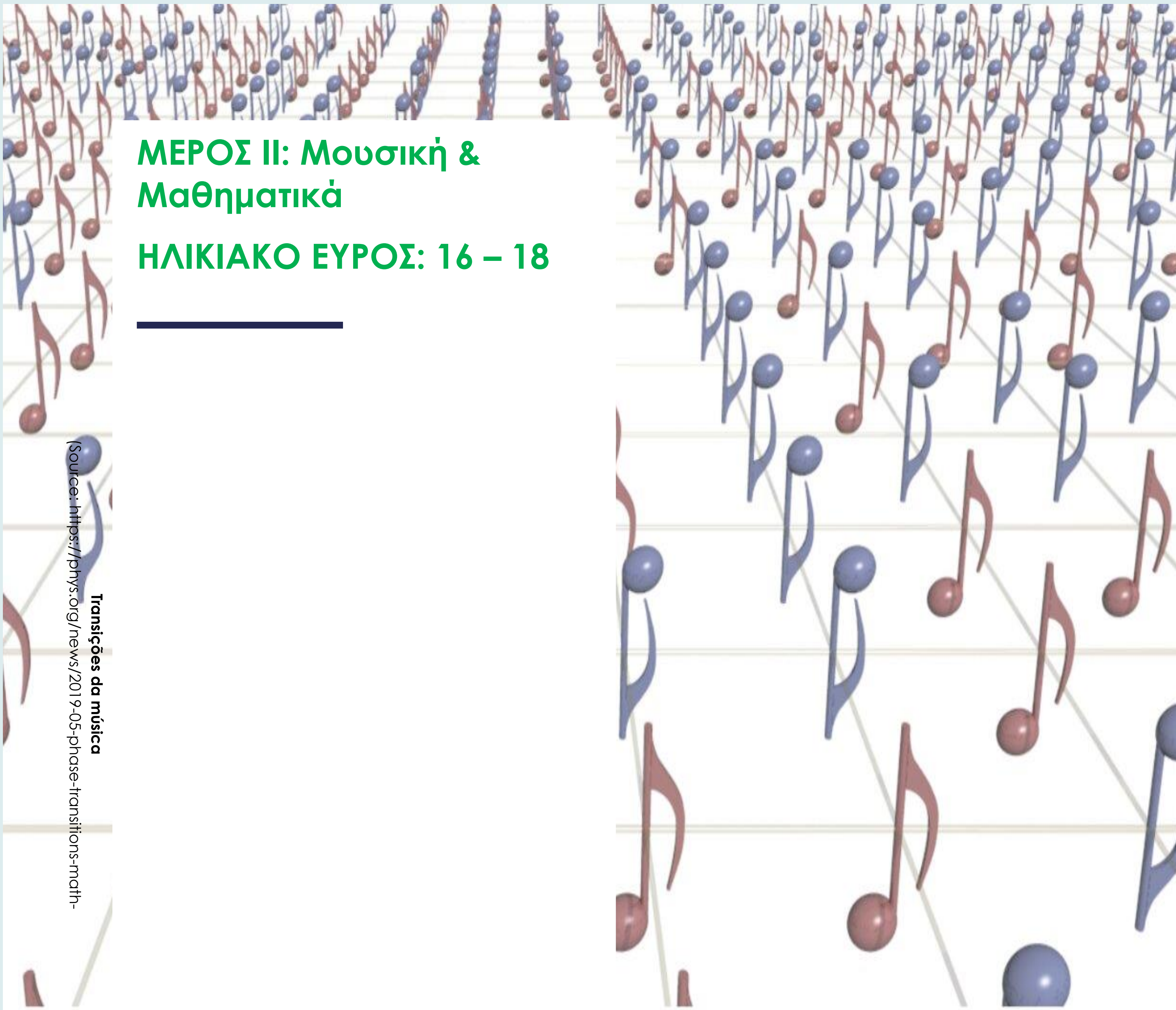
ΜΕΡΟΣ ΙΙ: Μουσική & Μαθηματικά

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16 – 18



Transições da música
(Source: https://phys.org/news/2019-05-phase-transitions-math-

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 27: ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΣΤΗ ΣΥΓΚΕΡΑΣΜΕΝΗ ΚΛΙΜΑΚΑ

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Λογάριθμοι στη συγκερασμένη κλίμακα

