ΜΕΡΟΣ ΙΙ: Μουσική & Μαθηματικά

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16-18

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 19:

ΛΟΓΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΝΟΤΩΝ

C.I.P. Citizens In Power

TheArtOf Maths

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Λόγοι συχνοτήτων των μουσικών νοτών

Ηλικιακό Εύρος: 16-18

Διάρκεια: 2 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Διαστήματα, Συχνότητες, Λόγοι, λογάριθμοι.

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Τα μαθηματικά πίσω από τη μουσική.

Γενικοί Σκοποί: Να δείξουμε στους μαθητές ότι η πρόσθεση διαστημάτων είναι ίση με τον πολλαπλασιασμό συχνοτήτων. Επίσης να δείξουμε μια μέθοδο για την περιγραφή οποιουδήποτε διαστήματος ή του λόγου του με βάση μια οκτάβα, καθαρή πέμπτη και τρίτη μεγάλη, μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή για λόγους κουρδίσματος (ορισμός των εκατοστών).

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Το εργαλείο βασίζεται σε μια γενική εισαγωγή στη σχέση μεταξύ των μαθηματικών και της μουσικής, αλλά στη συνέχεια γίνεται λίγο πιο απαιτητικό στην ενότητα «Τα μαθηματικά πίσω από τις νότες». Έγινε μια προσπάθεια να γίνει όσο το δυνατόν πιο ανάλαφρο και κατανοητό με εικόνες, παραδείγματα και ένα βίντεο στο YouTube.

Πηγές: Youtube, Βιβλία, Εφημερίδες, Εικόνες και Γλωσσάρι.

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Μπορείτε να ξεκινήσετε με κάποιες γενικές ερωτήσεις για να κεντρίσετε το ενδιαφέρον των μαθητών σας για το πώς και αν πιστεύουν ότι τα μαθηματικά και η μουσική σχετίζονται. Στη συνέχεια, μπορείτε να διαβάσετε γρήγορα την εισαγωγή πριν προχωρήσετε στην ενότητα «Τα μαθηματικά πίσω από τις νότες».

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες: Η κατανόηση του ότι τα διαστήματα και οι σχέσεις μεταξύ νοτών μπορούν να συμπυκνωθούν σε συνδυασμούς των τριών πρώτων ανώτερων αρμονικών.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

3-2-1	
Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	**1.** **2.** **3.**
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	**1.** **2.**
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	**1.**

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

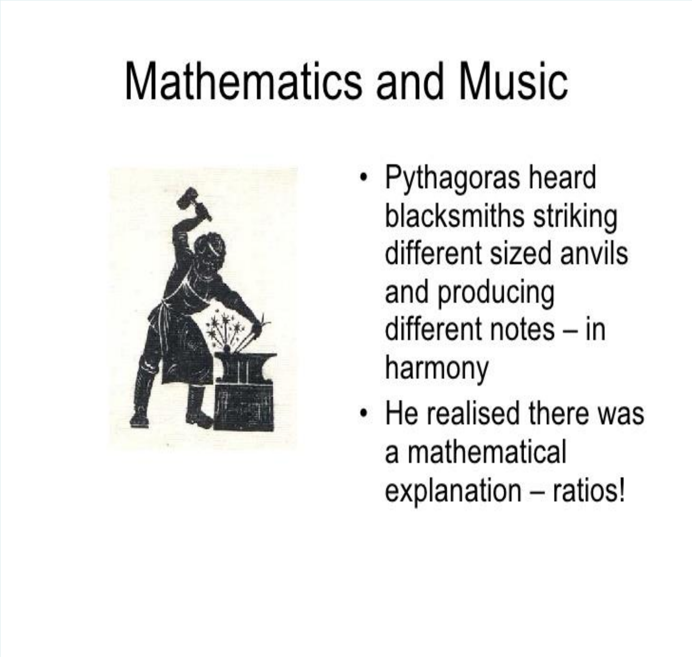
Εισαγωγή

Η μουσική και τα μαθηματικά σχετίζονται μεταξύ τους. Για την ακρίβεια, λέγεται ότι τα μαθηματικά μπορούν να μας βοηθήσουν να εξηγήσουμε τη μουσική εμπειρία. Οι Grandin, Peterson και Shaw (1998) έδειξαν ότι η μουσική βελτιώνει τις δεξιότητες συλλογισμού, οι οποίες έχουν καθοριστικό ρόλο στην εκμάθηση μαθηματικών εννοιών, όπως ο αναλογικός συλλογισμός, και στη βελτίωση των ικανοτήτων στη γεωμετρία. Οι Rauscher κ.ά. (1997) υποστηρίζουν ότι η μουσική προάγει την ανάπτυξη τέτοιων νοητικών δεξιοτήτων και ιδιαίτερα την αναγνώριση μοτίβων και τη χρήση λογικής.

