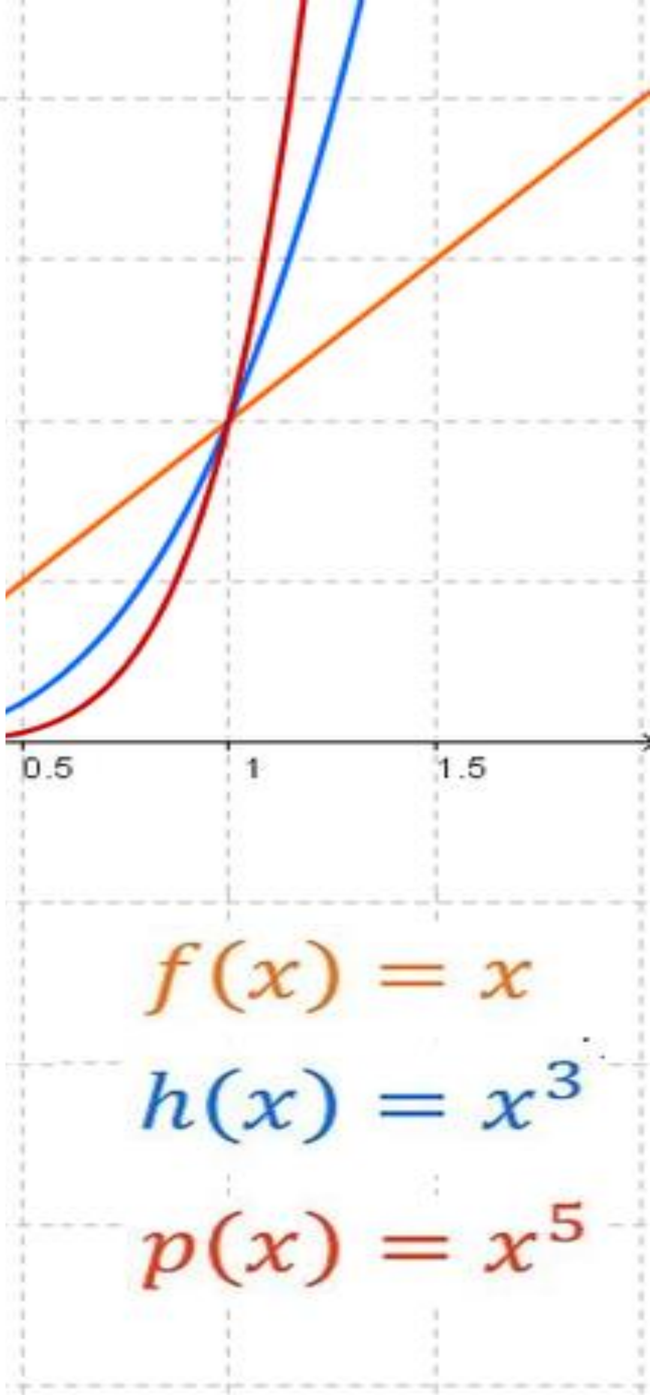
ΜΕΡΟΣ ΙΙ: Μουσική & Μαθηματικά

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 13 – 15



Power function graph degree 1 3 5
(Πηγή: J Hokkanen from Wiki Commons)

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 18: ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΓΚΕΡΑΣΜΕΝΗ ΚΛΙΜΑΚΑ

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

TheArtOf Maths

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Δυνάμεις στη συγκερασμένη κλίμακα

Ηλικιακό Εύρος: 13 – 15 χρονών

Διάρκεια: 3 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Δυνάμεις, ιδιότητες δυνάμεων, πράξεις με δυνάμεις

Καλλιτεχνικές Έννοιες: 12-τονη ίση συγκερασμένη, μουσικές νότες και συχνότητες μουσικών νοτών

Γενικοί Σκοποί: Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της δύναμης, τις ιδιότητές της και να κάνουν πράξεις με δυνάμεις.

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Θα ήταν ωφέλιμο να χρησιμοποιήσετε μια επιστημονική αριθμομηχανή (μπορεί να είναι η διαδικτυακή αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων Desmos), έτσι ώστε ο μαθητής να μπορέσει να μάθει πώς να υπολογίζει εκθέτες στην αριθμομηχανή και να είναι σε θέση να επαληθεύει τα αποτελέσματα/λύσεις των εργασιών.

Πηγές: Υπολογιστής με σύνδεση στο διαδίκτυο, πρόσβαση στην ιστοσελίδα: https://www.desmos.com/

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Ξεκινήστε δίνοντας ένα ή δύο παραδείγματα για κάθε κανόνα πράξης αυξάνοντας τη δυσκολία για να δείξετε πώς να συνεχίσουν, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορέσουν να λύσουν τις ασκήσεις μόνοι τους.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες:

Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- Ελέγχει τους κανόνες των δυνάμεων
- Υπολογίζει την τιμή των αριθμητικών εκφράσεων χρησιμοποιώντας τους κανόνες των δυνάμεων.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά και η μουσική ήταν πάντα συνδεδεμένα. Ωστόσο, η πρώτη απόδειξη αυτής της σχέσης βρέθηκε μόλις τον 6ο αιώνα π.Χ. Ο Πυθαγόρας συνέκρινε τον ήχο που παράγεται από σφυριά διαφορετικού μήκους, που χρησιμοποιούνται από τους σιδεράδες, με τον ήχο του μονόχορδου, του οποίου ο εφευρέτης θεωρείται ότι ήταν ο Πυθαγόρας.

Αυτή η σύγκριση επέτρεψε στον Πυθαγόρα να ανακαλύψει και να βελτιώσει τους μαθηματικούς λόγους πίσω από τους ήχους, μέσα από τη μελέτη των ήχων που παράγει το μονόχορδο. Διαίρεσε τη χορδή σε δύο ίσα μέρη, στη συνέχεια σε τρία ίσα μέρη και ούτω καθεξής. Ταίριαξε τους ήχους με μαθηματικό τρόπο σύμφωνα με τις υποδιαιρέσεις που έκανε και δημιούργησε την Πυθαγόρεια κλίμακα, όπου κάθε νότα διατηρούσε μια καλά καθορισμένη σχέση με την άλλη.

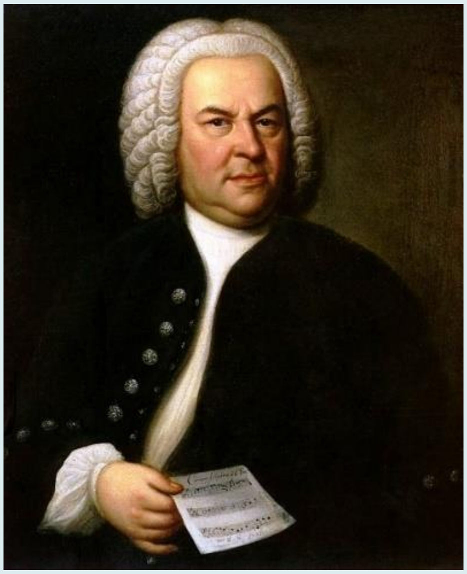
Η Πυθαγόρεια κλίμακα είναι η βάση της διατονικής κλίμακας, η οποία αποτελείται από επτά νότες, η οποία είναι η βάση του σχηματισμού όλων των άλλων κλιμάκων που χρησιμοποιούνται στη δυτική μουσική. Μία από τις κλίμακες που εμφανίστηκαν στη δυτική κουλτούρα ήταν η 12-τονη ίση συγκερασμένη, γνωστή ως συγκερασμένη κλίμακα ή χρωματική κλίμακα, στην οποία υπάρχει μεγαλύτερη αρμονία μεταξύ των νοτών.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Δυνάμεις στη συγκερασμένη κλίμακα

Τον 6ο αιώνα π.Χ., ο Πυθαγόρας χρησιμοποίησε το μονόχορδο για να μελετήσει τη σχέση μεταξύ του μήκους της παλλόμενης χορδής και του μουσικού τόνου που παράγει. Φανταστείτε μια χορδή που τεντώνεται και είναι σταθεροποιημένη και στα δύο άκρα. Όταν αγγίζεται το ένα άκρο αυτής της χορδής, ταλαντεύεται και παράγει μια νότα που ονομάζεται θεμέλιος νότα. Ο Πυθαγόρας διαίρεσε στη συνέχεια τη χορδή σε δύο ίσα μέρη, στη συνέχεια σε τρία και ούτω καθεξής. Καθώς συνέχιζε να υποδιαιρεί τη χορδή, αποκτώντας τις αρμονικές της θεμελίου νότας και συνδυάζοντας τους ήχους με μαθηματικό τρόπο, δημιούργησε κλίμακες οι οποίες παρήγαγαν νότες που συνδέονταν φυσικά μεταξύ τους.

Διατηρώντας τα ίδια διαστήματα (αριθμητικός λόγος $\frac{3}{2}$) μεταξύ των νοτών και ξεκινώντας από το διάστημα οκτάβας που δίνεται από τις συχνότητες $\mathbf{f_0}$ και $\mathbf{2f_0}$, μπορεί να σχηματιστεί η Πυθαγόρεια διατονική κλίμακα. Οι νότες που προέκυψαν, κοινώς γνωστές ως C, R, E, F, G, A και B, συμβολίζονται στις περισσότερες χώρες με βάση τη σύμβαση ονοματολογίας σολφέζ (solfège) Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Ti (ή Si) και αντίστοιχα C-Do, D-Re, E-Mi, F-Fa, G-Sol, A-La και B-Ti (ή Si), σχηματίζοντας τη γνωστή διατονική κλίμακα των επτά νοτών που για αιώνες αποτέλεσε τη βάση άλλων κλιμάκων.



Από τον Μεσαίωνα και έπειτα, έγινε αισθητό ότι ορισμένες νότες ήταν πολύ κοντά μεταξύ τους (για παράδειγμα, οι νότες B και C), οπότε αποφασίστηκε να δημιουργηθεί μια κλίμακα στην οποία το διάστημα συχνοτήτων μεταξύ όλων των νοτών θα ήταν ο ίδιος λόγος. Η τιμή του είναι το διάστημα μεταξύ των νοτών C και B (ένα ημιτόνιο). Ως αποτέλεσμα, η 12-τονη ίση συγκερασμένη κλίμακα διαμορφώθηκε και βελτιώθηκε από τον Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Σε αντίθεση με τον Πυθαγόρα που είχε σχηματίσει τη διατονική κλίμακα με την απόκτηση 7 νοτών μέσω μιας διαίρεσης που μπορεί να αναπαρασταθεί από κλάσματα, αυτή η νέα ιδιοσυγκρασία μπορεί να αναπαρασταθεί από δυνάμεις του 2 και έχει ως αποτέλεσμα τις 12 νότες: C, C #, D, D #, E, F, F #, G, G #, A, A # και B.

Εικ. 1 - Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ
(Πηγή:https://commons.wikimedia.org/wiki/Johann_Sebastian_Bach)

Νότα	Ημίτονα	Ίση συγκερασμένη κλίμακα
C	0	$\mathbf{2^0 = 1}$
C#	1	$\mathbf{2^{1/12}}$
D	2	$\mathbf{2^{2/12}}$
D#	3	$\mathbf{2^{3/12}}$
E	4	$\mathbf{2^{4/12}}$
F	5	$\mathbf{2^{5/12}}$
F#	6	$\mathbf{2^{6/12}}$
G	7	$\mathbf{2^{7/12}}$
G#	8	$\mathbf{2^{8/12}}$
A	9	$\mathbf{2^{9/12}}$
A#	10	$\mathbf{2^{10/12}}$
B	11	$\mathbf{2^{11/12}}$
C (οκτάβα)	12	$\mathbf{2^1 = 2}$

Πίνακας 1: Διαίρεση οκτάβας σε ίση συγκερασμένη

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Γλωσσάρι

#: Σύμβολο που ονομάζεται δίεση και συμβολίζει το ύψος του ημιτόνιου σε μια νότα.

Διατονική κλίμακα: διαχωρισμός της οκτάβας σε επτά τονικά ύψη.

Συχνότητα: μια φυσική τιμή που υποδεικνύει τον αριθμό των επαναλήψεων ενός γεγονότος σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Θεμελιώδης συχνότητα: η χαμηλότερη και ισχυρότερη συχνότητα της αρμονικής σειράς ενός ήχου.

Θεμέλιος νότα: η κύρια νότα μιας συγχορδίας, από την οποία προέρχονται οι άλλες συγχορδίες.

Αρμονική: ο ήχος μιας σειράς που συνιστά μια νότα.

Μονόχορδο: ένα αρχαίο μουσικό όργανο που αποτελείται από μια ενιαία χορδή πάνω από ένα ακουστικό ηχείο.

Οκτάβα: διάστημα μεταξύ μιας μουσικής νότας και μιας άλλης με τη μισή ή τη διπλάσια συχνότητά της.

(Μουσική) Κλίμακα: διατεταγμένη ακολουθία τόνων από την παλμική συχνότητα των ήχων (συνήθως από τον χαμηλότερο ήχο συχνότητας έως τον υψηλότερο ήχο συχνότητας).

Ημιτόνιο: διάστημα που είναι μισός τόνος και αποτελεί την ελάχιστη απόσταση στο παραδοσιακό δυτικό μουσικό σύστημα.

Συγκερασμένη κλίμακα: διαίρεση της οκτάβας σε δώδεκα ίσα ημιτόνια, επίσης γνωστή ως χρωματική κλίμακα.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Τα μαθηματικά πίσω από τη Συγκερασμένη Κλίμακα

Όπως είδαμε πριν, η χρωματική ή αλλιώς συγκερασμένη κλίμακα είναι χωρισμένη σε 12 νότες. Το τονικό ύψος της επόμενης νότας προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της τιμής του τονικού ύψους της προηγούμενης νότας με τις δυνάμεις του 2, που είναι $\mathbf{2^{1/12}}$.

Παράδειγμα: $\mathbf{Συγκερασμένο\ κούρδισμα\ της\ νότας\ D = 2^{1/12} \times}$ $\mathbf{Συγκερασμένο\ κούρδισμα\ της\ νότας\ c\# = 2^{1/12} \times 2^{1/12} = 2^{2/12}}$

Για την καλύτερη κατανόηση των δυνάμεων, ας δούμε αυτή την έννοια και τις ιδιότητες της.

Δυνάμεις

Σε έναν πολλαπλασιασμό, όταν οι παράγοντες είναι ίσοι, μπορούμε να τους αναπαραστήσουμε με τη μορφή δύναμης.

Για παράδειγμα: $\mathbf{2 \times 2 \times 2 = 2^3}$

Βάση: 2 (ο επαναλαμβανόμενος παράγοντας)·

Εκθέτης: 3 (ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές επαναλαμβάνεται ο παράγοντας).

Οι ιδιότητες των δυνάμεων

Το **γινόμενο των δυνάμεων με την ίδια βάση** έχει ως αποτέλεσμα μια δύναμη με την ίδια βάση και έναν εκθέτη ίσο με το άθροισμα των εκθετών.

$$\mathbf{a^m \times a^n = a^{m+n}; a \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{Z}}\ \text{και}\ \mathbf{n \in \mathbb{Z}}$$

Παραδείγματα: $\mathbf{3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6}$ και $\mathbf{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^5}$

Το **γινόμενο των δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη** έχει ως αποτέλεσμα μια δύναμη με τον ίδιο εκθέτη και μια βάση ίση με το γινόμενο των βάσεων.

$$\mathbf{a^m \times b^m = (a\ x\ b)^m; a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}}\ \text{και}\ \mathbf{m \in \mathbb{Z}}$$

Παραδείγματα: $3^2 \times 4^2 = (3 \times 4)^2 = 12^2$ και $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5} \times \frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{12}{25}\right)^2$

Το πηλίκο των δυνάμεων με την ίδια βάση έχει ως αποτέλεσμα μια δύναμη με την ίδια βάση και με εκθέτη ίσο με τη διαφορά των εκθετών.

$$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}; a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; m \in \mathbb{Z}} \text{ και } \mathbf{n \in \mathbb{Z}}$$

Παραδείγματα: $3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$ και $\left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

Το **πηλίκο των δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη** έχει ως αποτέλεσμα μια δύναμη με τον ίδιο εκθέτη και μια βάση ίση με το πηλίκο των βάσεων.

$$\boldsymbol{a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}} \text{ και } \boldsymbol{m \in \mathbb{Z}}$$

Παραδείγματα: $3^2 : 4^2 = (3 : 4)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ και $\left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5} : \frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{15}{20}\right)^2$

Η δύναμη της δύναμης είναι μια δύναμη με την ίδια βάση της οποίας ο εκθέτης είναι ίσος με το γινόμενο των εκθετών.

$$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{m \times n}; a \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{Z}} \text{ και } \boldsymbol{n \in \mathbb{Z}}$$

Παραδείγματα: $(4^3)^2 = 4^{3\times 2} = 4^6$ και $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5\times 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Η δύναμη της βάσης 0: $\boldsymbol{0^n = 0}$ με $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$

Παράδειγμα: $0^4 = 0$

Η δύναμη του εκθέτη 0: $\boldsymbol{a^0 = 1}$ με $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}}$

Παράδειγμα: $5^0 = 1$

Η δύναμη της βάσης 1: $\boldsymbol{1^n = 1}$ με $\boldsymbol{n \in \mathbb{Z}}$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Παράδειγμα: $1^4 = 1$

Δύναμη του εκθέτη 1: $\boldsymbol{a^1 = a}$ με $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$

Παράδειγμα: $5^1 = 5$

Η δύναμη ενός αρνητικού εκθέτη:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \text{ και } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n};\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\} \text{ και } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Παραδείγματα: $3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4}$ και $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2}$

Η δύναμη ενός ρητού εκθέτη:

$$\mathrm{a}^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\mathrm{a}^m};\ \mathrm{a} \in \mathbb{R}, \mathrm{m} \in \mathbb{Z} \text{ e } \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

Παραδείγματα: $3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{3^5} = \sqrt{3^5}$ και $5^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}}$

Παρατηρήσεις:

- Το πρόσημο μιας δύναμης με θετική βάση και φυσικό εκθέτη είναι θετικό
- Το πρόσημο μιας δύναμης με αρνητική βάση και φυσικό εκθέτη είναι:

  - θετικός εάν ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός

  - αρνητικός εάν ο εκθέτης είναι περιττός αριθμός
- $(-\mathrm{a})^n = \mathrm{a}^n$ εάν n είναι ένας άρτιος αριθμός
- $(-\mathrm{a})^n = -\mathrm{a}^n$ εάν n είναι ένας περιττός αριθμός
- $(\mathrm{a}^m)^n$ και a^{m^n} συνήθως δείχνει διαφορετικά αποτελέσματα επειδή $(\mathrm{a}^m)^n = (\mathrm{a}^m) \times (\mathrm{a}^m) \times \ldots \times (\mathrm{a}^m)$ (n φορές) και $\mathrm{a}^{m^n} = \mathrm{a}^{m \times m \times \ldots \times m}$ (n φορές)

  Παράδειγμα: $(5^2)^3 = 5^{2\times 3} = 5^6$ και $5^{2^3} = 5^8$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Υπολογίστε την τιμή:

1.1. $(-2)^3$ 1.2. 1^5 1.3. $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ 1.4. 0^{10} 1.5. $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Συμπληρώστε τα κενά ώστε να βρείτε τις σωστές απαντήσεις:

2.1. $4^3 \times 4^5 = 4^{\cdots}$;

2.2. $(-3)^{\cdots} \times (-3)^5 = (-3)^8$;

2.3. $5^7 : 5^5 = 5^{\cdots}$;

2.4. $\left(-\frac{3}{2}\right)^{\cdots} : \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$;

2.5. $\left(3^5\right)^{\cdots} = 3^{10}$;

2.6. $\left(\ldots^5\right)^3 = 3^{15}$;

2.7. $\left(\frac{27}{8}\right)^2 = \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)^6$

ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Μετατρέψτε τις παρακάτω δυνάμεις σε μία μόνο δύναμη με θετικό εκθέτη:

3.1. $4^{-3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

3.2. $(3^{-2})^6 \times 5^{12}$

3.3. $\frac{5^{-8}}{5^3}$

3.4. $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-12}$

ΕΡΓΑΣΙΑ 4

Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της κάθε μιας από τις ακόλουθες εκφράσεις, σύμφωνα με τους κανόνες πράξης των δυνάμεων:

4.1. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-7} \times \left(2 + \frac{1}{2}\right)^7 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$;

4.2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} : 2^7 + (0,1)^{-1}$;

4.3. $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^{12} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-12}}{\left(1-\frac{2}{5}\right)^{10}}$.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ...

Χρωματική κλίμακα

https://www.youtube.com/watch?v=2gy6E3X2mKQ

Ιδιότητες εκθετών με γινόμενα

https://www.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-exponents-radicals/pre-algebra-exponent-properties/v/exponent-properties-involving-products

Ιδιότητες εκθετών

https://www.mathplanet.com/education/algebra-1/exponents-and-exponential-functions/properties-of-exponents

Laws of Exponents - NCERT Class 7th Maths Solutions

https://www.youtube.com/watch?v=9VuLwo1FBys

12-τονη ίση συγκερασμένη κλίμακα

http://www.tonalsoft.com/enc/number/12edo.aspx

Γιατί υπάρχουν 12 νότες σε μια οκτάβα;

https://www.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/tuning/12.html

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.