Ηλικιακό : 16 – 18 χρονών

Διάρκεια: 3 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Λογάριθμοι, Ιδιότητες λογαρίθμων, Κανόνες Πράξεων με Λογάριθμους

Καλλιτεχνικές Έννοιες: 12-τονη ίση συγκερασμένη, μουσικές νότες και συχνότητες μουσικών νοτών

Γενικοί σκοποί: Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια του λογαρίθμου, τις ιδιότητες μιας λογαριθμικής συνάρτησης και να κάνουν πράξεις που περιλαμβάνουν λογαρίθμους

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Θα ήταν ωφέλιμο να χρησιμοποιήσετε μια επιστημονική αριθμομηχανή (μπορεί να είναι η διαδικτυακή αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων Desmos), έτσι ώστε ο μαθητής να μπορέσει να μάθει πώς να υπολογίζει εκθέτες στην αριθμομηχανή και να είναι σε θέση να επαληθεύει τα αποτελέσματα/λύσεις των εργασιών.

Πηγές: Υπολογιστής με σύνδεση στο διαδίκτυο, πρόσβαση στην ιστοσελίδα: https://www.desmos.com/

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Ξεκινήστε δίνοντας παραδείγματα για τον υπολογισμό λογαρίθμων, αυξάνοντας τον βαθμό δυσκολίας, εξηγώντας παράλληλα τις ιδιότητες και τις μεταβολές τους σύμφωνα με τη βάση τους.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες:

Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- Κατασκευάζει το γράφημα μιας λογαριθμικής συνάρτησης
- Υπολογίζει την τιμή λογαρίθμων με διαφορετικές βάσεις.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά και η μουσική ήταν πάντα συνδεδεμένα. Ωστόσο, η πρώτη απόδειξη αυτής της σχέσης βρέθηκε μόλις τον 6ο αιώνα π.Χ. Ο Πυθαγόρας συνέκρινε τον ήχο που παράγεται από σφυριά διαφορετικού μήκους, που χρησιμοποιούνται από τους σιδεράδες, με τον ήχο του μονόχορδου, του οποίου ο εφευρέτης θεωρείται ότι ήταν ο Πυθαγόρας.

Αυτή η σύγκριση επέτρεψε στον Πυθαγόρα να ανακαλύψει και να βελτιώσει το μαθηματικό συλλογισμό πίσω από τους ήχους, μέσα από τη μελέτη των ήχων που παράγει το μονόχορδο. Διαίρεσε τη χορδή σε δύο ίσα μέρη, στη συνέχεια σε τρία ίσα μέρη και ούτω καθεξής. Ταίριαξε τους ήχους με μαθηματικό τρόπο σύμφωνα με τις υποδιαιρέσεις που έκανε και δημιούργησε την Πυθαγόρεια κλίμακα, όπου κάθε νότα διατηρούσε μια καλά καθορισμένη σχέση με την άλλη.

Η Πυθαγόρεια κλίμακα είναι η βάση της διατονικής κλίμακας, η οποία αποτελείται από επτά νότες, η οποία είναι η βάση του σχηματισμού όλων των άλλων κλιμάκων που χρησιμοποιούνται στη δυτική μουσική. Μία από τις κλίμακες που εμφανίστηκαν στη δυτική κουλτούρα ήταν η 12-τονη ίση συγκερασμένη, γνωστή ως συγκερασμένη κλίμακα ή χρωματική κλίμακα, στην οποία υπάρχει μεγαλύτερη αρμονία μεταξύ των νοτών.

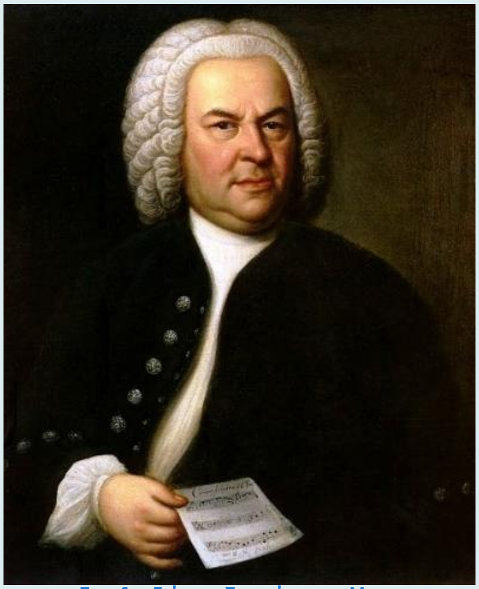
Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Εκθέτες στη Συγκερασμένη Κλίμακα