Ο Πυθαγόρας στην αρχαία Ελλάδα, ακόμη και από τον 6ο αιώνα π.Χ., συνειδητοποίησε ότι μπορούν να παραχθούν διαφορετικοί ήχοι με διαφορετικά βάρη και δονήσεις. Αυτό οδήγησε στην ανακάλυψη ότι το τονικό ύψος μιας ταλαντευόμενης χορδής είναι ανάλογο και εξαρτάται από το μήκος της. Οι χορδές που έχουν κοπεί στη μέση είναι μία οκτάβα υψηλότερες από την αρχική χορδή. Συνεπώς, όσο πιο κοντή είναι η χορδή, τόσο υψηλότερο είναι το τονικό ύψος. Ο Πυθαγόρας ανακάλυψε επίσης ότι νότες ορισμένων συχνοτήτων ακούγονται καλύτερα με πολλαπλές συχνότητες της εν λόγω νότας. Για παράδειγμα, μια νότα 220Hz ακούγεται καλύτερα με νότες 440Hz, 660Hz και τα συναφή. Με αυτόν τον τρόπο, μπορείτε ήδη να δείτε ότι από τα βασικά στοιχεία μέχρι και την πιο πολύπλοκη σύνθεση, τα μαθηματικά συνυπάρχουν με τη μουσική.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Εικόνα 1: Διατονική κλίμακα με την έννοια του Πυθαγόρα (Ανακτήθηκε από: https://www.google.com/search?q=pythagoras+and+music&client=firefox-b-d&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjN9r7B_IPjAhXJCuwKHcEKD6AQ_AUIECgB&biw=1138&bih=527#imgrc=pAHIvMTRAjeGWM)



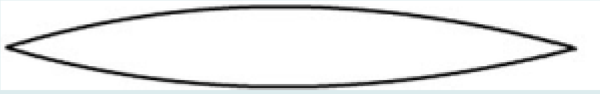
Εικόνα 2: Πυθαγόρας και μουσική (Ανακτήθηκε από: https://www.google.com/search?q=pythagoras+and+music&client=firefox-b-d&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjN9r7B_IPjAhXJCuwKHcEKD6AQ_AUIECgB&biw=1138&bih=527#imgrc=kjndmRILmsTNLM)

Συχνότητες, διαστήματα και λόγοι στη μουσική

Μερικές κοινές μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με τη μουσική είναι οι συχνότητες, οι κλίμακες, τα διαστήματα και οι τόνοι.

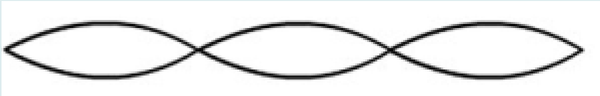
Ο Πυθαγόρας έκανε τις ανακαλύψεις του «παίζοντας» με μια τεντωμένη χορδή. Παρακάτω μπορείτε να δείτε μια τεντωμένη χορδή δεμένη στα άκρα της. Όταν αγγίζεται, ταλαντεύεται. Όπως όλοι γνωρίζουμε όταν ένα όργανο ταλαντεύεται, ένα κύμα πίεσης που ταξιδεύει μέσα στον αέρα φθάνει στο αυτί μας ως ήχος.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.



