ΜΕΡΟΣ II: Μουσική & Μαθηματικά

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16-18

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 20: Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΠΑΛΜΟΥ

LogoPsyCom

TheArtOf Maths

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Η εξίσωση του παλμού

Ηλικιακό Εύρος: 16-18 χρονών

Διάρκεια: 1 ώρα

Μαθηματικές Έννοιες: η θεωρία του παλμού, τριγωνομετρικές ταυτότητες, ημιτονοειδή κύματα

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Συχνότητα, τονικό ύψος, ηχητικά κύματα

Γενικοί Σκοποί: : Να ανακαλύψουν οι μαθητές τις μαθηματικές έννοιες που κρύβονται πίσω από τις μουσικές συνθέσεις και να δουν την πιο πρακτική πλευρά της χρήσης των μαθηματικών.

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Οι μαθητές θα διερευνήσουν και τα δύο πεδία ως σύνολο, ακούγοντας ή παίζοντας μουσική και παρακολουθώντας τα προτεινόμενα βίντεο που αναλύουν τις μουσικές συνθέσεις. Θα ανακαλύψουν τη βάση των προαναφερθέντων μαθηματικών εννοιών.

Πηγές: Αυτό το εργαλείο παρέχει διαδικτυακές πηγές που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στην τάξη σας. Τα θέματα που εξετάζονται στο εργαλείο θα σας βοηθήσουν να βρείτε επιπλέον υλικό για να εξατομικεύσετε και να δώσετε μια διαφορετική διάσταση στο μάθημα.

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Η μάθηση μέσα από την πράξη είναι πολύ αποτελεσματική, ειδικά για νεαρούς μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Πάντα να εξηγείτε την πρακτική χρήση της κάθε μαθηματικής έννοιας και να δημιουργείτε μια διαδραστική εμπειρία για αυτούς.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες: Στο τέλος του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- Κατανοεί το συλλογισμό πίσω από τη μουσική σύνθεση,
- Κατανοεί τις τριγωνομετρικές ταυτότητες,
- Κατανοεί και να χρησιμοποιεί την εξίσωση του παλμού.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν

Εισαγωγή

Η μουσική και τα μαθηματικά δεν φαίνεται να έχουν μια ξεκάθαρη σύνδεση για όσους δεν έχουν συνθέσει ή δεν έχουν διαβάσει μια παρτιτούρα. Ωστόσο, είναι εμφανές ότι ο συγχρονισμός των μουσικών συνθέσεων και η δομή της παρτιτούρας με μέτρα παραπέμπουν σε έναν μαθηματικό τρόπο σκέψης.

Πολλοί ερευνητές έχουν μελετήσει τον αντίκτυπο των μαθηματικών στην τέχνη. Η μουσική ήταν ένα από τα σημεία εστίασης των ερευνών τους και διαπιστώθηκε ότι, ανά τους αιώνες, πολλοί μαθηματικοί είχαν διερευνήσει αυτό το ερώτημα. Ο Πυθαγόρας, ο Leonardo Bonacci (επίσης γνωστός ως Fibonacci), και πολλοί άλλοι έχουν συμβάλει στην έρευνα. Διαφορετικές πτυχές των μαθηματικών, που κυμαίνονται από τη βασική γεωμετρία και τις ακολουθίες αριθμών μέχρι την τριγωνομετρία, έχουν αποδειχθεί ότι χρησιμοποιούνται σε μουσικές συνθέσεις.

Μέσα σε αυτό το εργαλείο, θα επικεντρωθούμε στη δυνατότητα εφαρμογής των μαθηματικών σε μουσικές συνθέσεις εξετάζοντας αρχικά το Πυθαγόρειο σύστημα κουρδίσματος και εξερευνώντας τις επιλογές που προσφέρει στη μουσική σύνθεση.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν

Πώς λειτουργεί η μουσική;

Όταν παίζουμε μουσική, οι ταλαντώσεις που παράγονται και η κίνηση των σωματιδίων του αέρα περνάν μέσα στα αυτιά μας και μας επιτρέπουν να ακούμε τους ήχους στη σωστή συχνότητα. Αν παρατηρήσετε μια χορδή κιθάρας, μπορείτε να δείτε ότι κινείται με ένα συγκεκριμένο τρόπο και με ένα συγκεκριμένο ρυθμό. Όταν τεντώνουμε μια χορδή, το τονικό της ύψος πηγαίνει υψηλότερα και η συχνότητά της γίνεται γρηγορότερη. Αυτό που παράγεται ονομάζεται ηχητικό κύμα και πηγαίνει κατευθείαν στα αυτιά μας, μετακινώντας το υγρό του κοχλία μας, στο εσωτερικό μέρος του αυτιού μας.