Τον 6ο αιώνα π.Χ., ο Πυθαγόρας χρησιμοποίησε το μονόχορδο για να μελετήσει τη σχέση μεταξύ του μήκους της παλλόμενης χορδής και του μουσικού τόνου που παράγει. Φανταστείτε μια χορδή που τεντώνεται και είναι σταθεροποιημένη και στα δύο άκρα. Όταν αγγίζεται το ένα άκρο αυτής της χορδής, ταλαντεύεται και παράγει μια νότα που ονομάζεται θεμέλιος νότα. Ο Πυθαγόρας διαίρεσε στη συνέχεια τη χορδή σε δύο ίσα μέρη, στη συνέχεια σε τρία και ούτω καθεξής. Καθώς συνέχιζε να υποδιαιρεί τη χορδή, αποκτώντας τις αρμονικές της θεμελίου νότας και συνδυάζοντας τους ήχους με μαθηματικό τρόπο, δημιούργησε κλίμακες οι οποίες παρήγαγαν νότες που συνδέονταν φυσικά μεταξύ τους.

Διατηρώντας τα ίδια διαστήματα (αριθμητικός λόγος $\frac{3}{2}$) μεταξύ των νοτών και ξεκινώντας από το διάστημα οκτάβας που δίνεται από τις συχνότητες $\mathbf{f_0}$ και $\mathbf{2f_0}$, μπορεί να σχηματιστεί η Πυθαγόρεια διατονική κλίμακα. Οι νότες που προέκυψαν, κοινώς γνωστές ως C, R, E, F, G, A και B, συμβολίζονται στις περισσότερες χώρες με βάση τη σύμβαση ονοματολογίας σολφέζ (solfège) Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Ti (ή Si) και αντίστοιχα C-Do, D-Re, E-Mi, F-Fa, G-Sol, A-La και B-Ti (ή Si), σχηματίζοντας τη γνωστή διατονική κλίμακα των επτά νοτών που για αιώνες αποτέλεσε τη βάση άλλων κλιμάκων.

Από τον Μεσαίωνα και έπειτα, έγινε αισθητό ότι ορισμένες νότες ήταν πολύ κοντά μεταξύ τους (για παράδειγμα, οι νότες B και C), οπότε αποφασίστηκε να δημιουργηθεί μια κλίμακα στην οποία το διάστημα συχνοτήτων μεταξύ όλων των νοτών θα ήταν ο ίδιος λόγος. Η τιμή του είναι το διάστημα μεταξύ των νοτών C και B (ένα ημιτονόνιο). Ως αποτέλεσμα, η 12-τονη ίση συγκερασμένη κλίμακα διαμορφώθηκε και βελτιώθηκε από τον Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ.



Εικ. 1 - Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ
(Πηγή:https://commons.wikimedia.org/wiki/Johann_Sebastian_Bach)

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

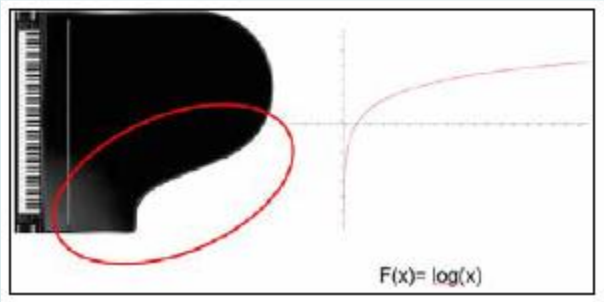
Σε αντίθεση με τον Πυθαγόρα που είχε σχηματίσει τη διατονική κλίμακα με την απόκτηση 7 νοτών μέσω μιας διαίρεσης που μπορεί να αναπαρασταθεί από κλάσματα, αυτή η νέα ιδιοσυγκρασία μπορεί να αναπαρασταθεί από δυνάμεις του 2 και έχει ως αποτέλεσμα τις 12 νότες: C, C #, D, D #, E, F, F #, G, G #, A, A # και B.