Ο Πυθαγόρας αποφάσισε να χωρίσει αυτή τη χορδή στη μέση και να αγγίξει εκ νέου το κάθε άκρο. Ο ήχος που παρήχθη ήταν ο ίδιος, αλλά πιο υψηλής έντασης (επειδή ήταν η ίδια νότα μίας οκτάβας παραπάνω):

Ο Πυθαγόρας αποφάσισε να συνεχίσει. Πειραματίστηκε με τη χορδή χωρισμένη σε τρία μέρη:



Τότε συνειδητοποίησε ότι εμφανίστηκε ένας νέος, διαφορετικός ήχος. Αυτή τη φορά, δεν ήταν η ίδια νότα μία οκτάβα παραπάνω, αλλά μια διαφορετική νότα, που έπρεπε να πάρει ένα άλλο όνομα. Αυτός ο ήχος, πέραν του ότι ήταν διαφορετικός, ταίριαξε καλά με τον προηγούμενο, δημιουργώντας μια ευχάριστη αρμονία στο αυτί, διότι αυτοί οι διαχωρισμοί έδειξαν τις μαθηματικές σχέσεις 1/2 και 2/3 και προφανώς στον εγκέφαλο μας αρέσουν οι καλά καθορισμένες λογικές σχέσεις.
Συνεπώς, συνέχισε να κάνει υποδιαιρέσεις και συνδυασμούς των ήχων που δημιούργησαν με μαθηματικό τρόπο κλίμακες οι οποίες στη συνέχεια ώθησαν τη δημιουργία μουσικών οργάνων που θα μπορούσαν να παίξουν αυτές τις κλίμακες. Σήμερα, οι νότες έχουν λάβει τα ονόματα που γνωρίζουμε σήμερα. Οι πολιτισμοί έχουν δημιουργήσει τις δικές τους κλίμακες. Για παράδειγμα, οι Κινέζοι δημιούργησαν την πεντατονική κλίμακα, ενώ η δυτική κουλτούρα, υιοθέτησε μια 12-τονη ισοσταθμισμένη, γνωστή ως συγκερασμένη ή χρωματική κλίμακα.

Πηγές: http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/ and http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Γλωσσάρι

Πυθαγόρας: Ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (περ. 570 π.Χ. – περ. 495 π.Χ.) ήταν ένας αρχαίος Ιόνιος Έλληνας φιλόσοφος και ο ομώνυμος ιδρυτής του κινήματος του Πυθαγορισμού. Οι πολιτικές και θρησκευτικές του διδασκαλίες ήταν γνωστές στη Μεγάλη Ελλάδα και επηρέασαν τις φιλοσοφίες του Πλάτωνα, του Αριστοτέλη, και μέσω αυτών, τη δυτική φιλοσοφία. Οι πληροφορίες για τη ζωή του θολώνονται από το θρύλο, αλλά φαίνεται ότι ήταν γιος του Μνησάρχου, που ήταν σφραγιδογλύπτης στο νησί της Σάμου. Οι σύγχρονοι μελετητές διαφωνούν σχετικά με την εκπαίδευση και τις επιρροές του Πυθαγόρα, ωστόσο συμφωνούν ότι, γύρω στο 530 π.Χ., ταξίδεψε στον Κρότωνα, όπου ίδρυσε ένα σχολείο στο οποίο οι μυούμενοι δεσμεύονταν με όρκο στη μυστικότητα και ζούσαν έναν κοινοτικό, ασκητικό τρόπο ζωής. Αυτός ο τρόπος ζωής προϋπέθετε μια σειρά διατροφικών απαγορεύσεων και λέγεται ότι περιλάμβανε χορτοφαγία, ωστόσο οι σύγχρονοι μελετητές αμφιβάλλουν αν ποτέ ο Πυθαγόρας υποστήριξε ποτέ την πλήρη χορτοφαγία.

Ανακτήθηκε από: https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras

Λόγος: Στα μαθηματικά, ο λόγος είναι μια σχέση μεταξύ δύο αριθμών που δείχνει πόσες φορές ο πρώτος αριθμός περιέχει το δεύτερο. Για παράδειγμα, εάν ένα μπολ φρούτων περιέχει οκτώ πορτοκάλια και έξι λεμόνια, τότε ο λόγος πορτοκαλιών ως προς τα λεμόνια είναι οκτώ προς έξι (δηλαδή 8: 6, που ισοδυναμεί με τον λόγο 4: 3). Ομοίως, ο λόγος των λεμονιών προς τα πορτοκάλια είναι 6: 8 (ή 3: 4) και ο λόγος των πορτοκαλιών με τη συνολική ποσότητα φρούτων είναι 8:14 (ή 4: 7).