Φυσικά, ο Πυθαγόρας, Έλληνας φιλόσοφος από το 570 – περ. 495 π.Χ. δεν γνώριζε όλα όσα γνωρίζουμε σήμερα για το ανθρώπινο σώμα και τη μουσική σύνθεση. Ωστόσο, ανέπτυξε μια θεωρία για τον τρόπο υπολογισμού των λόγων των διαστημάτων, κάτι το οποίο θα μάθετε σε αυτό το μάθημα. Ο θρύλος λέει ότι άκουσε διαφορετικούς ήχους που προέρχονταν από σφυριά στο σιδηρουργείο και ανακάλυψε ότι όταν ένα σφυρί ήταν διπλάσιο σε μέγεθος ή βάρος από το άλλο, παρήγαγε την ίδια νότα αλλά κατά μία οκτάβα υψηλότερη.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν

Γλωσσάρι

Συχνότητα: μας δίνει την ταχύτητα της ταλάντωσης και το τονικό ύψος ενός ήχου

Τονικό ύψος: είναι είτε μια νότα που ακούγεται υψηλα ή χαμηλά και υπολογίζεται σε Hertz.

Ηχητικό κύμα: αντιπροσωπεύει τη ταλάντωση που παράγεται από έναν ήχο. Το μήκος και η ταχύτητα του καθορίζουν το τονικό ύψος ή τη συχνότητα του ήχου.

Κοχλίας: η ελικοειδής κοιλότητα η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό του αυτιού που αντιδρά σε ηχητικές ταλαντώσεις.

Διάστημα: είναι η διαφορά του τονικού ύψους ανάμεσα σε δύο ήχους.

Οκτάβα: είναι η διαφορά του τονικού ύψους ανάμεσα σε μια νότα και μιας άλλης που έχει τη διπλάσια συχνότητά της.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν

Τα μαθηματικά πίσω από τη μουσική σύνθεση

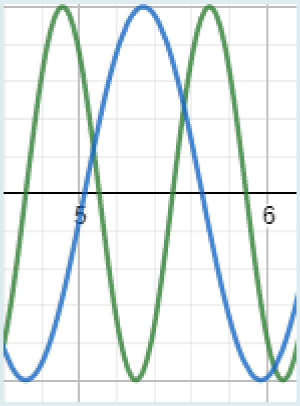
Η Εξίσωση του Παλμού

Μάθατε ότι η συχνότητα ενός ήχου συνδέεται στενά με τα ηχητικά κύματα που μπορούμε να σχεδιάσουμε για να αναπαραστήσουμε τους ήχους οπτικά. Υπάρχει ένα άλλο φαινόμενο που ονομάζεται «παλμός», το οποίο παράγεται από τις διακυμάνσεις μεταξύ δύο ηχητικών κυμάτων που παίζονται ταυτόχρονα. Αν έχετε δύο ηχητικά κύματα που αλληλεπικαλύπτονται, θα παρατηρήσετε διαφορετικά φαινόμενα.

- Αν τα δύο ηχητικά κύματα είναι **ενισχυτικής συμβολής**, πράγμα που σημαίνει ότι είναι απόλυτα αλληλεπικαλυπτόμενα, ο ήχος που θα ακούσετε εκείνη τη στιγμή θα είναι πιο δυνατός.

Εικόνα 1: Ηχητικά κύματα ενισχυτικής συμβολής

- Εάν τα ηχητικά κύματα είναι **καταστροφικής συμβολής**, πράγμα που σημαίνει ότι οι κορυφές τους θα είναι απέναντι η μία στην άλλη, ο ήχος που θα ακούσετε θα είναι πιο **μαλακός**.



Εικόνα 2: Ηχητικά κύματα καταστροφικής συμβολής

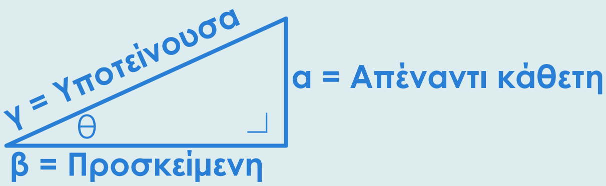
Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν

- Αν είναι συνεχή και τα δυο κύματα, θα ακούσετε έναν κανονικό παλμό, εάν τα αφουγκραστείτε μαζί την ίδια στιγμή.