Νότα	Ημιτόνιο	Πυθαγόρεια κλίμακα	12-τονη ιση συγκερασμένη	Αρμονια
C	0	1	1	1
C#	1		$2^{1/12}$	
D	2	$^{9}/_{8}$	$2^{2/12}$	
D#	3		$2^{3/12}$	$^{6}/_{5}$
E	4	$^{81}/_{64}$	$2^{4/12}$	$^{5}/_{4}$
F	5	$^{4}/_{3}$	$2^{5/12}$	$^{4}/_{3}$
F#	6		$2^{6/12}$	
G	7	$^{3}/_{2}$	$2^{7/12}$	$^{3}/_{2}$
G#	8		$2^{8/12}$	
A	9	$^{27}/_{16}$	$2^{9/12}$	$^{5}/_{3}$
A#	10		$2^{10/12}$	
B	11	$^{243}/_{128}$	$2^{11/12}$	
C (octave)	12	2	2	2

Πίνακας 1: Διαίρεση οκτάβας σε ίση συγκερασμένη

Με άλλα λόγια, οι 12 νότες της συγκερασμένης ή χρωματικής κλίμακας αντιστοιχούν στους λογαρίθμους της βάσης 2: $\mathbf{2^0}$, $\mathbf{2^{\frac{1}{12}}}$, $\mathbf{2^{\frac{2}{12}}}$, …, $\mathbf{2^{\frac{2}{12}}}$ και $\mathbf{2}$.

Μια τέτοια αντιστοιχία σημαίνει διαφορετικά μεγέθη χορδών στα μουσικά όργανα. Συμπτωματικά, οι δομές του πιάνου που έχουν σχήμα σύμφωνα με το μέγεθος των χορδών, οδηγούν σε σχήμα που μοιάζει με λογαριθμική συνάρτηση.



Εικ. 2 – Πιάνο και η λογαριθμική συνάρτηση
(Πηγή: RBECM, Passo Fundo, v. 1, n. 2, jul./dec. 2018)

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Γλωσσάρι

#: Σύμβολο που ονομάζεται δίαιση και συμβολίζει το ύψος του ημιτόνιου σε μια νότα.

Διατονική κλίμακα: διαχωρισμός της οκτάβας σε επτά τονικά ύψη.

Συχνότητα: μια φυσική τιμή που υποδεικνύει τον αριθμό των επαναλήψεων ενός γεγονότος σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Θεμελειώδης συχνότητα: η χαμηλότερη και ισχυρότερη συχνότητα της αρμονικής σειράς ενός ήχου.

Θεμέλιος νότα: η κύρια νότα μιας συγχορδίας, από την οποία προέρχονται οι άλλες συγχορδίες.

Αρμονική: ο ήχος μιας σειράς που συνιστά μια νότα.

Μονόχορδο: ένα αρχαίο μουσικό όργανο που αποτελείται από μια ενιαία χορδή πάνω από ένα ακουστικό ηχείο.

Οκτάβα: διάστημα μεταξύ μιας μουσικής νότας και μιας άλλης με τη μισή ή τη διπλάσια συχνότητά της.

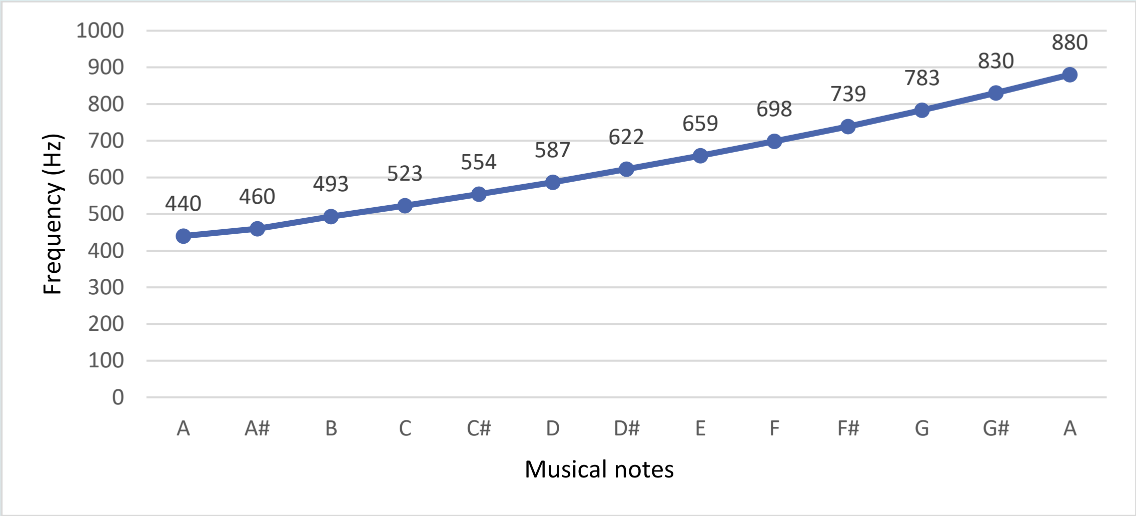
(Μουσική) Κλίμακα: διατεταγμένη ακολουθία τόνων από τη συχνότητα δόνησης των ήχων (συνήθως από τον χαμηλότερο ήχο συχνότητας έως τον υψηλότερο ήχο συχνότητας).

