σε τηλεοπτικές σειρές ή ταινίες. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μερικές φορές δεν δίνεται μεγάλη σημασία σε αυτές τις μαθηματικές έννοιες, επειδή δεν επηρεάζουν την ίδια την ιστορία. Ωστόσο, υπάρχουν μερικές περιπτώσεις στις οποίες το κάνουν.

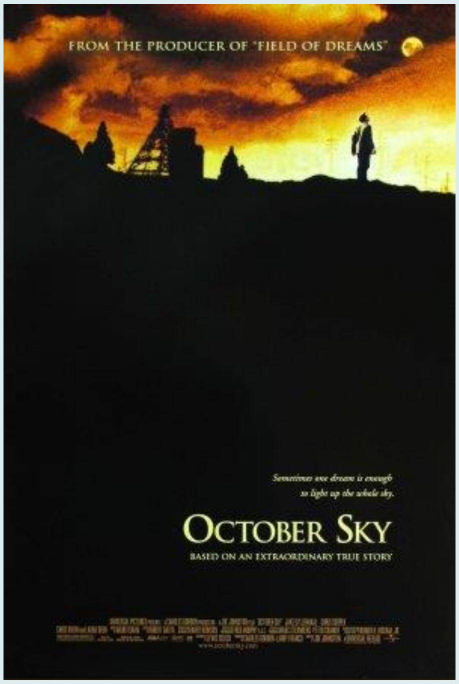
Μερικά παραδείγματα: «21» (ΗΠΑ, 2008) από τον Robert Luketic, «Proof» (ΗΠΑ, 2005) από τον John Madden, «A Beautiful Mind» (ΗΠΑ, 2001) από τον Ron Howard, «Enigma» (ΗΠΑ, 2001) από τον Michael Apted, «Pi» (ΗΠΑ, 1988) από τον Darren Aronofsky, «Good Will Hunting» (ΗΠΑ, 1997) από τον Gus Van Sant και «Cube» (Καναδάς, 1997) από τον Vincenzo Natali.

Σε αυτό το εργαλείο, η ταινία «Όνειρα του Ουρανού» (ΗΠΑ, 1999,) του Joe Johnston, θα συζητηθεί και θα αναλυθούν μαθηματικές έννοιες όπως η βαλλιστικές τροχιές και η τετραγωνική συνάρτηση.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Όνειρα του Ουρανού

Τα «Όνειρα του Ουρανού» (1999) είναι μια αμερικανική βιογραφική ταινία που βασίζεται στο μυθιστόρημα του Όμερ Χίκμαν «Rocket Boys». Βασίζεται στην αληθινή ιστορία του Όμερ Χίκμαν, γιο ενός ανθρακωρύχου, ο οποίος, ενάντια στη βούληση του πατέρα του, εμπνεύστηκε να κατασκευάσει σπιτικούς πυραύλους όταν παρουσιάστηκε για πρώτη φορά ο Sputnik 1 τον Οκτώβριο του 1957, από τη Σοβιετική Ένωση.



Εικ. 1 – Όνειρα του Ουρανού (1999) αφίσα ταινίας

(Πηγή:https://pt.wikipedia.org/wiki/Octob

Από την ελεύθερη πτώση μέχρι την κατακόρυφη βολή των πυραύλων, στα Όνειρα του Ουρανού, ο Όμερ και ο φίλος του Κουεντίν χρησιμοποιούν τέτοιες έννοιες για να αποδείξουν την αθωότητά τους για μια πυρκαγιά που ξέσπασε κοντά στην τοποθεσία στην οποία συνετρίβη ένας από τις πυραύλους που είχαν φτιάξει. Για να γίνει αυτό, βασίζονται στην τετραγωνική συνάρτηση για να καταδείξουν ότι ήταν αδύνατο ένα βλήμα να πέσει σε τέτοια θέση. Τελικά, ο Όμερ Χίκμαν προσλήφθηκε ως μηχανικός αεροσκαφών από τη NASA.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Γλωσσάρι

Ελεύθερη πτώση: οποιαδήποτε κίνηση ενός σώματος στο οποίο η βαρύτητα είναι η μόνη υπεύθυνη για την πρόκληση της επιτάχυνσής του.