Ανακτήθηκε από: https://en.wikipedia.org/wiki/Ratio

Συχνότητα: Η συχνότητα είναι ο αριθμός επαναλήψεων ενός γεγονότος στη μονάδα χρόνου. Η περίοδος είναι η χρονική διάρκεια που απαιτείται για να εκτελεστεί ένας πλήρης κύκλος σε ένα επαναλαμβανόμενο συμβάν, επομένως η περίοδος είναι αντίστροφος της συχνότητας. Για παράδειγμα: αν η καρδιά ενός νεογέννητου μωρού χτυπά σε συχνότητα 120 φορές το λεπτό, η περίοδος του - το χρονικό διάστημα μεταξύ των χτύπων - είναι μισό δευτερόλεπτο (60 δευτερόλεπτα διαιρούμενα με 120 χτυπήματα). Η συχνότητα είναι μια σημαντική παράμετρος που χρησιμοποιείται στην

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

επιστήμη και τη μηχανική για να καθορίσει το ρυθμό των ταλαντευόμενων και δονητικών φαινομένων, όπως οι μηχανικές δονήσεις, τα ηχητικά σήματα (ήχος), τα ραδιοκύματα και το φως..

Ανακτήθηκε από: https://en.wikipedia.org/wiki/Frequency

Γλωσσάρι

Οκτάβα: Στη μουσική, μια οκτάβα (λατινικά: octavus: όγδοη) ή τέλεια οκτάβα (μερικές φορές αποκαλείται **διαπασών**) είναι το διάστημα ανάμεσα σε ένα μουσικό τόνο και ένα άλλο με τη διπλάσια συχνότητα του. Η σχέση της οκτάβας είναι ένα φυσικό φαινόμενο που αναφέρεται ως «το βασικό θαύμα της μουσικής», η χρήση του οποίου είναι «κοινή στα περισσότερα μουσικά συστήματα». Το διάστημα μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης αρμονικής της σειράς αρμονικών είναι μια οκτάβα. Στη μουσική σημειογραφία, οι νότες που χωρίζονται από μια οκτάβα (ή πολλαπλές οκτάβες) έχουν το ίδιο γράμμα και είναι της ίδιας κατηγορίας τονικού ύψους. Για να τονίσουμε ότι είναι ένα από τα τέλεια διαστήματα (συμπεριλαμβανομένης της αρμονίας, της καθαρής τέταρτης και της καθαρής πέμπτης), η οκτάβα προσδιορίζεται ως P8. Άλλες ιδιότητες διαστήματος είναι επίσης πιθανές, αν και σπάνιες. Η οκτάβα πάνω ή κάτω από μια υποδεικνυόμενη νότα μερικές φορές έχει τη συντομογραφία 8a ή 8va (ιταλικά: all'ottava), 8va bassa (ιταλικά: all'ottava bassa, μερικές φορές και 8vb) ή απλά 8 για την οκτάβα στην κατεύθυνση που υποδεικνύεται με την τοποθέτηση αυτού του συμβόλου πάνω ή κάτω από το πεντάγραμμο.

Ανακτήθηκε από: https://en.wikipedia.org/wiki/Octave

Διάστημα (μουσική): Στη θεωρία της μουσικής, το διάστημα ορίζεται ως η διαφορά ανάμεσα σε δύο τονικά ύψη. Τα διαστήματα χωρίζονται σε οριζόντια, γραμμικά ή μελωδικά, όταν πρόκειται για μια σειρά διαδοχής τους, όπως σε μια μελωδία, και σε κάθετα (ή αρμονικά) όταν διέπονται από την ταυτόχρονη συνήχηση δύο τονικών υψών, όπως σε μια συγχορδία. Στη μουσική της Δυτικής Ευρώπης τα διαστήματα ορίζονται συνήθως στα πλαίσια της διατονικής κλίμακας. Τα μικρότερα διαστήματα ονομάζονται ημιτόνια. Διαστήματα μικρότερα από ένα ημιτόνιο ονομάζονται

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

μικροδιαστήματα. Μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τις νότες διαφόρων ειδών μη-διατονικών κλιμάκων. Ορισμένες από τις πολύ μικρότερες ονομάζονται κόμματα και περιγράφουν μικρές αποκλίσεις, που παρατηρούνται σε ορισμένα συστήματα κουρδίσματος, ανάμεσα σε εναρμόνιες ίσες νότες όπως C♯ και D ♭. Τα διαστήματα μπορεί να είναι εξαιρετικά μικρά, ακόμα και μη αντιληπτά από το ανθρώπινο αυτί.
Ανακτήθηκε από: https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_(music)

Τρίτη μικρή: Στη μουσική θεωρία του δυτικού πολιτισμού, μια μικρή τρίτη είναι ένα μουσικό διάστημα που περικλείει τρία μισά βήματα ή ημιτόνια.

Τρίτη μεγάλη: Στην κλασσική μουσική της δυτικής κουλτούρας, η τρίτη είναι ένα μουσικό διάστημα που περιλαμβάνει τρεις θέσεις πενταγράμμου (βλέπε αριθμό διαστήματος για περισσότερες λεπτομέρειες) και η τρίτη μεγάλη είναι μια τρίτη που εκτείνεται σε τέσσερα ημιτόνια. Μαζί με την τρίτη μικρή, η τρίτη μεγάλη είναι μία από τις πιο συχνές τρίτες. Αναγνωρίζεται ως μεγάλη, διότι είναι η μεγαλύτερη από τις δύο: η τρίτη μεγάλη περιλαμβάνει τέσσερα ημιτόνια ενώ η τρίτη μικρή τρία.

Τετάρτη: διάστημα ανάμεσα σε μια μουσική νότα και μια άλλη, η οποία απέχει τρεις βαθμίδες από την πρώτη σε μια κλίμακα.

Καθαρή πέμπτη: διάστημα ανάμεσα σε μια μουσική νότα και μια άλλη, η οποία απέχει τέσσερις βαθμίδες από την πρώτη σε μια κλίμακα.

Συχνότητα: φυσική ποσότητα που υποδεικνύει τον αριθμό επαναλήψεων ενός γεγονότος σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Τονικό ύψος: ήχος υψηλής συχνότητας από την ανθρώπινη ακοή, συνήθως πάνω από 5 KHz.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Τα μαθηματικά πίσω από... νότες

- ✓ Ο ήχος δημιουργείται από μια συνεχή *ταλάντωση* του αέρα.
- ✓ Ο αριθμός των ταλαντώσεων ανά δευτερόλεπτο ονομάζεται συχνότητα που μετράται σε *Hertz* και η *συχνότητα* του ήχου καθορίζει το τονικό ύψος του (βλ. Γλωσσάρι) - όσο υψηλότερη είναι η συχνότητα, τόσο υψηλότερο είναι το τονικό ύψος.
- ✓ Οι μουσικές νότες είναι ήχοι ορισμένων συχνοτήτων που παίζουν σε αύξουσα σειρά συχνοτήτων, παράγοντας έτσι μια μουσική κλίμακα.
- ✓ Εδώ είναι η εξήγηση για τη διαφορά μεταξύ δύο τονικών υψών. Εξετάστε δύο τονικά ύψη (συχνότητες) που χωρίζονται από μια τυχαία απόσταση, i. Συνεπώς, αν έχουμε τις δύο συχνότητες μας, f1 και f2, διαχωρίζονται από την απόσταση διαστήματος i1. (Το διάστημα είναι ο συνδυασμός δύο από αυτούς τους ήχους).
- ✓ Τώρα ο λόγος των δύο συχνοτήτων (f2 / f1) μπορεί να οριστεί ως r1 και μπορεί να εκφραστεί ως:

$$f2 \div f1 = r1$$

- ✓ Αν έχουμε ένα δεύτερο σύνολο συχνοτήτων, f3 και f4, το διάστημα μεταξύ τους μπορεί να οριστεί ως i2. Ο λόγος των f3 και f4 (που είναι f4 / f3) θα οριστεί ως r2. Αν τα i1 και i2 είναι το ίδιο διάστημα, που σημαίνει ότι η ίδια απόσταση συχνότητας υπάρχει μεταξύ f1 και f2 καθώς και f3 και f4, τότε οι λόγοι θα είναι ίσοι. Αυτό δεν μας λέει τίποτα για την έκταση των συχνοτήτων, μόνο ότι τα διαστήματα είναι παρόμοια (δεν γνωρίζουμε αν βρίσκονται στην ίδια έκταση). Θα το εκφράζαμε ως:

$$f2 \div f1 = r1$$

$$f4 \div f3 = r2$$

$$i1 \cong i2 \text{ if and only if } r1 = r2$$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

- Ας πούμε ότι έχουμε τρεις συχνότητες f1, f2 και f3. Το διάστημα μεταξύ των f1 και f2 είναι i1, το διάστημα μεταξύ f2 και f3 είναι i2 και το μεγαλύτερο διάστημα μεταξύ f1 και f3 είναι i3. Εφαρμόζοντας τις ίδιες έννοιες των υπολογισμένων λόγων στα προηγούμενα παραδείγματα, προκύπτει:

$$f2 \div f1 = r1$$

$$f3 \div f2 = r2$$

$$f3 \div f1 = r3$$

$$\therefore f2 = r1 \cdot f1 \; and \; f3 = r2 \cdot f2$$

$$Substituting \; in \; for \; f2$$

$$f3 = r2 \cdot (r1 \cdot f1)$$

$$f3 \div f1 = r2 \cdot r1$$

$$substituting \; r3 \; for \; f3 \div f1$$

$$r3 = r2 \cdot r1 \; and \; i3 = i1 + i2$$

- Συνεπώς, δείχνουμε ότι η *πρόσθεση διαστημάτων* είναι ίση με τον *πολλαπλασιασμό λόγων συχνοτήτων*.

$$since \; r3 = r2 \cdot r1$$

$$\log(r3) = \log(r2) + \log(r1)$$

$$since \; i3 = i2 + i1 \; we \; can \; show \; that$$

$$i3 = \log(r3) \; and \; i2 = \log(r2) \; and \; i1 = \log(r1)$$

- Τώρα έχουμε έναν καθορισμένο αριθμό για την τιμή του i. *Είναι ο λογάριθμος του λόγου των συχνοτήτων που περιλαμβάνει το εν λόγω διάστημα*. Ο λόγος συχνότητας για κάθε δεδομένο διάστημα θα είναι θετικός, αλλά μπορεί να είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από 1. Εάν η τιμή του r είναι μεγαλύτερη από 1, τότε γνωρίζουμε ότι 0 <f1 <f2 και το διάστημα είναι *αυξημένο* (επειδή το f2 είναι μεγαλύτερη από f1). Ομοίως αν 0 <r <1 τότε 0 <f2 <f1 και γνωρίζουμε ότι το

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

διάστημα είναι *ελαττωμένο*. Επομένως, ο λογάριθμος ενός αυξημένου διαστήματος (με r> 1) θα είναι *θετικός* ενώ ο λογάριμος ενός ελαττωμένου διαστήματος (με r <1) θα είναι *αρνητικός*.

- ✓ Στο πιάνο παίζοντας DO και RE μαζί περιγράφεται ως ένα διάστημα δευτέρας μεγάλης επειδή το RE είναι η δεύτερη νότα στην κλίμακα -> το επόμενο διάστημα είναι τρίτη μεγάλη επειδή το MI είναι η τρίτη νότα στην κλίμακα -> από το DO στο FA το διάστημα ονομάζεται καθαρή τετάρτη -> από το DO στο SOL το διάστημα ονομάζεται καθαρή πέμπτη και ούτω καθεξής -> τέλος ένα DO και DO που παίζονται μαζί, το διάστημα ονομάζεται οκτάβα.
  (Τώρα δείτε https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug μέχρι το 2:08)
- ✓ Εάν γνωρίζουμε πώς να προσδιορίσουμε τον λόγο ενός διαστήματος που σχηματίστηκε από άλλους λόγους, για παράδειγμα αν γνωρίζαμε ότι ένα διάστημα (r1) είχε λόγο 5/4 (που ονομάζεται τρίτη μεγάλη) και ένα άλλο (r2) είχε λόγο 6/5 (τρίτη μικρή) μπορούμε να υπολογίσουμε τον λόγο του αθροίσματος τους. Έτσι, μια τρίτη μεγάλη (5/4) μαζί με τρίτη μικρή (6/5) δίνουν:

$$r1 \cdot r2 = r3$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)$$

- ✓ Ο λόγος 3/2 είναι η καθαρή πέμπτη. Έτσι, αποδείξαμε με μαθηματικό τρόπο από μια *βασική ιδέα* ότι μια τρίτη μεγάλη μαζί με τρίτη μικρή δίνουν μια καθαρή πέμπτη! Μια σύντομη επανάληψη μικρούς σας ακέραιους λόγους τονικών υψών ώστε να μπορείτε να δοκιμάσετε μερικά παραδείγματα μόνοι σας:

2/1	Octave
3/2	Perfect Fifth
4/3	Perfect Fourth
5/3	Major Sixth
5/4	Major Third
6/5	Minor Third

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

- ✓ Βρήκαμε ένα παράδειγμα μη-ποσοτικοποιημένου διαστήματος, εξήγαμε έναν πραγματικό αριθμό μέσα από τον λόγο της συχνότητάς του και χρησιμοποιήσαμε τον τύπο για να υπολογίσουμε τον λόγο του διαστήματος που προκύπτει. Τις επόμενες εβδομάδες θα βρούμε τύπους για να υπολογίσουμε τις συχνότητες, θα ορίσουμε τι είναι μια νότα, θα καθορίσουμε μια μέθοδο για την εύρεση της σύνθεσης οποιουδήποτε διαστήματος και θα δείξουμε ότι η κλίμακα είναι μοδιακή συνάρτηση (και πώς να τη χρησιμοποιούμε).
- ✓ Όλα τα διαστήματα μπορούν να περιγραφούν ως διαφορετικοί συνδυασμοί της οκτάβας, καθαρή πέμπτη και τρίτη μεγάλη - οι τρεις πρώτες ανώτερες αρμονικές.

- ✓ Συνεπώς:

  - οι λόγοι διαστημάτων είναι πάντα μεγαλύτεροι από το 1 και μικρότεροι από το 2·
  - ο λόγος 2: 1 είναι μια οκτάβα· όλα τα άλλα διαστήματα είναι μικρότερα από μια οκτάβα.

- ✓ Ακολουθώντας τη σειρά των ανώτερων αρμονικών μπορούμε να βγάλουμε τα εξής συμπεράσματα:

    - 1: 1 είναι ο αρχικός τόνος, 2: 1 είναι μια οκτάβα πάνω από αυτό, 3: 1 είναι μια πέμπτη πάνω από την οκτάβα, 4: 1 είναι η δεύτερη οκτάβα και 5: 1 είναι μια τρίτη στη δεύτερη οκτάβα.
- ✓ Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε έναν τρόπο να γράψουμε μια πέμπτη και μια τρίτη ως συχνότητες μέσα στην πρώτη οκτάβα. Μπορούμε να θεωρήσουμε δεδομένο ότι ο λόγος πρέπει να είναι μεγαλύτερος από 1: 1 και μικρότερος από 2: 1 που είναι ο τρόπος με τον οποίο εκφράζεται η οκτάβα.
- ✓ Ως εκ τούτου, μπορούμε να διαιρέσουμε το λόγο συχνότητας με τον αριθμό των οκτάβων που απαιτούνται, επιτυγχάνοντας έτσι να φτάσουμε το εύρος της πρώτης οκτάβας.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

- Για παράδειγμα, ο λόγος 3: 1 αποτελεί μια καθαρή πέμπτη, που ανήκει στη δεύτερη οκτάβα. Συνεπώς, θα πρέπει να το κατεβάσουμε μόνο μια οκτάβα για να έχουμε έναν λόγο μεταξύ 1 και 2. Αυτό θα μπορούσε να εκφραστεί ως εξής:

  Ας εκφράσουμε με το γράμμα q / 1 ένα διάστημα όπου το q πρέπει να είναι πάντα μεγαλύτερο από 2 και ταυτόχρονα πρώτος αριθμός. Προκειμένου να επιτευχθεί μείωση μιας οκτάβας, πρέπει να βρούμε έναν αριθμό n ο οποίος να υπακούει στον ακόλουθο τύπο:

$$1 < \frac{q}{2^n} < 2$$

$$\Rightarrow \ 2^n < q < 2 \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow \ 2^n < q < 2^{n+1}$$

- ✓ Έχουμε δείξει τώρα ότι ένας πρώτος λόγος μπορεί να μετατοπιστεί σε μια ενιαία οκτάβα.
- ✓ Τα **πρώτα τρία βασικά διαστήματα** που προκύπτουν από την εφαρμογή του τύπου είναι: 2:1 οκτάβα, 3:2 καθαρή πέμπτη και 5:4 τρίτη μεγάλη.

- ✓ Θυμάστε ότι το μήκος διαστήματος δίνεται από τον λογάριθμο του λόγου του; Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεταβλητές για να εκφράσουμε το μήκος των τριών πρώτων βασικών διαστημάτων:

$$a=\log(2)$$

$$b=\log(3/2)$$

$$c=\log(5/4)$$

- ✓ Τώρα που έχουμε εκφράσει τις μεταβλητές a, b και c ως το μήκος του διαστήματος (το οποίο μπορεί να εκτιμηθεί μέσω του λογαρίθμου του λόγου των συχνοτήτων), θα ασχοληθούμε στη συνέχεια μέσα από τις ακόλουθες ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ, προκειμένου να αποδείξουμε μια μέθοδο για τον προσδιορισμό της σύνθεσης οποιουδήποτε άλλου διαστήματος ως συνδυασμός αυτών των τριών μεταβλητών.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΕΡΓΑΣΙΑ

Κύρια ερώτηση: Αποδείξτε ότι οποιοδήποτε διάστημα μπορεί να προσδιοριστεί ως συνδυασμός των διαστημάτων a, b και c που ορίζονται στην προηγούμενη παράγραφο.

ΣΥΜΒΟΥΛΗ 1: Ως πρώτο βήμα, θυμηθείτε ότι έχουμε ήδη ορίσει το μήκος των τριών βασικών διαστημάτων ως

$a= \log(2)$

$b= \log(3/2)$

$c=\log(5/4)$

ΣΥΜΒΟΥΛΗ 2: Αρχικά, χρησιμοποιήστε τρεις νέες μεταβλητές, δηλαδή m, n και s, για να πολλαπλασιάσετε τις πρωτότυπες (a, b και c). Σκεφτείτε ότι, το άθροισμα αυτών θα είναι το μήκος του άγνωστου διαστήματος που προσπαθούμε να προσδιορίσουμε.

Άρα, το μήκος του νέου διαστήματος μπορεί να εκφραστεί ως:

$ma + nb + sc$

Βοηθητικές ερωτήσεις:

Απαντώντας σε αυτές τις ενδιάμεσες ερωτήσεις, θα είστε σε θέση να απαντήσετε στην κύρια ερώτηση σχετικά με αυτή την εργασία («Αποδείξτε ότι οποιοδήποτε διάστημα μπορεί να προσδιοριστεί ως συνδυασμός των διαστημάτων a, b και c που ορίζονται στην προηγούμενη παράγραφο»)

(a) Θεωρώντας ότι το μήκος αυτού του νέου διαστήματος είναι $ma + nb + sc$, πώς μπορούμε να ορίσουμε τον λόγο του;

(b) Με βάση τις απαντήσεις από τις προηγούμενες ερωτήσεις, θα μπορούσατε να υπολογίσετε το άθροισμα μιας καθαρής πέμπτης και μιας τρίτης μεγάλης;

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Συμβουλή: Μπορείτε να καθορίσετε μια καθαρή πέμπτη με τη μεταβλητή b και την τρίτη μεγάλη με τη μεταβλητή c.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ…

Τα μαθηματικά πίσω από τη μουσική:

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

TED TALK: Μουσική και μαθηματικά: Η μεγαλοφυία του Μπετόβεν

https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY

Ιστοσελίδες:

Math central: http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html

Kent State Univeristy: https://musicedmasters.kent.edu/the-connection-between-music-and-mathematics/

Μαθηματικά και μουσική: http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/

Μαθήματα μαθηματικών και μουσικής: https://www.notreble.com/buzz/2010/02/04/math-and-music-intervals/

Βιβλία:

Grandin, T., Peterson, M., & Shaw, G. L. (1998). Spatial- temporal versus language-analytic reasoning: The role of music training. Arts Education Policy Review, 99(6), 11-15.

Kung, D. (2013). How Music and Mathematics Relate. The Great Courses, Virginia. Retrieved from http://www.chrysalis-foundation.org/1373_MusicandMath_8-28.pdf

Rauscher,R.H.,Shaw,G.I.,Levine,I. J.,Wright,E.L.,Dennis, W. R., & Newcomb, R. I. (1997). Music training causes long-term enhancement of preschool children’s spatial-temporal reasoning. Neurological Research, 19, 2-8.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.