Δείτε το βίντεο από το SMUPhysics το οποίο δείχνει πως ακούγεται: https://www.youtube.com/watch?v=V8W4Djz6jnY.

Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Τα ηχητικά κύματα μπορούν να αναπαρασταθούν γραφικά με ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει να μάθετε για τις τριγωνομετρικές ταυτότητες. Θα ξεκινήσουμε με τρίγωνα αφού γνωρίζετε ήδη το Πυθαγόρειο θεώρημα. Εδώ υπάρχει ένα ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία θ:



Εικόνα 3: Αναπαράσταση ενός τριγώνου
για την παρουσίαση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

Παρακάτω βρίσκονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε αυτό το τρίγωνο:

- ημω(θ) = $\frac{\text{Απέναντι}}{\text{Υποτείνουσα}} = \frac{\alpha}{\gamma}$
- συν(θ) = $\frac{\text{Προσκείμενη}}{\text{Υποτείνουσα}} = \frac{\beta}{\gamma}$
- εφω(θ) = $\frac{\text{Κάθετη}}{\text{Προσκείμενη}} = \frac{\alpha}{\beta}$

Αν πάρουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα, θα θυμηθείτε αυτόν τον τύπο για να υπολογίσετε την υποτείνουσα: α2 + β2 = γ2. Αυτός ο τύπος μπορεί να απλοποιηθεί διαιρώντας τα πάντα με το γ2.

- $\frac{\alpha^2}{\gamma^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2}$
- $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = 1$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- $ημω^2(θ) + συν^2(θ) = 1$
- $συν^2(θ) = 1 – ημω^2(θ)$
- $ημω^2(θ) = 1 – συν^2(θ)$

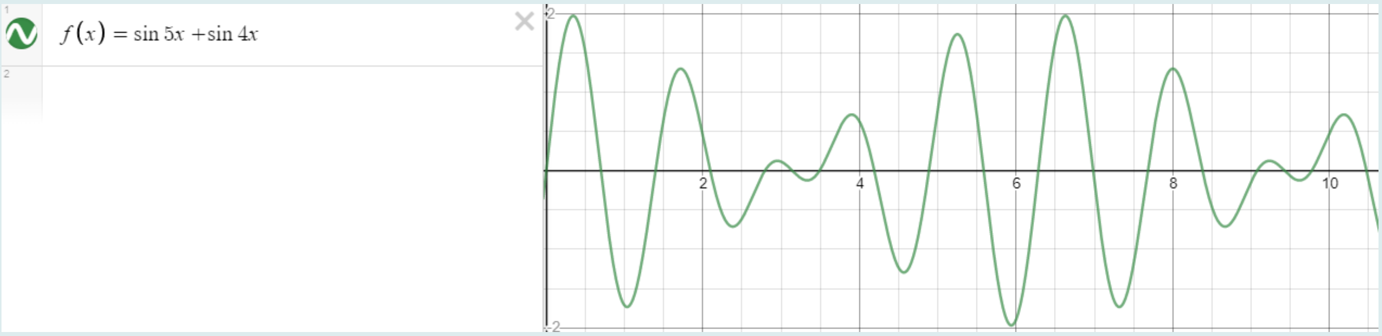
Αυτή είναι μια από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες που πρέπει να θυμάστε!

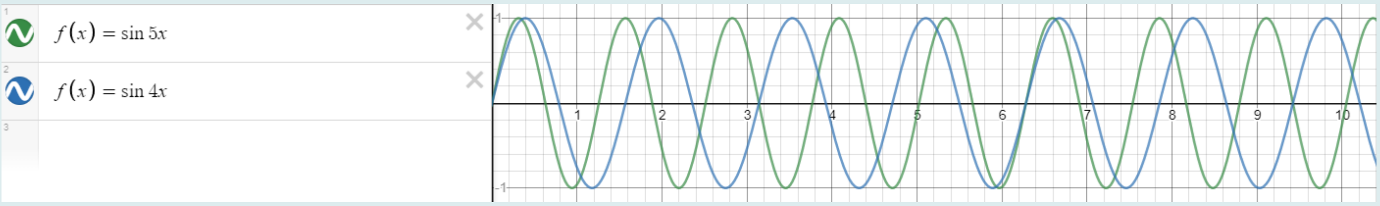
Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι σύνθετες και υπάρχουν αρκετοί τύποι που έχουν αποδειχθεί, όπως ο παρακάτω που χρησιμοποιείται για να αναπαριστά τη συχνότητα του παλμού:

$$\boxed{\mathbf{ημω\ a + ημω\ b = 2\ ημω\left(\frac{a+b}{2}\right) * συν\left(\frac{a-b}{2}\right)}}$$

Ας ξεκινήσουμε πρώτα με ένα εύκολο παράδειγμα.