Συγκερασμένη κλίμακα: διαίρεση της οκτάβας σε δώδεκα ίσα ημιτόνια. Επίσης είναι γνωστή ως χρωματική κλίμακα.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Μαθηματικά πίσω από τη Συγκερασμένη Κλίμακα

Όπως είδαμε πριν, η συγκερασμένη κλίμακα (ή χρωματική κλίμακα) χωρίστηκε σε 12 νότες που μπορούν να αναπαρασταθούν με τη χρήση λογαρίθμων. Έχοντας υπόψη αυτό το γεγονός, ας ρίξουμε μια ματιά στο σχήμα μιας λογαριθμικής καμπύλης:



Εικ. 3 – Συχνότητες συγκερασμένης κλίμακας
(Πηγή: Author; Obs: Frequency (Hz) values rounded for better displaying)

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τους λογαρίθμους, ας δούμε αυτή την έννοια και τις ιδιότητές της.

Λογαριθμικός αριθμός: συνάρτηση λογαρίθμου βάσης α

Ποιος είναι ο λογάριθμος του 8 με τη βάση 2;

Η απάντηση είναι 3, επειδή $\mathbf{2^3 = 8}$.

Η έκφραση "το 3 είναι ο λογάριθμος του 8 με τη βάση 2" αναπαρίσταται ως: $\mathbf{\log_2 8 = 3}$.

Ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού $\boldsymbol{x}$ με βάση $\mathbf{a}$, με $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^+\backslash\{\mathbf{1}\}$, σε ένα αριθμό $\boldsymbol{y}$, όπως: $\mathbf{a^y = x}$ αναπαρίσταται ως $\mathbf{\log_a x}$, δηλαδή,

$$\mathbf{\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη αυτό $\mathbf{a^1 = a}$ και $\mathbf{a^0 = 1}$, τότε:

$\boxed{\mathbf{\log_a a = 1}}$ και $\boxed{\mathbf{\log_{\boldsymbol{a}} 1 = 0}}$

Και επίσης:

$\boxed{\log_a a^x = x}$ και $\boxed{a^{\log_a x} = x}$

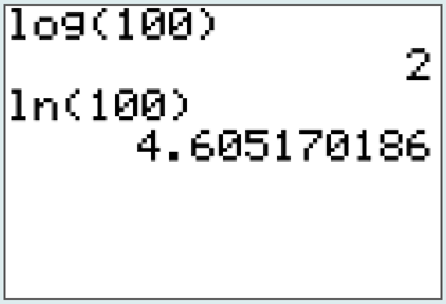
Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Λογάριθμός βάσης 10 και λογάριθμος βάσης $\mathbf{e}$

Μεταξύ όλων των δυνατών βάσεων, δύο είναι ιδιαίτερα συχνές: βάση 10 και βάση $\mathbf{e}$. Σε περίπτωση λογαρίθμου με βάση 10, που ονομάζεται «κοινός λογάριθμος», η βάση του μπορεί να παραλειφθεί. Ως εκ τούτου, μπορεί απλά να αναπαρασταθεί ως $\mathbf{\log x}$ αντί για $\mathbf{\log_{10} x}$.

Ομοίως, ο λογάριθμος με βάση $\mathbf{e}$, που ονομάζεται «φυσικός λογάριθμος», μπορεί να αναπαρασταθεί ως $\mathbf{\ln x}$ αντί για $\mathbf{\log_e x}$.

Ο υπολογισμός των λογαρίθμων σε μια αριθμομηχανή μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τα πλήκτρα «LOG» και «LN».



Εικ. 4 – Υπολογισμός λογαρίθμων
(Πηγή: Graphing calculator Texas Ti-84 Plus)

Πιο συγκεκριμένα, για να επαληθεύσουμε ότι:

- $\mathbf{10^2 = 100}$, χρησιμοποιήστε το πλήκτρο «LOG», το οποίο χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό λογαρίθμων με τη βάση 10.
- $\mathbf{e^{4,605} \cong 100}$ χρησιμοποιήστε το κουμπί «LN», το οποίο χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό λογαρίθμων με βάση $\mathbf{e}$.

Λογαριθμικές Συναρτήσεις

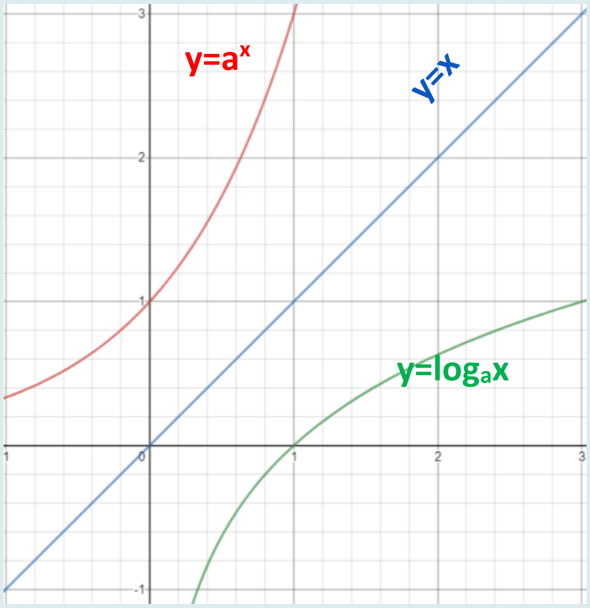
Μια λογαριθμική συνάρτηση της βάσης $\boldsymbol{a > 1}$ είναι μια συνάρτηση στην οποία

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{x \longmapsto y = \log_a x}$$

Τα γραφήματα των συναρτήσεων $\mathbf{f(x) = a^x}$ και $\mathbf{g(x) = \log_a x}$ είναι συμμετρικά ως προς τη γραμμή εξίσωσης $\mathbf{y = x}$. Επομένως, οι συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ είναι αντίστροφες συναρτήσεις.

Αυτές οι συναρτήσεις έχουν, έχουν για $\mathbf{a > 1}$, τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις:

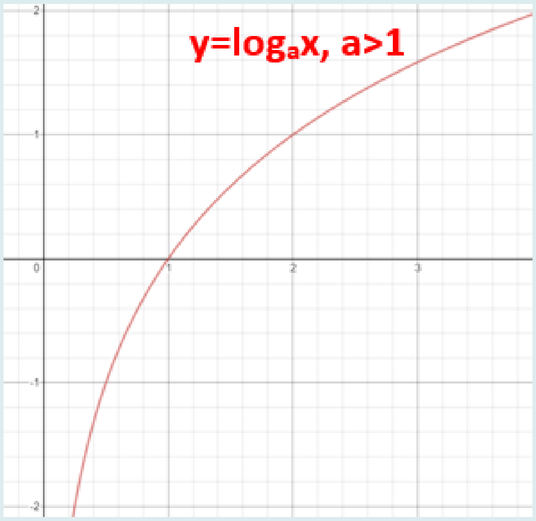
Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.



Εικ. 5 – Γραφήματα συναρτήσεων a^x και $\log_a x$
(Πηγή: Author, Desmos.com)

Ιδιότητες των λογαριθμικών συναρτήσεων

Οι ιδιότητες των λογαριθμικών συναρτήσεων σχετίζονται με τις ιδιότητες των αντίστοιχων αντιστρόφων συναρτήσεων (εκθετικές συναρτήσεις).



Εικ. 6 – Γράφημα συνάρτησης $y=\log_a x$
(Πηγή: Author, Desmos.com)

Εάν $\begin{array}{c}\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\\ \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{y} = \mathbf{\log_a x}\end{array}$ με $\mathbf{a > 1}$, η γραφική παράστασή του θα εμφανίσει το σχήμα στην εικ. 6 και οι ιδιότητες της συνάρτησης $\mathbf{f}$ θα είναι:

- f είναι συνεχής
- Πεδίο ορισμού: $D = \mathbb{R}^+$
- Πεδίο τιμών: $D' = \mathbb{R}$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, δηλαδή, $f(1) = 0$
- f αυξάνεται αυστηρά
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, δηλαδή, η γραμμή εξίσωσης $x = 0$ είναι μια κατακόρυφη ασυμπτωτική του γραφήματος f

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Κανόνες πράξεων των λογαρίθμων

Οι κανόνες πράξεων των λογαρίθμων σχετίζονται με τους κανόνες πράξεων των δυνάμεων. Μερικοί από τους κανόνες πράξεων είναι:

Θεωρούμε ότι $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^+, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^+$ και $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\mathbf{1}\}$.