Sputnik 1: Ο πρώτος τεχνητός δορυφόρος της Γης που παρουσιάστηκε από τη Σοβιετική Ένωση στις 4 Οκτωβρίου 1957 στη μονάδα δοκιμών πυραύλων της Σοβιετικής Ένωσης, γνωστή σήμερα ως Cosmodrome Baikonur.

Βλήμα: κάθε αντικείμενο που κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας.

Κατακόρυφη βολή: η πράξη εκτόξευσης ενός σώματος προς τα πάνω ή προς τα κάτω, η οποία, σε αντίθεση με την ελεύθερη πτώση, έχει αρχική τιμή ταχύτητας.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Τα μαθηματικά πίσω από την ταινία «Όνειρα του Ουρανού»

Ακριβώς όπως ο Όμερ και ο φίλος του υπολόγισαν σε ποια περιοχή ο πυραύλος που είχαν εκτοξεύσει συνετρίβη, είναι δυνατόν να υπολογίσετε το ύψος ενός αντικειμένου που κάνει ελεύθερη πτώση ως συνάρτηση του χρόνου. Για να γίνει αυτό, χρησιμοποιείται η ακόλουθη αλγεβρική συνάρτηση:

$$\mathbf{h(t) = \pm\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0}$$

Όπου:

$\mathbf{h(t)}$ -> ύψος (σε μέτρα)

$\mathbf{t}$ -> χρόνος (σε δευτερόλεπτα)

$\mathbf{v_0}$ -> αρχική ταχύτητα (σε $\boldsymbol{m/s}$)

$\mathbf{h_0}$ -> αρχικό ύψος (σε μέτρα)

$\boldsymbol{g}$ -> επιτάχυνση της βαρύτητας σε $\boldsymbol{m/s^2}$ (της οποίας η κατά προσέγγιση τιμή στη Γη είναι **9,8**)

Επόμενως:

$$\mathbf{h(t) = \pm\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{h(t) = \pm\frac{1}{2}(9,8)t^2 + v_0t + h_0} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{h(t) = \pm 4,9t^2 + v_0t + h_0}$$

Σημείωση: Όταν ένα αντικείμενο ξεκινά από πάνω προς τα κάτω η επιτάχυνση του είναι θετική, ενώ όταν εκτοξεύεται από κάτω προς τα πάνω η επιτάχυνση του είναι αρνητική. Όταν ένα αντικείμενο κάνει ελεύθερη πτώση ή κατακόρυφη βολή από πάνω προς τα κάτω είναι (δηλαδή πέφτει), το πρόσημο συν (+) χρησιμοποιείται στον τύπο. Όταν ένα αντικείμενο εκτοξεύεται κατακόρυφα από κάτω προς τα πάνω, χρησιμοποιείται το πρόσημο μείον (-).

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Σημείωση 2: Εάν το ύψος δίνεται σε πόδια, ο τύπος παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{h(t) = \pm\frac{1}{2}(32)t^2 + v_0 t + h_0 \Leftrightarrow h(t) \pm 16t^2 + v_0 t + h_0}$$

Αυτοί οι τύποι ονομάζονται **τετραγωνικές συναρτήσεις** και τα γραφήματα που προκύπτουν από αυτές ονομάζονται **παραβολές**.

Ας δούμε πιο προσεκτικά τις τετραγωνικές συναρτήσεις για να μάθουμε μερικές από τις ιδιότητές τους.