Εάν αποφασίσουμε ότι α = 5x και β = 4x, φαίνεται κάπως έτσι αν χρησιμοποιήσουμε μια αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων:





Εδώ βλέπουμε:

- Υπάρχει ένας συνεχής κύκλος
- Όταν οι δύο κορυφές είναι η μία κοντά στην άλλη, ο ήχος γίνεται υψηλότερος
- Όταν μια κορυφή και μια κοιλάδα αντιτίθενται, ο ήχος πλησιάζει στο 0

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν

Ας το δούμε αυτό με μια μουσική νότα. Η νότα A ή La έχει συχνότητα 440 Hz. Η τριγωνομετρική εξίσωσή της είναι:

$$\boldsymbol{\eta\mu\omega(440 * 2\pi * x)}$$

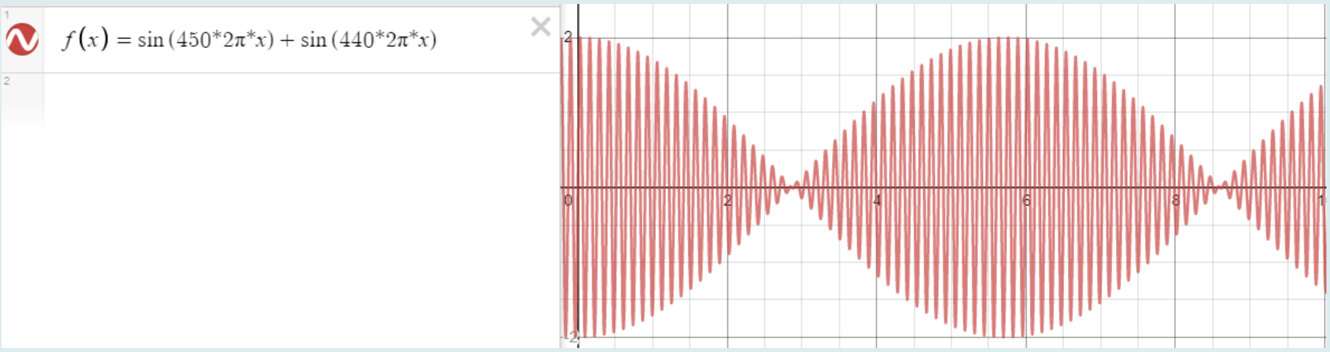
Οπότε έχουμε:

- α ως $(450 * 2\pi * x)$ για να έχει μια άλλη νότα κοντά στην A/La
- β ως $(440 * 2\pi * x)$

Ας εφαρμόσουμε την εξίσωση του παλμού

- $\eta\mu\omega(450 * 2\pi * x) + \eta\mu\omega(440 * 2\pi * x) = 2\eta\mu\omega(445x * 2\pi) + \sigma\upsilon\nu(5x * 2\pi)$

Έτσι φαίνεται όταν τα ενώνετε χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων:



Βλέπετε ότι, όταν ενώνονται, τα κύματα που εμφανίζονται στο εργαλείο δείχνουν έναν παλμό όπως αυτός που ακούστηκε όταν έγινε το πείραμα με τα δύο διαπασών.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν

ΕΡΓΑΣΙΑ

Δοκιμάστε το και εσείς!