1. Λογαριθμική ταυτότητα γινομένου

Ο λογάριθμος ενός γινομένου είναι το άθροισμα των λογαρίθμων:

$$\mathbf{log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)}$$

2. Λογαριθμική ταυτότητα πηλίκου

Ο λογάριθμος ενός πηλίκου είναι η διαφορά λογαρίθμων:

$$\mathbf{log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)}$$

3. Λογαριθμική ταυτότητα δύναμης

Ο λογάριθμος μιας δύναμης είναι το γινόμενο του εκθέτη πολλαπλασιαζόμενο με τον λογάριθμο της βάσης:

$$\mathbf{log_a(x^y) = y \times log_a(x), \quad p \in \mathbb{R}}$$

Εξαιρέσεις:

$\boxed{\mathbf{log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -log_a(x)}}$ επειδή $\mathbf{\frac{1}{x} = x^{-1}}$ και $\boxed{\mathbf{log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{log_a(x)}{n}}}$; $\mathbf{\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}}$

4. Αλλαγή βάσης

Ο λογάριθμος $\mathbf{x}$ με βάση $\mathbf{a}$ είναι το πηλίκο του λογαρίθμου $\mathbf{x}$ με βάση $\mathbf{b}$ και ο λογάριθμος του $\mathbf{a}$ με βάση $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}}, \quad \text{με } \mathbf{a} \text{ και } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\mathbf{1}\}$$

Αυτός ο κανόνας είναι απαραίτητος όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τον λογάριθμο ενός αριθμού του οποίου η βάση είναι διαφορετική από 10 ή $\mathbf{e}$, χρησιμοποιώντας την αριθμομηχανή.

Παράδειγμα: $\mathbf{log_3 5 = \frac{ln\,5}{ln\,3} \simeq 1,46}$ ή $\mathbf{log_3 5 = \frac{log\,5}{log\,3} \simeq 1,46}$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Υπολογίστε την τιμή:

1.1. $\log_2 64$ 1.2. $\log_5 5$ 1.3. $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ 1.4. $\log_4 1$ 1.5. $\log_{\frac{1}{4}} 2$

1.6. $\log_{\sqrt{5}} 125$ 1.7. $\log_{10} 1000$ 1.8. $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ 1.9. $\log_2 \sqrt{2}$ 1.10. $\log_e \sqrt[3]{e^4}$

1.11. $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 1.12. $\log_5 0,2$ 1.13. $\log_e(e^{-2}) + \log_2\left(\frac{1}{32}\right)$

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Υπολογίστε την τιμή:

2.1. $\log 10000;$

2.2. $\log 0,01;$

2.3. $\ln e^{-7};$

2.4. $\ln(\sqrt[5]{e}) - \ln(e) + \ln(e^{-3});$

2.5. $\log(10) + \log(1) - \ln(e^2);$

2.6. $\ln(e^{-1}) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) + \log(\sqrt{10}).$

ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων, και επαληθεύστε τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας μια αριθμομηχανή:

3.1. $\log_2(64 \times 16);$ 3.2. $\log_3(81:27);$ 3.3. $\log_2(32^8).$

ΕΡΓΑΣΙΑ 4

Θεωρήστε ότι $\log_2 a = \frac{1}{5}$. Προσδιορίστε την τιμή του: $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ…

Χρωματική κλίμακα

https://www.youtube.com/watch?v=2gy6E3X2mKQ

Εισαγωγή στους Λογαρίθμους

https://www.khanacademy.org/math/algebra2/exponential-and-logarithmic-functions/introduction-to-logarithms/v/logarithms

Βασική Ιδέα και Κανόνες Λογαρίθμων

https://mathinsight.org/logarithm_basics

12-τονη Ίση Συγκερασμένη

http://www.tonalsoft.com/enc/number/12edo.aspx

Γιατί 12 νότες σε μια Οκτάβα;

https://www.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/tuning/12.html

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.