

# ΜΕΡΟΣ IV: ΚΙΝΗΜΑΤΟΓΡΑΦΟΣ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16 – 18

---

## ΕΡΓΑΛΕΙΟ 39: ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΑΥΞΗΣΗ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΑΙΝΙΑ «ΧΩΡΙΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΜΑ»

---

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

## Οδηγός Εκπαιδευτικού

**Τίτλος:** Εκθετική αύξηση μέσα από την ταινία «Χωρίς αντάλλαγμα» («Pay it forward»)

**Ηλικιακό Εύρος:** 16 –18 χρονών

**Διάρκεια:** 2 ώρες

**Μαθηματικές Έννοιες:** Εκθέτης, Εκθετικές συναρτήσεις, Εκθετική αύξηση, Εκθετική απόσβεση, Εκθέτες

**Καλλιτεχνικές Έννοιες:** Εκθετικό μοντέλο

**Γενικοί Σκοποί:** Οι μαθητές να μελετήσουν και να αναλύσουν παραδείγματα εκθετικής αύξησης και απόσβεσης. Επίσης να σχεδιάσουν τις γραφικές παραστάσεις των εκθετικών εξισώσεων και συναρτήσεων.

**Οδηγίες και Μεθοδολογία:** Παρουσιάστε το τρέιλερ της ταινίας Χωρίς αντάλλαγμα και προτείνετε στους μαθητές να δουν ολόκληρη την ταινία στο σπίτι.

**Πηγές:** Στυλό και αριθμομηχανή.

**Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό:** Να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν τα αποτελέσματα από τις γραφικές παραστάσεις, να τους αφήσει να προτείνουν διαφορετικές τιμές και να φτιάξουν τις δικές τους γραφικές παραστάσεις.

**Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες:** Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- ο αναγνωρίζει και επιλύει προβλήματα που αφορούν την εφαρμογή εκθετικών συναρτήσεων, καθώς και τη γραφική παράσταση που είναι πιθανό να αναπαριστά εκθετικές συναρτήσεις
- ο χρησιμοποιεί τους κανόνες των εκθετών για να δουλέψει με εκθετικές συναρτήσεις και να κάνει τη γραφική παράστασή τους.

### Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

## Εισαγωγή

Μερικές φορές βρίσκουμε πτυχές που σχετίζονται με τα μαθηματικά σε τηλεοπτικές σειρές ή ταινίες. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μερικές φορές δεν δίνεται μεγάλη σημασία σε αυτές τις μαθηματικές έννοιες, επειδή δεν επηρεάζουν την ίδια την ιστορία. Ωστόσο, υπάρχουν μερικές περιπτώσεις στις οποίες το κάνουν.

Μερικά παραδείγματα: «21» (ΗΠΑ, 2008) από τον Robert Luketic, «Proof» (ΗΠΑ, 2005) από τον John Madden, «A Beautiful Mind» (ΗΠΑ, 2001) από τον Ron Howard, «Enigma» (ΗΠΑ, 2001) από τον Michael Apted, «Pi» (ΗΠΑ, 1988) από τον Darren Aronofsky, «Good Will Hunting» (ΗΠΑ, 1997) από τον Gus Van Sant και «Cube» (Καναδάς, 1997) από τον Vincenzo Natali.

Σε αυτό το εργαλείο, θα συζητήσουμε για την ταινία «Χωρίς αντάλλαγμα» (ΗΠΑ, 2000) από την Mimi Leder και θα εξεταστούν οι μαθηματικές της έννοιες, όπως η εκθετική αύξηση.

## Χωρίς αντάλλαγμα

Μετά από μια εργασία στο μάθημα της Κοινωνικής και Πολιτικής Αγωγής με θέμα την αλλαγή του κόσμου προς το καλύτερο, ο 12χρονος μαθητής Τρέβορ Μακκίνι (τον οποίο υποδύεται ο ηθοποιός Haley Joel Osment) ξεκινά ένα κίνημα που έχει ως στόχο την πραγματοποίηση μιας καλής πράξης για τρία άτομα τα οποία, αντί να ανταποδώσουν την καλή πράξη καλούνται να «την ανταποδώσουν» κάνοντας μια χάρη σε τρεις άλλους ανθρώπους και ούτω καθεξής.



Εικ. 1 – Η αφίσα της ταινίας Χωρίς αντάλλαγμα (2000)

(Πηγή: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pay\\_It\\_Forward\\_\(film\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pay_It_Forward_(film)))

Στην προσπάθειά του να αλλάξει τον κόσμο, ο Τρέβορ ενεργοποιεί τελικά μια σειρά γεγονότων που μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα εκθετικό μοντέλο, πράγμα που σημαίνει ότι οι κινήσεις αυτές πληρούν τις απαιτούμενες προϋποθέσεις για να αναπτυχθούν με έναν εκθετικό ρυθμό.

Το εκθετικό μοντέλο συνδέεται με τον Βρετανό οικονομολόγο Thomas Robert Malthus (1766-1834), που ήταν ο πρώτος που διαπίστωσε ότι οποιοδήποτε είδος θα μπορούσε ενδεχομένως να αναπτυχθεί σύμφωνα με μια γεωμετρική πρόοδο. Οι εκθετικές συναρτήσεις προέκυψαν από αυτήν την παρατήρηση.

Στα μαθηματικά, οι εκθετικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις που αυξάνονται από κοινούς παράγοντες σε ίσα διαστήματα. Αυτή η αύξηση μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση ή μείωση της τιμής, η οποία επομένως είναι γνωστή ως εκθετική αύξηση και εκθετική απόσβεση αντίστοιχα.

Μακροπρόθεσμα, η αύξηση ή η απόσβεση καθίσταται μη βιώσιμη, αφού οι θρεπτικές ουσίες ή οι πόροι θα εξαντληθούν και η αύξηση / απόσβεση θα σταματήσει. Παρόλα αυτά, η χρήση των εκθετικών συναρτήσεων για την πρόβλεψη ενός αποτελέσματος χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές στον τομέα των επιχειρήσεων, της επιστήμης και της κοινωνιολογίας και μπορεί να παρατηρηθεί και στην ίδια τη φύση.

## Γλωσσάρι

**Εκθέτης:** αντιστοιχεί στον επαναλαμβανόμενο πολλαπλασιασμό μιας βάσης «n»: δηλαδή, το γινόμενο του  $b^n$  είναι ο πολλαπλασιασμός της βάσης ( $b$ ) «n» φορές, που ονομάζεται « $b$  υψωμένη στη δύναμη του  $n$ » ή « $b$  υψωμένη στην  $n$ -δύναμη».

**Εκθετική συνάρτηση:** μια συνάρτηση τύπου  $f(x) = a * b^x$ , στην οποία η συνάρτηση μεταβάλλεται εκθετικά καθώς το  $x$  αυξάνεται.

**Εκθετική αύξηση:** μια έννοια που χρησιμοποιείται όταν μια τιμή αυξάνεται αναλογικά με σταθερό ρυθμό σε μια περίοδο.

**Εκθετική απόσβεση:** μια έννοια που χρησιμοποιείται όταν μια τιμή μειώνεται αναλογικά με σταθερό ρυθμό σε μια περίοδο.

**Παράγοντας:** ένας αριθμός που, όταν διαιρείται με έναν άλλο αριθμό, έχει ως αποτέλεσμα έναν άρτιο αριθμό - δηλαδή, χωρίς δεκαδικά ψηφία.

# Τα μαθηματικά πίσω από την ταινία «Χωρίς αντάλλαγμα»

## 1. Εκθετικές συναρτήσεις

Οι εκθετικές συναρτήσεις χαρακτηρίζονται ότι έχουν **μία τιμή που αυξάνεται βάσει ενός κοινού παράγοντα σε μια ίση περίοδο**, ανεξάρτητα από το εάν πρόκειται για αύξηση ή μείωση μιας συγκεκριμένης τιμής.

Μια εκθετική συνάρτηση αναπαριστάται ως:

**Εκθετική συνάρτηση**  
 $y = a^x$

Όπου:

**a** = η **αρχική τιμή** πριν από τη μέτρηση της αύξησης/ απόσβεσης και είναι **> 0**

**x** = ένας μεταβλητός εκθέτης που αντιστοιχεί στον αριθμό των χρονικών διαστημάτων που έχουν περάσει.

Στην ταινία «Χωρίς αντάλλαγμα», ο Τρέβορ ξεκινά ένα κίνημα που προκαλεί δράσεις που τριπλασιάζονται εκθετικά.

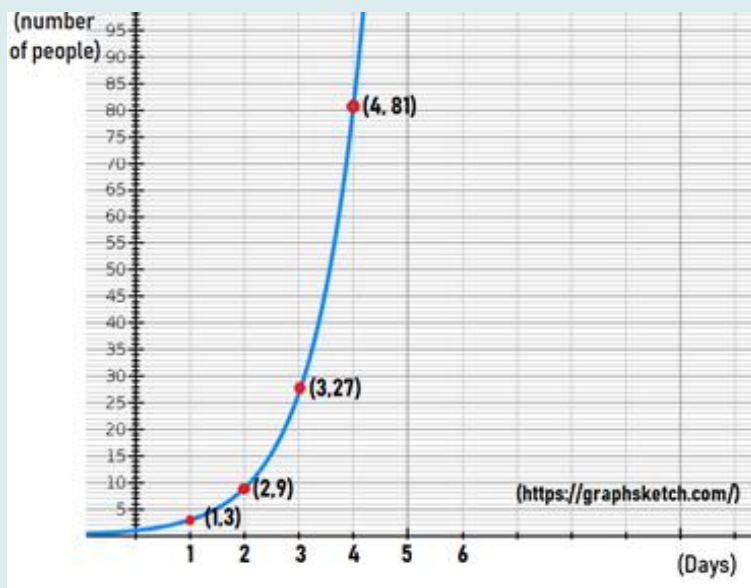
Παρατηρώντας τον παρακάτω πίνακα τιμών, ας αναλύσουμε τις δυνατότητες αυτού του αντίκτυπου θεωρώντας ότι για κάθε ημέρα που πέρασε, κάθε άτομο που συμμετείχε στο κίνημα θα συνεχίσει τη διαδικασία της πραγματοποίησης μιας καλής πράξης σε τρεις άλλους ανθρώπους:

Ημέρα	Αριθμός ανθρώπων	Διάταξη
1	$3 = 3$	$y = 3^1$
2	$9 = 3 \times (3)$	$y = 3^2$
3	$27 = 3 \times (3 \times 3)$	$y = 3^3$
4	$81 = 3 \times (3 \times 3 \times 3)$	$y = 3^4$
5	$243 = 3 \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$	$y = 3^5$



Την 1η ημέρα, ο Τρέβορ κάνει 3 καλές πράξεις σε 3 διαφορετικούς ανθρώπους. Την 2<sup>η</sup> μέρα, καθένας από τους 3 ανθρώπους κάνει άλλες 3 καλές πράξεις σε 3 άλλους ανθρώπους, κάνοντας συνολικά 9 ( $3 \times 3$ ). Την 5<sup>η</sup> μέρα θα έχουν συμμετάσχει 243 άτομα ( $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ). Με άλλα λόγια, το ποσό τριπλασιάζεται κάθε μέρα!

Αυτή η πρόοδος κάθε αλλαγής μπορεί στη συνέχεια να απεικονιστεί μέσω μιας γραφικής παράστασης, ως εξής:



Εικ. 2 – Εκτίμηση των ατόμων που συμμετέχουν στο κίνημα του Τρέβορ  
(Πηγή: graphsketch.com)

## Έκθετική αύξηση και απόσβεση

Έχουμε δει ότι οι εκθετικές συναρτήσεις αυξάνονται από κοινούς παράγοντες. Ωστόσο, εάν θέλουμε να εισάγουμε δεκαδικά ψηφία, πρέπει να επικαλεστούμε τις συναρτήσεις της εκθετικής αύξησης και της εκθετικής απόσβεσης:

$$\text{Εκθετική αύξηση}$$
$$y = a(1 + r)^x$$

$$\text{Εκθετική απόσβεση}$$
$$y = a(1 - r)^x$$

**Όπου:**  $a$  = η **αρχική τιμή** πριν από τη μέτρηση της αύξησης/ απόσβεσης  
 $r$  = ο σταθερός **ρυθμός** με τον οποίο αλλάζει η αρχική τιμή, αναπαριστάται συνήθως ως ποσοστό και εκφράζεται ως δεκαδικός.  
 $x$  = ένας μεταβλητός εκθέτης που αντιστοιχεί στον αριθμό των χρονικών διαστημάτων που έχουν περάσει.

**Όταν:**  $a > 0$  και  $r > 0$ , υπάρχει μια εκθετική αύξηση.  
 $a > 0$  και  $0 < r < 1$ , υπάρχει μια εκθετική απόσβεση.

Η **εκθετική αύξηση** συχνά χρησιμοποιείται για να προβλέψει την αύξηση ενός πληθυσμού ή μιας χημικής ένωσης. Για παράδειγμα, ας πούμε ότι πληθυσμός σε μια κοντινή πόλη είναι 2.579 άτομα και ότι κάθε χρόνο υπάρχει αύξηση 12%. **Πόσοι άνθρωποι θα υπάρχουν μετά από 5 χρόνια;**

10

Ας μοντελοποιήσουμε πρώτα τη συνάρτηση σύμφωνα με την ερώτηση. Ξέρουμε ότι:

- 1) 2.579 είναι το σημείο εκκίνησης μας
- 2) Υπάρχει αύξηση 12% ή 0,12 ετησίως

Οπότε η συνάρτηση που θα χρησιμοποιηθεί είναι  $P(5) = 2579(1 + 0,12)^5$ , όπου « $P(5)$ » αντιστοιχεί στον πληθυσμό σε 5 χρόνια.

Όσο για τον υπολογισμό:

$$P(5) = 2579(1 + 0,12)^5 \Leftrightarrow P(5) = 2579(1,12)^5 \Leftrightarrow P(5) = 4545$$

**Απάντηση:** Σε πέντε χρόνια, ο πληθυσμός θα είναι περίπου 4.545 άνθρωποι.

Ένα άλλο πλαίσιο στο οποίο εφαρμόζονται οι εκθετικές συναρτήσεις είναι η Φυσική. Οι ραδιενεργές ουσίες είναι άτομα με ασταθή πυρήνα που αποσυντίθενται φυσικά. Σε αυτή την περίπτωση, η εκθετική απόσβεση χρησιμοποιείται για να προβλέψει για πόσο καιρό θα παραμείνει μια ουσία ή πόσο θα διαρκέσει μετά από μια περίοδο.

Εξετάστε ένα δείγμα 10mg ουσίας YXZ που αποσυντίθεται 0,3% ετησίως. **Πόσο μέρος του δείγματος θα μείνει μετά από 8 χρόνια;**

Ας μοντελοποιήσουμε πρώτα τη συνάρτηση σύμφωνα με την ερώτηση. Ξέρουμε ότι:

- 1) Τα 10mg είναι το σημείο εκκίνησης
- 2) Υπάρχει 0,3% ή 0,03 αποσύνθεση το χρόνο

Οπότε η συνάρτηση που θα χρησιμοποιηθεί είναι  $P(8) = 10(1 - 0,03)^8$ , όπου «P(8)» αντιστοιχεί στην ποσότητα που μείνει μετά από 8 χρόνια.

Όσο για τον υπολογισμό:

$$P(8) = 10(1 - 0,03)^8 \Leftrightarrow P(8) = 10(0,97)^8 \Leftrightarrow P(8) = \sim 7,83$$

**Απάντηση:** Σε 8 χρόνια, θα έχουν μείνει περίπου 7,83mg της ουσίας YXZ.

## ΕΡΓΑΣΙΕΣ



### ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Τα βακτήρια είναι μικρόσωμα μονοκύτταρα που αναπαράγονται με διαίρεση σε δύο κύτταρα.

Σκεφτείτε έναν πληθυσμό 20 κυττάρων που διπλασιάζεται κάθε 1 λεπτό.

1.1) Δημιουργήστε έναν πίνακα τιμών και υπολογίστε πόσα κύτταρα θα δημιουργηθούν σε διάστημα 4 ωρών.

1.2) Απεικονίστε την πρόοδο σε μια γραφική παράσταση.



### ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Φανταστείτε ότι επενδύετε 2.000 € με μηνιαίο επιτόκιο 1,5%.

2.1) Πόσο θα είναι το υπόλοιπό σας μετά από μισό χρόνο; Βρείτε τη συνάρτηση της εκθετικής αύξησης και υπολογίστε την.

12



### ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Στην προηγούμενη εκτίμηση των ανθρώπων που συμμετείχαν στο κίνημα που ξεκίνησε ο Τρέβορ, είδαμε ότι μέχρι την 4<sup>η</sup> μέρα, εάν δεν είχε σταματήσει, θα είχαν συμμετάσχει 81 άτομα. Θεωρήστε ότι, για κάποιο λόγο, στο τέλος της 4ης ημέρας, το κίνημα σταματά για 5 μέρες και ότι κάθε μέρα, στο διάστημα των 5 μερών, υπάρχει μείωση 10% των ατόμων που ανταποδίδει τη χάρη μέχρι να ξεκινήσει πάλι το κίνημα.

3.1) Πόσα άτομα θα έχουν μείνει για να συνεχίσουν το κίνημα μέχρι το τέλος της 9<sup>ης</sup> μέρας; Βρείτε τη συνάρτηση της εκθετικής απόσβεσης και υπολογίστε την.

## ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ...

Υπόθεση της ταινίας Χωρίς αντάλλαγμα (2000)

[https://www.imdb.com/title/tt0223897/?ref=mv\\_sr\\_1?ref=mv\\_sr\\_1](https://www.imdb.com/title/tt0223897/?ref=mv_sr_1?ref=mv_sr_1)

Τρέιλερ «Χωρίς αντάλλαγμα»

<https://www.youtube.com/watch?v=qfW0wCV9iFI>

Εισαγωγή στις εκθετικές συναρτήσεις

<https://www.khanacademy.org/math/algebra/introduction-to-exponential-functions/exponential-vs-linear-growth/v/exponential-growth-functions>

Εκθετικές συναρτήσεις: Εκθετική αύξηση και εκθετική απόσβεση

[http://www.softschools.com/math/algebra/topics/exponential\\_equations\\_exponential\\_growth\\_and\\_decay\\_application/](http://www.softschools.com/math/algebra/topics/exponential_equations_exponential_growth_and_decay_application/)

Χαρακτηριστικά εκθετικών συναρτήσεων

<https://mathbitsnotebook.com/Algebra1/FunctionGraphs/FNGTypeExponential.html>