Τετραγωνική συνάρτηση

Ορισμός και χαρακτηριστικά στοιχεία

Μια **τετραγωνική συνάρτηση** ή πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού είναι μια συνάρτηση **f** που ορίζεται από:

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c,} \qquad a \neq 0$$

Όπου:

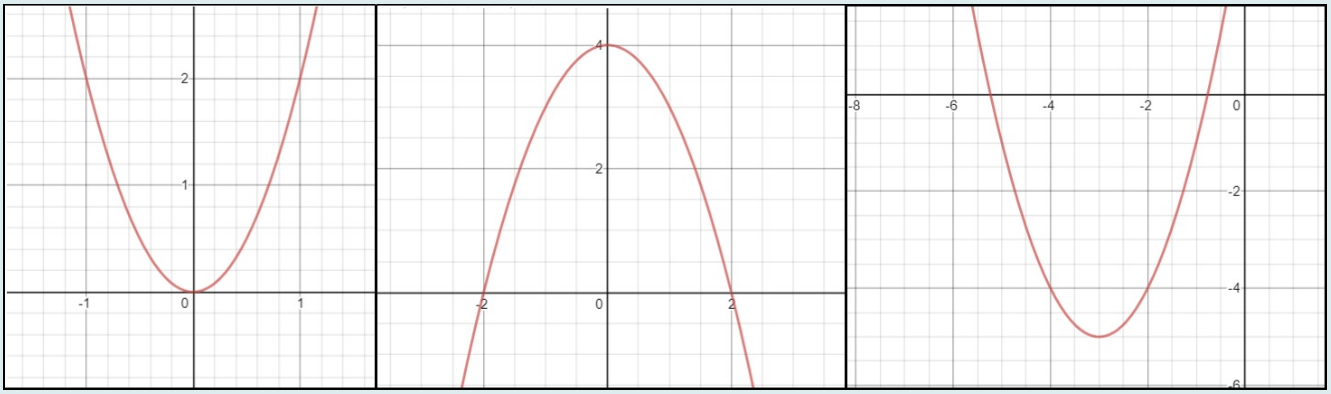
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ και $\boldsymbol{c}$ είναι **πραγματικοί αριθμοί.**

Το πεδίο ορισμού μιας τετραγωνικής συνάρτησης είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η γραφική παράσταση μιας τετραγωνικής συνάρτησης είναι μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή.**

Παραδείγματα:

$\boldsymbol{y = 2x^2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{y = -x^2 + 4}$ $\qquad$ $\boldsymbol{y = x^2 + 6x + 4}$



Εικ. 2 – Τετραγωνικές συναρτήσεις
(Πηγή: https://www.desmos.com/)

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

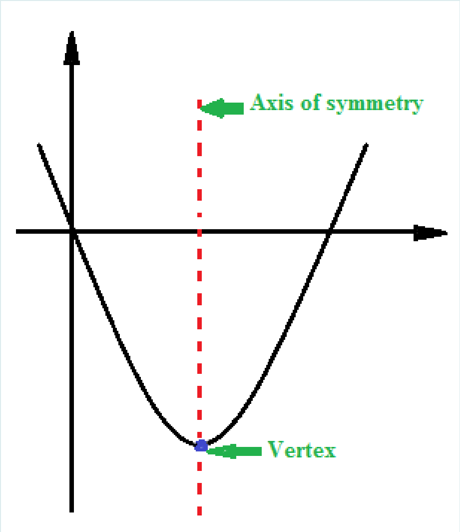
- Η τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{a}$ επηρεάζει την καμπύλη της γραφικής παράστασης:
  - εάν $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, η παραβολή έχει σχήμα U, **με άνοιγμα στην κορυφή**
  - εάν $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, η παραβολή έχει σχήμα U, **με ένα άνοιγμα στο κάτω μέρος**.

Μια παραβολή έχει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:

- Μια παραβολή είναι συμμετρική σε σχέση με μια κάθετη γραμμή, η οποία ονομάζεται άξονας συμμετρίας.

- Ο άξονας συμμετρίας μιας παραβολής είναι η κάθετη γραμμή της εξίσωσης $\boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}}$.

- Το σημείο τομής της παραβολής με τον άξονα συμμετρίας ονομάζεται κορυφή.



Εικ. 3- Άξονας συμμετρίας
(Πηγή:http://calculator.mathcaptain.com/vertex-calculator.html)

- Οι συντεταγμένες της κορυφής μιας παραβολής

δίνονται από τους τύπους $\mathbf{x_V} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}$ και $\mathbf{y_V} = \mathbf{f}(\mathbf{x_V}) = \mathbf{f}\left(-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)$ ή $\mathbf{y_V} = \frac{\mathbf{4ac-b^2}}{\mathbf{4a}}$.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Ρίζες μιας τετραγωνικής συνάρτησης

Ρίζες ή **μηδενικά** μιας τετραγωνικής συνάρτησης, $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c;\ a, b, c} \in \mathbb{R}$ R και α $\neq$ 0 στους πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{x}$ όπως $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

Επομένως, οι ρίζες της συνάρτησης $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0}$ είναι οι λύσεις της πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, οι οποίες δίνονται από τον επονομαζόμενο **τετραγωνικό τύπο:**

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Έχουμε:

$$\boldsymbol{f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Παραδείγματα:

Εξετάστε τα μηδενικά της συνάρτησης που ορίζεται από $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x + 5}$

- Προσδιορίστε κάθε μία από τις τιμές: a = 1, b = - 6 και c = 5
- Χρησιμοποιήστε τον τετραγωνικό τύπο:

$$\boldsymbol{f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2} \Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{6-4}{2} \vee x = \frac{6+4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \vee x = \frac{10}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5}$$

Ρίζες = {1, 5}

Σημείωση:

1) Ο αριθμός των πραγματικών ριζών μιας τετραγωνικής συνάρτησης εξαρτάται από την τιμή που λαμβάνεται για την η ρίζα Δ= $b^2 - 4ac$, που ονομάζεται διακρίνουσα, δηλαδή:
   - όταν Δ> 0, υπάρχουν **δύο πραγματικές** (και διακριτές) **ρίζες**·
   - όταν Δ = 0, υπάρχει **μια πραγματική ρίζα** (για να είμαστε ακριβέστεροι, υπάρχουν δύο ίσες ρίζες)·
   - όταν Δ <0, **δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες**.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

2) Μερικές πολυωνυμικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού μπορούν να λυθούν χωρίς τη χρήση του τετραγωνικού τύπου. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, όταν οι εξισώσεις δευτέρου βαθμού είναι ελλιπείς, δηλαδή, του τύπου:
   - $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$·
   - $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$.

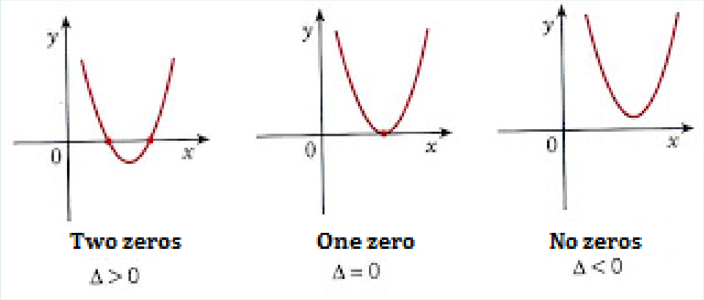
Τομή του γραφήματος μιας τετραγωνικής συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων

Τομή του γραφήματος με τον άξονα Oy

Για να αποκτήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής του γραφήματος της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ που ορίζεται από $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$; $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{R}$ και $\boldsymbol{a \neq 0}$ με τον άξονα $\boldsymbol{Oy}$, αντικαταστήστε x με 0. Αφού $\boldsymbol{f(0) = c}$, υπάρχει πάντα ένα σημείο τομής του γραφήματος της τετραγωνικής συνάρτησης με τον άξονα y. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής είναι $(\boldsymbol{0, c})$.

Τομή του γραφήματος με τον άξονα Ox (μηδενικό μιας συνάρτησης)

Μια τετραγωνική συνάρτηση μπορεί να έχει ένα μηδενικό, δύο μηδενικά ή κανένα. Ας δούμε τις παρακάτω γραφικές απεικονίσεις των τετραγωνικών συναρτήσεων.



Εικ. 4 – Γραφική απεικόνιση των τετραγωνικών συναρτήσεων
(Πηγή: http://funcaode2grau.blogspot.com/2008/02/resumo-terico-da-funo-quadrtica.html)

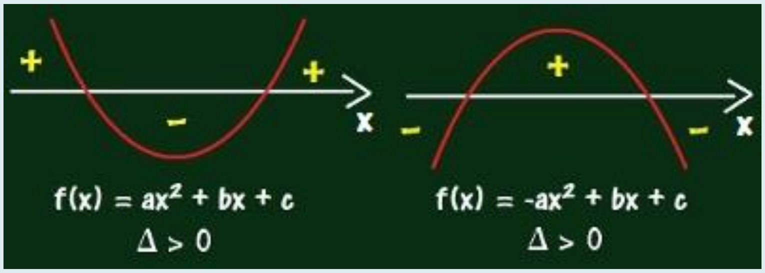
Η τετμημένη των μηδενικών συντεταγμένων είναι τα μηδενικά της συνάρτησης.

Όσον αφορά την τετραγωνική συνάρτηση, η αναγνώριση των μηδενικών σημείων μας ενδιαφέρει τόσο για την επίλυση των εξισώσεων και των ανισοτήτων του δευτέρου βαθμού, όσο και για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Εύρεση προσήμων (+/-) των ριζών μιας τετραγωνικής συνάρτησης

- **Εάν η συνάρτηση έχει δύο πραγματικές ρίζες (Δ> 0)**



Εικ. 5 – Πρόσημα μιας τετραγωνικής συνάρτησης με δύο μηδενικά
(Πηγή: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/estudo-variacao-sinal-uma-funcao-2-grau.html)

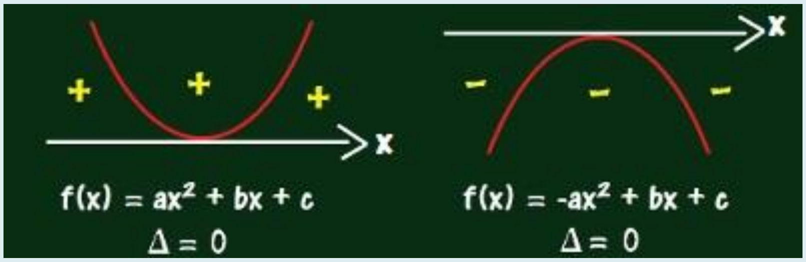
Θετικό: $]-\infty; \boldsymbol{x_1}[\, \cup \,]\boldsymbol{x_2}; +\infty[$

Αρνητικό: $]\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_2}[$

Θετικό: $]\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_2}[$

Αρνητικό: $]-\infty; \boldsymbol{x_1}[\, \cup \,]\boldsymbol{x_2}; +\infty[$

- **Εάν η συνάρτηση έχει μια πραγματική ρίζα (διπλές ίσες ρίζες)** $(\Delta = \mathbf{0})$



Εικ. 6 – Πρόσημα μιας τετραγωνικής συνάρτησης με ένα μηδενικό
(Πηγή: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/estudo-variacao-sinal-uma-funcao-2-grau.html)

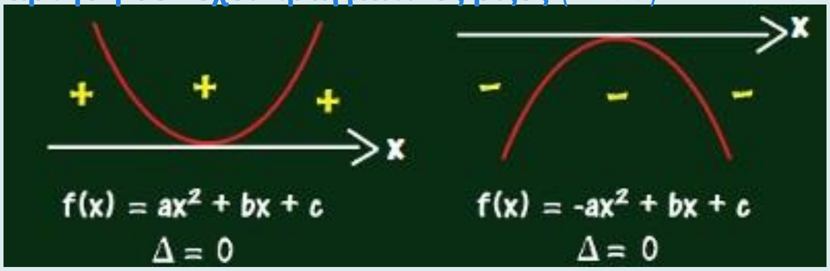
Θετικό: $\mathbb{R} \backslash \{\boldsymbol{x_1}\}$ ή $]-\infty; \boldsymbol{x_1}[\, \cup \,]\boldsymbol{x_1}; +\infty[$

Αρνητικό: $\{\quad\}$ή $\emptyset$

Θετικό: $\{\quad\}$ή $\emptyset$

Αρνητικό: $\mathbb{R} \backslash \{\boldsymbol{x_1}\}$ ή $]-\infty; \boldsymbol{x_1}[\, \cup \,]\boldsymbol{x_1}; +\infty[$

- **Αν η συνάρτηση δεν έχει πραγματικές ρίζες** $(\Delta < \mathbf{0})$



Εικ. 7 – Πρόσημα μιας τετραγωνικής συνάρτησης χωρίς μηδενικά
(Πηγή: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/estudo-variacao-sinal-uma-funcao-2-grau.html)

Θετικό: $\mathbb{R}$

Αρνητικό: $\{\quad\}$ή $\emptyset$

Θετικό: $\{\quad\}$ή $\emptyset$

Αρνητικό: $\mathbb{R}$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

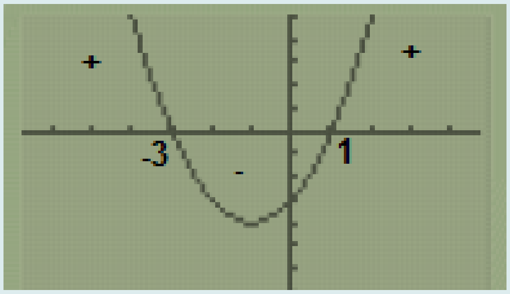
Ανισότητες δευτέρου βαθμού

Στην κανονική μορφή μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, όπου $\boldsymbol{a\neq 0}$, αν το «ίσον» (=) αντικατασταθεί από ένα σύμβολο «ανισότητας» ($\neq$) τότε γίνεται ανισότητα δευτέρου βαθμού.

Η επίλυση μιας ανισότητας δευτέρου βαθμού συνίσταται στον καθορισμό των τιμών του $\boldsymbol{x}$ που αντιστοιχούν στις θετικές, αρνητικές, μη θετικές ή μη αρνητικές τιμές της συνάρτησης$\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$.

Παράδειγμα: Λύστε την ανισότητα $\boldsymbol{x^2+2x>3}$

- 3ο βήμα: Φτιάξτε τη γραφική αναπαράσταση της $\boldsymbol{f(x)=x^2+2x-3}$ και προσδιορίστε τα μηδενικά και τις περιοχές όπου η συνάρτηση είναι θετική και αρνητική.

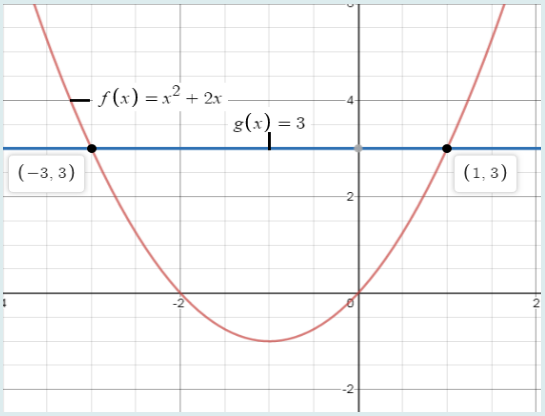


Εικ. 8 – Γραφική παράσταση της συνάρτησης
$\boldsymbol{f(x)=x^2+2x-3}$
(Πηγή: Graphing Calculator)

- 4ο βήμα: Γράψτε τη λύση της ανισότητας.

$$\boldsymbol{x^2+2x>3 \Leftrightarrow x^2+2x-3>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty;-3[\,\cup\,]1;+\infty[}$$

Σημείωση: Η προηγούμενη ανισότητα μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί χρησιμοποιώντας την ηλεκτρονική αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων Desmos.



Εικ. 9 – Γραφική παράσταση της ανισότητας $x^2+2x>3$
(Πηγή: https://www.desmos.com/calculator)

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Η τετραγωνική συνάρτηση αναπαριστάνεται ως $y = a(x-h)^2 + k$

Για κάθε τετραγωνική συνάρτηση που αναπαριστάνεται ως $\boldsymbol{y = a(x-h)^2 + k}$, όπου $(\boldsymbol{h, k})$ είναι οι συντεταγμένες της κορυφής της, πρέπει απλά να γνωρίζετε τις συντεταγμένες της κορυφής της και ένα ακόμη σημείο της.

Τετραγωνικές συναρτήσεις στην εκτόξευση βλήματος

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η ακόλουθη αλγεβρική συνάρτηση επιτρέπει τον υπολογισμό του ύψους ενός αντικειμένου όταν κάνει ελεύθερη πτώση ή κατακόρυφη βολή σε δεδομένη χρονική στιγμή:

$$\boldsymbol{h(t) = \pm 4,9t^2 + v_0 t + h_0}$$

Όπου:

$\boldsymbol{h(t)}$ -> ύψος (σε μέτρα)

$\boldsymbol{t}$ -> χρόνος (σε δευτερόλεπτα)

$\boldsymbol{v_0}$ -> αρχική ταχύτητα (σε $\boldsymbol{m/s}$)

$\boldsymbol{h_0}$ -> αρχικός ύψος (σε μέτρα)

$\boldsymbol{4,9}$ -> επιτάχυνση της βαρύτητας στη Γη σε $\boldsymbol{m/s^2}$ (αναπαριστάνεται με το γράμμα **g**)

Να θυμάστε ότι όταν ένα αντικείμενο κάνει ελεύθερη πτώση ή κατακόρυφη βολή από πάνω προς τα κάτω, το πρόσημο συν (+) χρησιμοποιείται στον τύπο, ενώ εάν το αντικείμενο εκτοξεύεται κάθετα από κάτω προς τα πάνω, χρησιμοποιούμε το πρόσημο μείον (-).

Ας ρίξουμε μια ματιά σε μερικά παραδείγματα:

Για να διευκολυνθεί ο υπολογισμός, θεωρήστε τη γενική σταθερά βαρύτητας, $\boldsymbol{g}$, ίση με $\boldsymbol{10\ m/s^2}$, η οποία έχει σαν αποτέλεσμα τον ακόλουθο τύπο:

$$\boldsymbol{h(t) = \pm 5t^2 + v_0 t + h_0}$$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Παραδείγματα:

1) Ένα βλήμα εκτοξεύεται 80 μέτρα από το έδαφος. Εάν $g = \mathbf{10}\ \boldsymbol{m/s^2}$ και είναι ελεύθερη από οποιεσδήποτε δυνάμεις διασποράς, ορίστε τη στιγμή που το αντικείμενο θα χτυπήσει στο έδαφος

2) Ένα βλήμα εκτοξεύεται κάθετα από το έδαφος, με ταχύτητα 72 km/h.
   Βρείτε:

   a) τη συνάρτηση που μας δίνει το ύψος του βλήματος·
   b) το μέγιστο ύψος που έφτασε·
   c) το ύψος για t = 3 s και την κατεύθυνση κίνησης εκείνη τη στιγμή·
   d) τη στιγμή που το αντικείμενο φτάνει στο έδαφος.

   Παρατήρηση: Εξετάστε το =$10\ \mathrm{m/s^2}$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

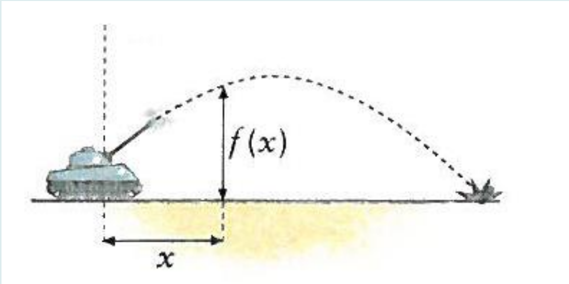
ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Μια σφαίρα τοποθετείται 1,5 μέτρα πάνω από το έδαφος και εκτοξεύεται σε μια ορισμένη γωνία από το επίπεδο του εδάφους.

Η τροχιά της σφαίρας δίνεται από τη συνάρτηση που ορίζεται από:

$$\mathbf{f(x) = -0,0025x^2 + x + 1,5}$$



Εικ. 10 - Τροχιά της σφαίρας
(Πηγή: Neves, M. A, Pereira, A., Leite, A., Guerreiro, L., & Silva, M. C. (2006). Matemática A2 – Ensino Profissional: Funções polinomiais. Porto: Porto Editora.)

Όπου $\mathbf{f(x)}$ είναι το ύψος της σφαίρας (σε μέτρα) και x η οριζόντια απόσταση από τη σφαίρα μέχρι το σημείο εκτόξευσης.

1.1 Προσδιορίστε την οριζόντια απόσταση σε μέτρα, με ένα δεκαδικό ψηφίο, μεταξύ του σημείου εκκίνησης και του σημείου όπου έπεσε η σφαίρα.

1.2. Προσδιορίστε το μέγιστο ύψος που έφτασε η σφαίρα και πόσο μακριά προσγειώθηκε.

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Λύστε, αναλυτικά, την ακόλουθη ανισότητα $\mathbf{2x^2 - 8x > -6}$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Μία μπάλα εκτοξεύεται κάθετα από κάτω προς τα πάνω.

Το ύψος h, σε μέτρα, όπου η μπάλα είναι t δευτερόλεπτα μετά την εκτόξευση ορίζεται από:

$$\mathbf{h(t) = 1 + 38t - 5t^2}.$$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

3.1 Καθορίστε $h(0)$ και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα στο πλαίσιο της παρούσας κατάστασης.

3.2 Προσδιορίστε το μέγιστο ύψος που έφτασε η μπάλα και τη στιγμή που συνέβη.

3.3 Σε ποια χρονική στιγμή χτύπησε η μπάλα στο έδαφος; Παρουσιάστε την απάντηση με ένα δεκαδικό ψηφίο.

3.4 Σε ποιο χρονικό διάστημα ήταν η μπάλα λιγότερο από 30 μέτρα μακριά από το έδαφος; Παρουσιάστε την απάντηση στο δεκαδικό ψηφίο του δευτερολέπτου.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ…

Όνειρα του Ουρανού (1999) υπόθεση ταινίας
https://www.imdb.com/title/tt0132477/?ref_=nv_sr_1?ref_=nv_sr_1

Τετραγωνικές συναρτήσεις στην ταινία «Όνειρα του Ουρανού»
https://www.youtube.com/watch?v=udHB3tftPz4

Μορφές και χαρακτηριστικά των τετραγωνικών συναρτήσεων
https://www.khanacademy.org/math/algebra/quadratics/features-of-quadratic-functions/v/rewriting-a-quadratic-function-to-find-roots-and-vertex

Πρόσημο μιας τετραγωνικής συνάρτησης με εφαρμογή σε ανισότητες
http://www.sosmath.com/algebra/quadraticeq/signquadra/signquadra.html

Quadratic Word Problems: Projectile Motion
https://www.purplemath.com/modules/quadprob.htm

Εξερευνήστε γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με την εφαρμογή Desmos
https://www.desmos.com/

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.