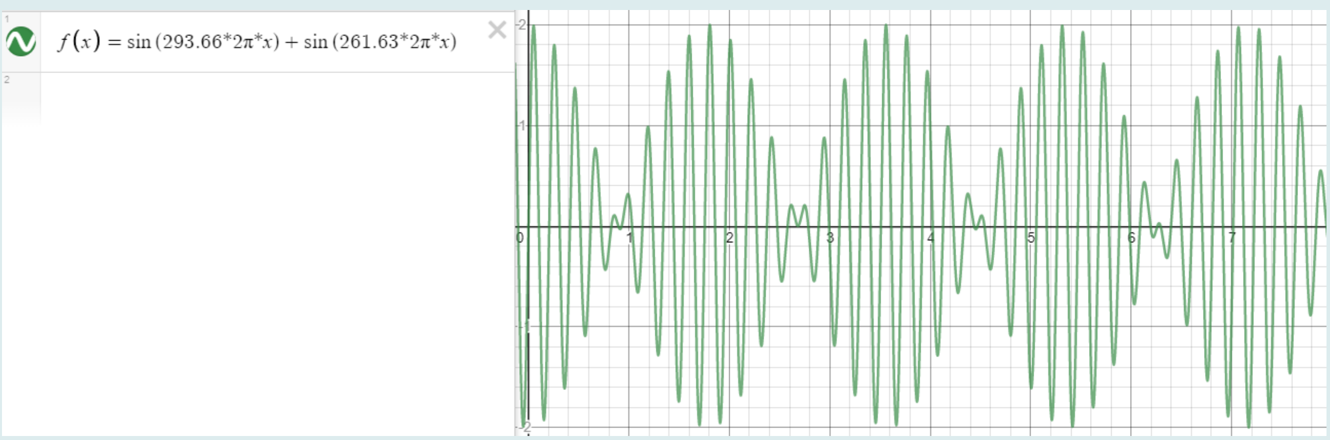
Εδώ υπάρχει ένας πίνακας με τις διαφορετικές συχνότητες ορισμένων μουσικών νοτών:

C	D	E	F	G	A	B
261.63 Hz	293.66 Hz	329.63 Hz	349.23	392 Hz	440 Hz	493.88

Άσκηση 1: D και C

- Ποια είναι η εξίσωση του παλμού αν παίξουμε D και C μαζί;

- Βγάλτε ένα στιγμιότυπο οθόνης του γραφήματος στο Desmos ή στο GeoGebra:

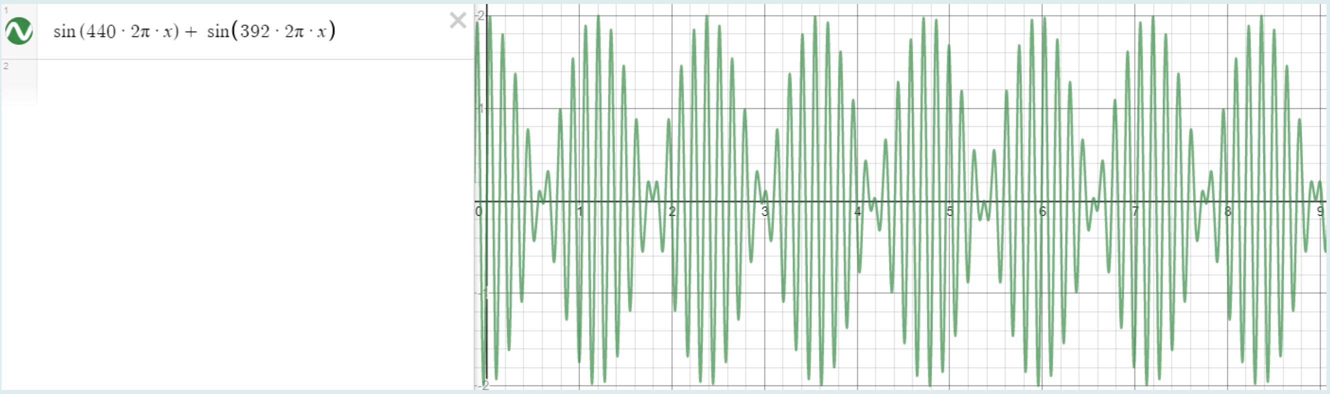


Άσκηση 2: A και G

- Ποια είναι η εξίσωση του παλμού αν παίξουμε A και G μαζί;

- Βγάλτε ένα στιγμιότυπο οθόνης του γραφήματος στο Desmos ή στο GeoGebra:

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν



Για ακόμα μεγαλύτερη διασκέδαση, χρησιμοποιήστε δύο διαπασών στην τάξη σας για να συγκρίνετε τους ήχους!

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ…

Ted-ED βίντεο για τα μοτίβα στη μουσική:

https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY

Βίντεο σχετικά με την προέλευση του ήχου:

https://www.youtube.com/watch?v=i_0DXxNeaQ0

Βίντεο σχετικά με το πώς χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά στη μουσική:

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

Μάθημα σχετικά με τον παλμό στη μουσική:

https://www.youtube.com/watch?v=Ca91iOVGd9A

Βίντεο σχετικά με τη φυσική πίσω από τη συχνότητα του παλμού:

https://www.youtube.com/watch?v=IQ1q8XvOW6g

Επεξήγηση σχετικά με τη σύνδεση μεταξύ τριγωνομετρίας και μουσικής:

http://www-math.bgsu.edu/~zirbel/sound/Trigonometric%20functions%20and%20sound.pdf

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν