

# SOLUTIONS

OUTIL 1 : Art Gothique	3
OUTIL 2 : Art Islamique et Géométrie	3
OUTIL 3: Art de la Renaissance et Géométrie	4
OUTIL 4 : Polyèdres et Perspective	6
OUTIL 5 : Origami et Relations spatiales	9
OUTIL 6 : L'art Mathématique de M. C. Escher	11
OUTIL 7 : Une exposition synchrone d'oeuvres d'art-mathématique	12
OUTIL 8 : Le Nombre d'or en Arts et Architecture	13
OUTIL 9 : L'imagerie artistique dans les fonctions	15
OUTIL 10 : Motifs dans les pavés portugais	16
OUTIL 11 : Fractales et Dimensions	17
OUTIL 12 : Spirale de Fibonacci et arts visuels	18
OUTIL 13 : Géométrie du pliage du papier	19
OUTIL 14 : Rapports de fréquences des notes de musique	20
OUTIL 15 : Accords Pythagoriciens et Proportions	21
OUTIL 16 : Suites numériques dans les séries harmoniques	23
OUTIL 17 : La musique et la proportion dorée	24
OUTIL 18 : Puissances dans la gamme tempérée	25
OUTIL 19 : Rapports de fréquences des notes de musique	26
OUTIL 20 : L'étude du battement	27
OUTIL 21 : Fonctions trigonométriques dans les séries harmoniques	28
OUTIL 22 : Musique et Fibonacci	29
OUTIL 23 : Pythagore et sa musique mathématique	30
OUTIL 24 : Pythagore et sa musique mathématique	30
OUTIL 25 : Bach et le ruban musical de Möbius	31
OUTIL 26 : Bach et le ruban musical de Möbius	31

OUTIL 27 : Logarithmes dans la gamme tempérée	31
OUTIL 28 : Arithmétique de base dans « L'homme qui calculait », chapitre 3	32
OUTIL 29 : Géométrie "Éléments" d'Euclide	33
OUTIL 30 : Volumes dans « L'homme qui calculait », Chapitre VIII	33
OUTIL 31 : Aborder la logique mathématique par "La leçon" de E. Ionesco	34
OUTIL 32 : Les Nombres Premiers dans "The Big Bang Theory" par Chuck Lorre et Bill Prady	36
OUTIL 33 : Théorie des nombres premiers et partitions dans "L'Homme qui défiait l'infini" de Matthew Brown	38
OUTIL 34 : Mathématiques non formelles dans le film "X+Y"	39
OUTIL 35 : Le Théorème de Bayes dans "Retour vers le Futur" de Robert Zemeckis	40
OUTIL 36 : Probabilités dans "Las Vegas 21" par Robert Luketic	41
OUTIL 37 : Système de coordonnées dans le film "Kingdom of Heaven"	42
OUTIL 38 : Probabilités et statistiques dans le film "Le Stratège"	43
OUTIL 39 : Croissance exponentielle dans le film "Un monde meilleur"	44
OUTIL 40 : Théorie des nombres premiers dans "L'Homme qui défiait l'infini"	45
OUTIL 41 : Dérivée d'une fonction dans le film "Les Figures de l'ombre"	46
TOOL 42: Les nombres triangulaires dans le livre "La Formule préférée du professeur"	47
OUTIL 43 : La fonction quadratique à travers le film "Ciel d'octobre"	48
OUTIL 44 : Les nombres premiers - L'Homme qui défiait l'infini	49
OUTIL 45 : Probabilité dans le film suédois "Mirrored"	49
OUTIL 46 : Les nombres premiers dans "Le Bizarre Incident du chien pendant la nuit" de Mark Haddon	50
OUTIL 47 : Décryptage avec la Suite de Fibonacci dans "Da Vinci Code" de Dan Brown	51
OUTIL 48 : Écriture en Pi ( $\pi$ )	52
OUTIL 49 : Les mathématiques dans "Les Aventures d'Alice au pays des merveilles" de Lewis Carroll	53
OUTIL 50 : Graphiques dans le livre "Le théorème des Katherine"	56
OUTIL 51 : « Papa Moumine et la mer » et la mise à l'échelle	56
OUTIL 52 : La topologie dans le "Le Guide du voyageur galactique"	56
OUTIL 54 : Probabilité dans le livre "Le Bizarre Incident du chien pendant la nuit"	57
TOOL 55	58

## **OUTIL 1 : Art Gothique**

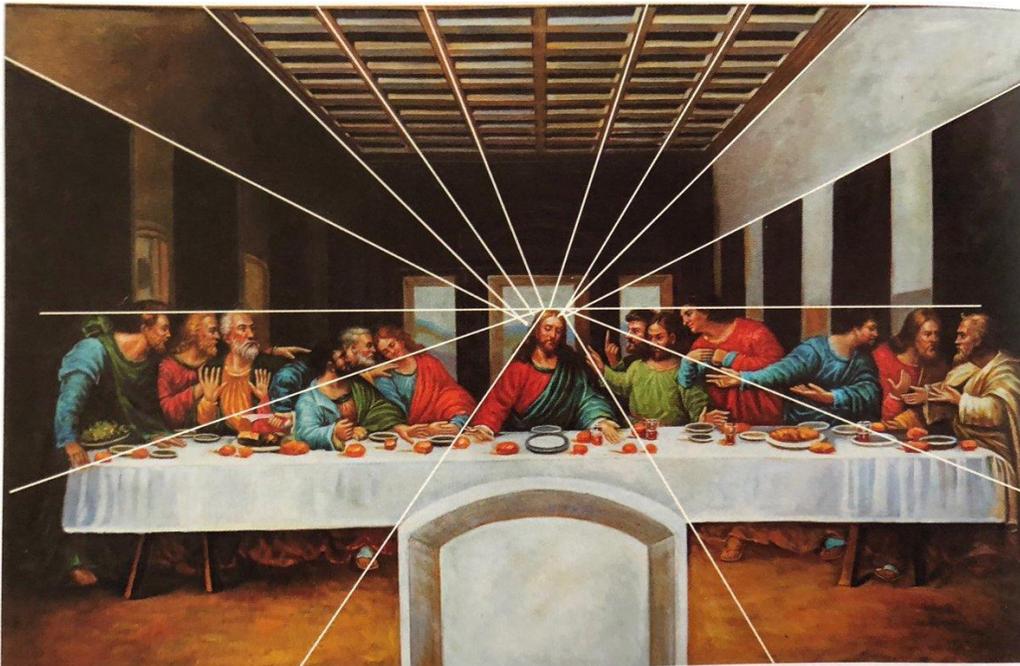
[explication donnée dans l'outil]

## **OUTIL 2 : Art Islamique et Géométrie**

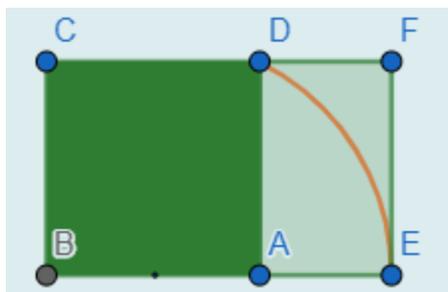
[explication donnée dans l'outil]

## OUTIL 3: Art de la Renaissance et Géométrie

A)



B)



- $\frac{2,7}{b} = 1,618$

- $2,7 = 1,618 * b$

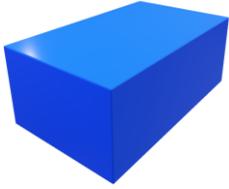
- $b = \frac{2,7}{1,618}$

- $b = 1,669$

C)

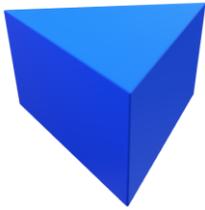


Ceci est un cône. Comme il est courbé, ce n'est pas un polyèdre!



Oui, il s'agit d'un prisme rectangulaire

$$F + V - E = 2 \Leftrightarrow 6 + 8 - 12 = 2$$



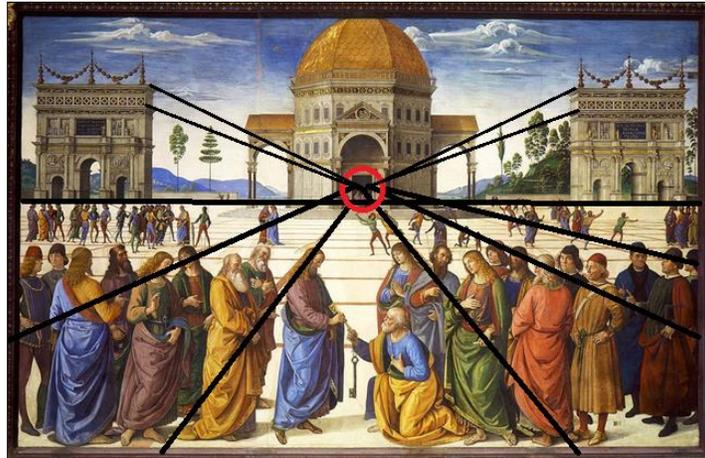
Oui, il s'agit d'un prisme triangulaire

$$5 + 6 - 9 = 2$$

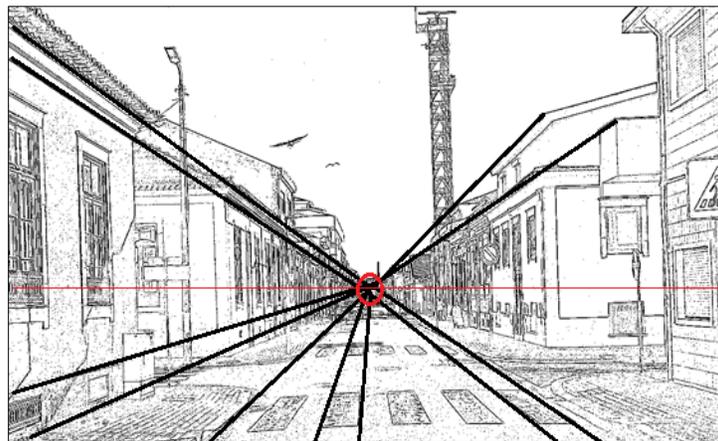
# OUTIL 4 : Polyèdres et Perspective

## TÂCHE 1

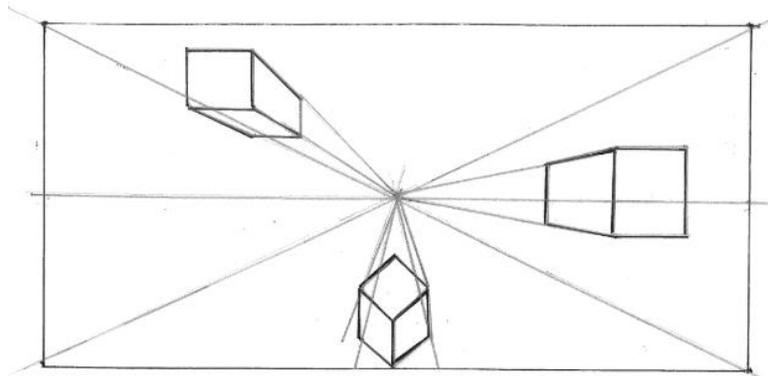
1.1 [Réponse possible]



1.2 [Réponse possible]

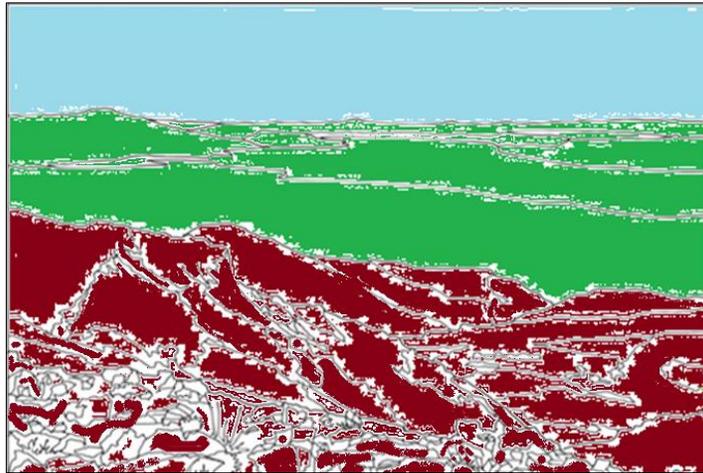


1.3 [Réponse possible]



## TÂCHE 2

[Réponse possible]



## TÂCHE 3

Fig. 20 – Pas de perspective;

Fig. 21 – Perspective aérienne;

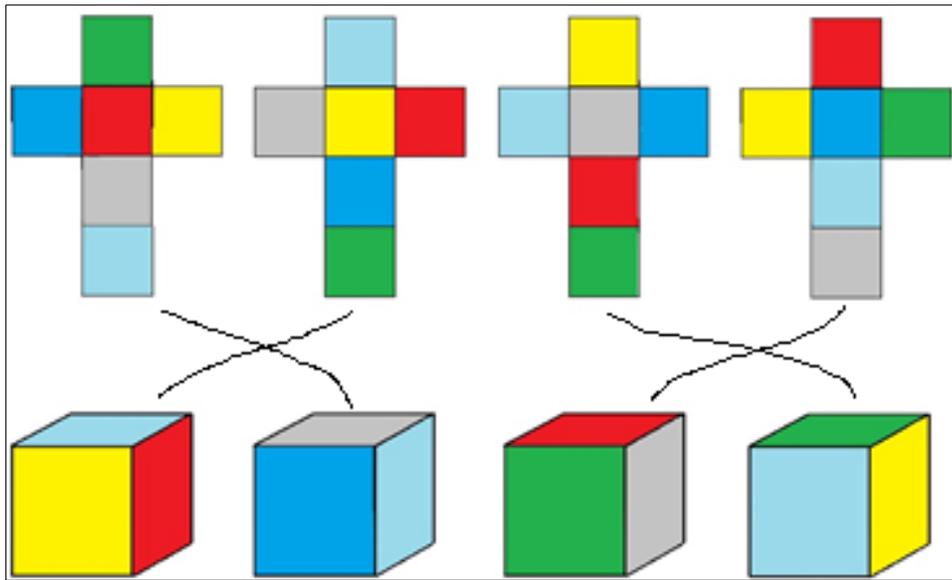
Fig. 22 – Perspective linéaire.

## TÂCHE 4

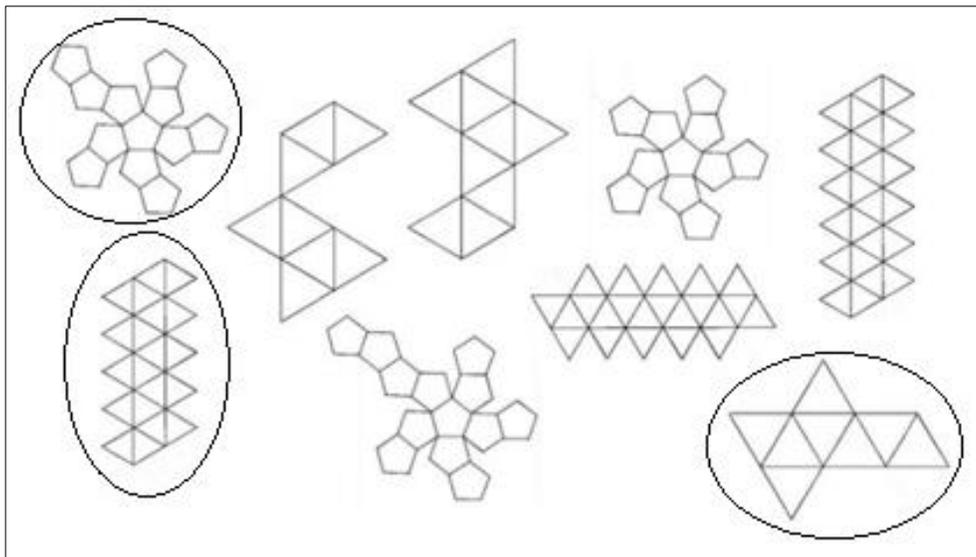
Solide de Platon	Nombre de faces (f)	Nombre de sommets (s)	Nombre d'arêtes (a)	$a + 2$	$f + s$
Hexaèdre	6	8	12	14	14
Tétraèdre	4	4	6	8	8
Octaèdre	8	6	12	14	14
Dodécaèdre	12	20	30	32	32
Isocaèdre	20	12	30	32	32

### TÂCHE 5

5.1



5.2

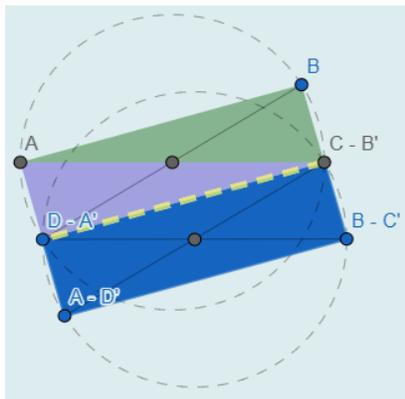


## OUTIL 5 : Origami et Relations spatiales

### Théorème de Thalès

- a) Oui
- b) Oui
- c) Que les angles  $\angle ABC$  et  $\angle ADC$  sont des angles droits!
- d) [Réponse possible]

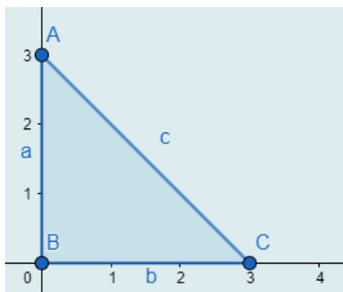
Si nous plions le papier sur le segment DC:



Nous pouvons projeter le même rectangle en dessous, qui sera appelé A'B'C'D' dans lequel:

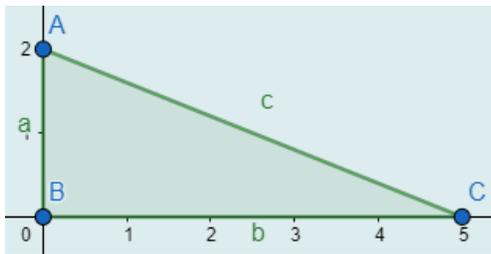
- Le segment AB sera replié sur le segment D'C
- Le segment DC deviendra le segment A'B'

### Théorème de Pythagore



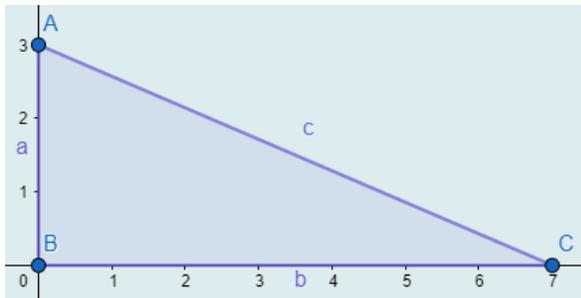
$$3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$$

$$c = \sqrt{18} = 4.2426$$



$$2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$$

$$c = \sqrt{29} = 5.3852$$



$$3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$$

$$c = \sqrt{58} = 7.6158$$

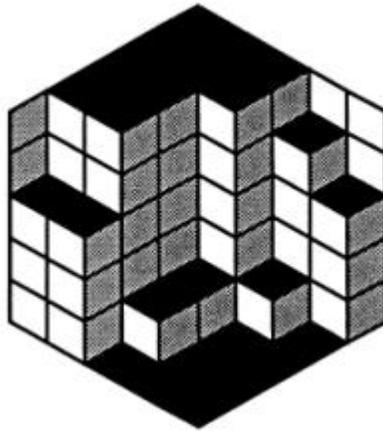
## TÂCHE

- a) Oui
- b) Oui
- c) Oui
- d) Oui

## OUTIL 6 : L'art Mathématique de M. C. Escher

### TÂCHE

- 1) Il y a le même nombre de bonbons.
- 2)



- 3) 3) Le constat est qu'il se transforme en une forme tridimensionnelle. Le cube. Les calissons ont tendance à se comporter comme les faces d'un cube unitaire (cubes dont les bords sont de longueur un).

## OUTIL 7 : Une exposition synchrone d'oeuvres d'art-mathématique

### TÂCHE

A 6

B 7

C 3

D 4

E 1

F 2

G 5

## OUTIL 8 : Le Nombre d'or en Arts et Architecture

### TÂCHE 1

a) Nous commençons à partir de  $\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ . Cette equation peut s'écrire:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a}$$

Mais nous savons que  $\frac{a}{b} = \varphi$ , tandis que  $\frac{b}{a} = \frac{1}{\varphi}$

Nous obtenons donc  $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

b) Nous commençons par :  $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

$$\Rightarrow \varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Nous utilisons la formule pour identifier les deux racines (solutions) :

$$\varphi_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ tandis que } a=1, b=-1, c=-1$$

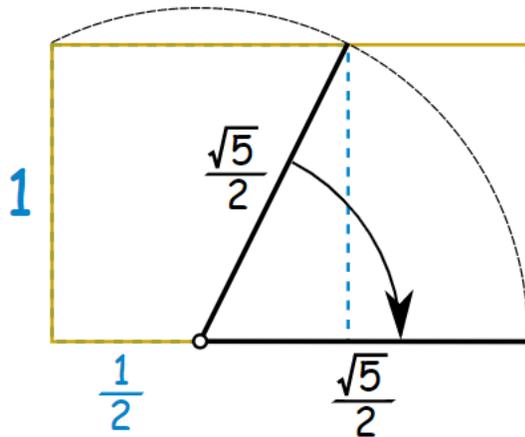
$$\Rightarrow \varphi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4}}{2}$$

Nous ne gardons que la solution positive ( longueur)

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618$$

## TÂCHE 2

a) à g)



h) Souviens-toi que  $\varphi = \frac{a+b}{a}$ , tandis que :  $a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  et  $a=1$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$$

## OUTIL 9 : L'imagerie artistique dans les fonctions

### TÂCHE 1

[Réponse Possible]

<b>C</b>	$(x+4)^2+(y-1)^2=1^2 \{x<-3.25\}$	
<b>L</b>	$x=-2.5\{0<y<2\}$	$y=0 \{-2.5<x<-1.5\}$
<b>A</b>	$2x+2 \setminus \{-1<x<0\}$	$-2x+2 \setminus \{0<x<1\}$
	$y=1 \{-0.5<x<0.5\}$	
<b>S</b>	$(x-2)^2+(y-1.5)^2=0.25 \{y>1.5\}$	$(x-2)^2+(y-1.5)^2=.25 \{1.5 < x < 2\}$
	$(x-2)^2+(y-0.5)^2=.25 \{2 < x < 2.5\}$	$(x-2)^2+(y-0.5)^2=.25 \{y < 0.5\}$
<b>S</b>	$(x-3.5)^2+(y-1.5)^2=0.25 \{y > 1.5\}$	$(x-3.5)^2+(y-1.5)^2=.25 \{3 < x < 3.5\}$
	$(x-3.5)^2+(y-0.5)^2=.25 \{3.5 < x < 4\}$	$(x-3.5)^2+(y-.5)^2=.25 \{y < 0.5\}$

<b>M</b>	$x=-6\{0<y<2\}$	$-1x-4\{-6 < x < -5\}$
	$x+6\{-5 < x < -4\}$	$x=-4\{0<y<2\}$
<b>A</b>	$2x+6\{-3 < x < -2\}$	$-2x+2\{-2<x<-1\}$
	$y=1\{-2.5<x<-1.5\}$	
<b>T</b>	$y=2\{0<x<2\}$	$x=1\{0<y<2\}$
<b>H</b>	$x=3\{0<y<2\}$	$x=3 \{0<y<2\}$
	$x=3\{0<y<2\}$	
<b>S</b>	$(x-6)^2+(y-1.5)^2=0.25\{y>1.5\}$	$(x-6)^2+(y-1.5)^2=.25\{5 < x < 6\}$
	$(x-6)^2+(y-0.5)^2=.25\{6 < x < 6.5\}$	$(x-6)^2+(y-0.5)^2=.25\{y < 0.5\}$

### TÂCHE 2

[Question ouverte]

## OUTIL 10 : Motifs dans les pavés portugais

### TÂCHE 1

1.1 Rotation de  $180^\circ$  (demi-tour).

1.2 Vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{t}$ .

### TÂCHE 2

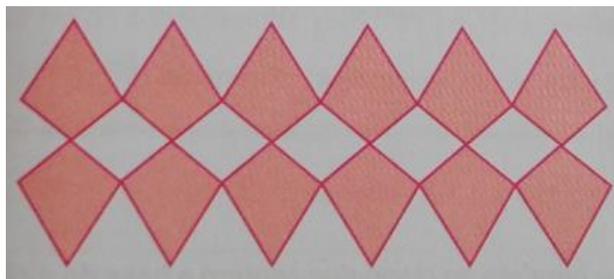
2.1 Réflexion glissée et translation.

2.2 Réflexions verticales, réflexions horizontales, rotation de  $180^\circ$  (demi-tour) et translation.

2.3 Réflexion verticale, réflexion glissée, rotation de  $180^\circ$  (demi-tour) et translation.

### TÂCHE 3

[Réponse possible]



### TÂCHE 4

I: Translation;

II: Réflexion verticale et translation;

III: Réflexion horizontale et translation;

IV: Rotation de  $180^\circ$  (demi-tour) et translation.

## OUTIL 11 : Fractales et Dimensions

Archimède a exploité le fait que la circonférence d'un cercle est délimitée par le périmètre d'un polygone inscrit et le périmètre d'un polygone circonscrit. Ce fait a été utilisé pour approximer  $\pi$ . Archimède a utilisé un polygone à 96 côtés pour trouver l'approximation suivante :

$$\frac{223}{71} < \pi > \frac{22}{7}$$

Il est facile d'utiliser cette méthode en utilisant la trigonométrie. Archimède n'a cependant utilisé que la géométrie et les chiffres grecs.

## OUTIL 12 : Spirale de Fibonacci et arts visuels

### TÂCHE 1

$M(7) = 13$  paires de lapins

$M(12) = 144$  paires de lapins

$M(25) = 75025$  (puisque  $M(22) = 17711$  et  $M(24) = 46368$ )

### TÂCHE 2

a) 2 façons (1-1-1, 1-1-2)

b) 3 façons (1-1-1-1, 1-2-1, 1-1-2)

c) 55 façons

## OUTIL 13 : Géométrie du pliage du papier

Solide	Nombre de faces	Forme sur les surfaces latérales	Nombre de degrés dans l'angle de la surface latérale	La somme des angles dans les coins du solide
tétraèdre	4	equilateral triangle	60	$3 \cdot 60 = 180$
hexaèdre	6	square	90	360
octaèdre	8	equilateral triangle	60	180
dodécaèdre	12	pentagon	108	540
icosaèdre	20	equilateral triangle	60	180

## OUTIL 14 : Rapports de fréquences des notes de musique

Il a été prouvé que  $r_3 = r_2 \cdot r_1$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{6}{5} \cdot r_1$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{5}{4}$$

Mais nous savons que  $r_1 = f_1/f_0$  et que  $f_1 = 5$  Hz

$$\Rightarrow f_0 = 4 \text{ Hz}$$

# OUTIL 15 : Accords Pythagoriciens et Proportions

## TÂCHE

1)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
8:	9										x2
	2:				3						x9
16:					27						

2)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
16:					27						x2
					2:				3		x27
32:									81		

3)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
32:									81		x2
		1:							2		x81
64:		81									

4)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
64:		81									x2
		2:				3					x81
128:						243					

5)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
128:						243					x2
						2:				3	x243
256:										729	

6)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
256:										729	x2
			1:							2	x729
512:			729								

Tu peux maintenant donner tous les rapports des intervalles de C (Do) aux autres notes !

C	D	E	F	G	A	B	C'
1/1	9/8	81/64	729/512	3/2	27/16	243/128	2/1

## OUTIL 16 : Suites numériques dans les séries harmoniques

### TÂCHE 1

Clique sur le lien pour voir un exemple :

<https://www.youtube.com/watch?v=AQJw95-H9mM>

### TÂCHE 2

2.1)  $u_n = 5n - 2$

2.2)  $u_n = -3n + 1$

2.3)  $u_n = \frac{1}{n}$

2.4)  $u_n = \frac{1}{3n}$

2.5)  $u_n = \frac{1}{n^3}$

### TÂCHE 3

3.1) 3, 6, 9, 12, 15, ...

3.2) 4, 9, 14, 19, 24, ...

3.3)  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$

3.4)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

## OUTIL 17 : La musique et la proportion dorée

### TÂCHE

$$1) \quad \varphi = \frac{(a+b)}{a}$$

$$a = \frac{(a+b)}{\varphi}$$

$$a = \frac{55}{\varphi} = 34$$

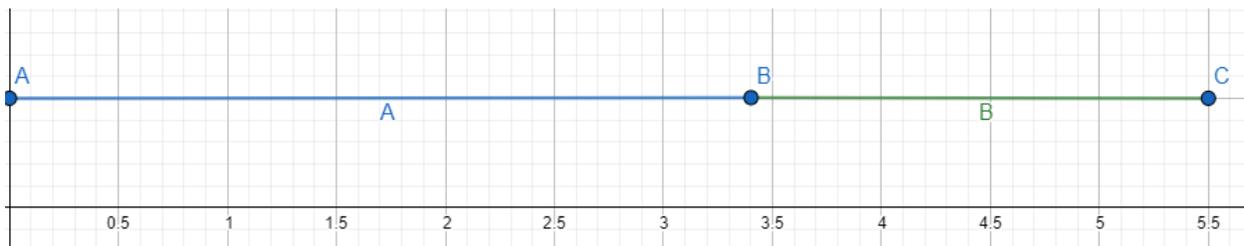
$$2) \quad \varphi = \frac{a}{b}$$

$$b = \frac{a}{\varphi}$$

$$b = \frac{34}{\varphi} = 21$$

$$3) \quad \varphi = \frac{55}{34} = \frac{34}{21} \approx 1,618$$

4)



## OUTIL 18 : Puissances dans la gamme tempérée

### TÂCHE 1

1.1.  $-8$

1.2.  $1$

1.3.  $\frac{4}{25}$

1.4.  $0$

1.5.  $\frac{1}{16}$

### TÂCHE 2

2.11.  $4^3 \times 4^5 = 4^8$ ;

2.12.  $(-3)^3 \times (-3)^5 = (-3)^8$ ;

2.13.  $5^7 : 5^5 = 5^2$ ;

2.14.  $\left(-\frac{3}{2}\right)^8 : \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ ;

2.15.  $(3^5)^2 = 3^{10}$ ;

2.16.  $(3^5)^3 = 3^{15}$ ;

2.17.  $\left(\frac{27}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^6$

### TÂCHE 3

3.1.  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ;

3.2.  $\left(\frac{5}{3}\right)^{12}$ ;

3.3.  $\left(\frac{1}{5}\right)^{11}$ ;

3.4.  $\left(\frac{3}{5}\right)^{12}$ .

### TÂCHE 4

4.1.  $64$ ;

4.2.  $18$ ;

4.3.  $\frac{9}{25}$ .

## OUTIL 19 : Rapports de fréquences des notes de musique

a)  $ma+nb+sc = m \log(2) + n \log(3/2) + s \log(5/4)$

Mais nous devons considérer les propriétés suivantes des logarithmes :

$$x \log y = \log(y)^x$$
$$\text{et } \log(x) + \log(y) = \log(xy)$$

Donc,  $ma+nb+sc = \log(2)^m + \log(3/2)^n + \log(5/4)^s$

$$ma+nb+sc = \log [ (2)^m (3/2)^n (5/4)^s ]$$

Par conséquent, le rapport de l'intervalle aléatoire  $ma+nb+sc$  is  $(2)^m (3/2)^n (5/4)^s$

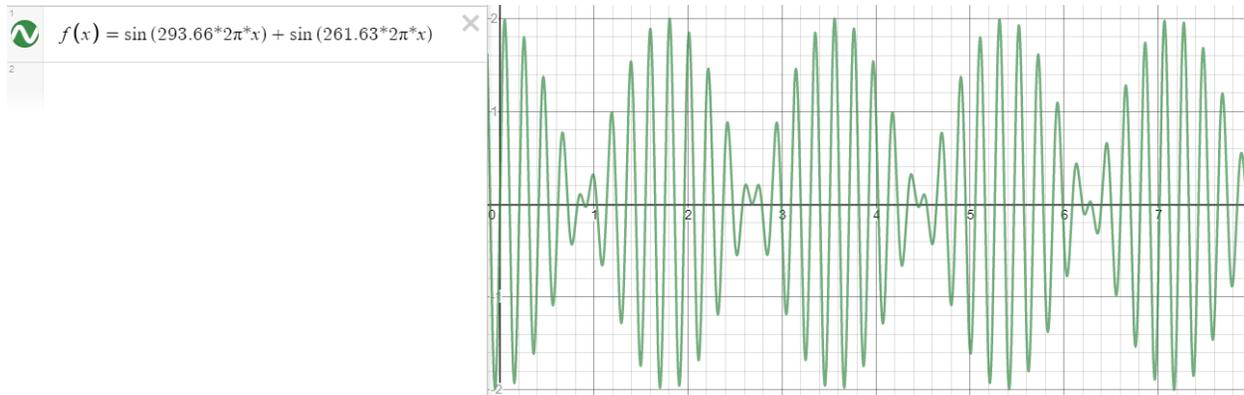
De cette manière, nous avons prouvé que tout intervalle peut être déterminé en fonction de a, b et c.

b) L'intervalle est défini comme  $b+c$ , (nous avons pris l'intervalle aléatoire  $ma + nb + sc$  en considérant que  $m=0$ ,  $n=1$  et  $s=1$ ). Dès lors, le rapport est de  $(3/2)(5/4) = (15/8)$

## OUTIL 20 : L'étude du battement

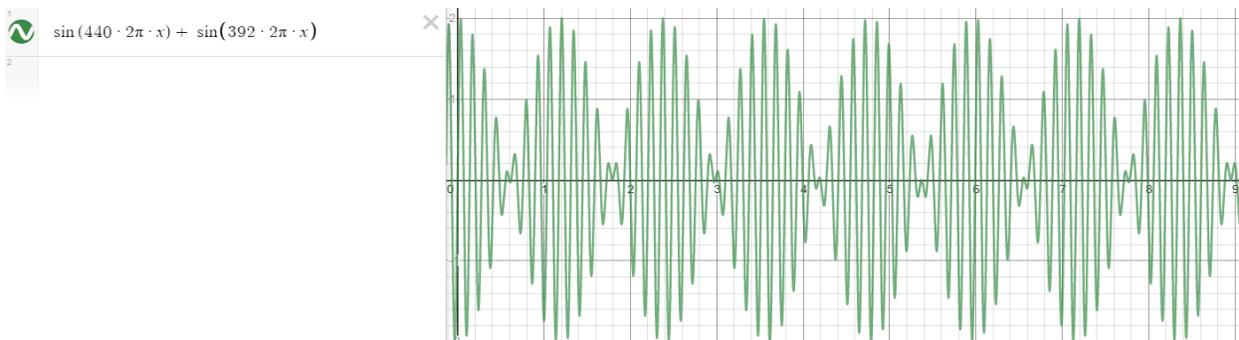
### 1) D et C

$$\sin(293.66 * 2\pi * x) + \sin(261.63 * 2\pi * x) = 2\sin(277.64x * 2\pi) + \cos(32x * 2\pi)$$



### 2) A et G

$$\sin(440 * 2\pi * x) + \sin(392 * 2\pi * x) = 2\sin(416x * 2\pi) + \cos(48x * 2\pi)$$



## OUTIL 21 : Fonctions trigonométriques dans les séries harmoniques

### TÂCHE 1

$$1.1 \quad P = \pi$$

$$1.2 \quad P = 6$$

$$1.3 \quad P = \frac{2\pi}{5}$$

$$1.4 \quad P = 2$$

$$1.5 \quad P = \frac{\pi}{2}$$

$$1.6 \quad P = 2$$

### TÂCHE 2

$$2.1. x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$2.2. x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

2.3. Impossible parce que  $-1 \leq \sin x \leq 1$  et  $2 \notin [-1; 1]$ ;

$$2.4. x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

### TÂCHE 3

$$3.1. x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$3.2. x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$3.3. x = \pi \vee x = 3\pi.$$

### TÂCHE 4

$$4.1. x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$4.2. x = \frac{\pi}{8} \vee x = \frac{5\pi}{8} \vee x = \frac{9\pi}{8} \vee x = \frac{13\pi}{8}.$$

## OUTIL 22 : Musique et Fibonacci

$$x_{16} = \frac{\varphi^{16} - (1-\varphi)^{16}}{\sqrt{5}} = 987$$

$$x_{17} = \frac{\varphi^{17} - (1-\varphi)^{17}}{\sqrt{5}} = 1597$$

$$x_{18} = \frac{\varphi^{18} - (1-\varphi)^{18}}{\sqrt{5}} = 2584$$

$$x_{19} = \frac{\varphi^{19} - (1-\varphi)^{19}}{\sqrt{5}} = 4181$$

$$x_{20} = \frac{\varphi^{20} - (1-\varphi)^{20}}{\sqrt{5}} = 6765$$

## OUTIL 23 : Pythagore et sa musique mathématique

### TÂCHE

6) La longueur d'onde du son est égale à 4 fois la distance entre la bouche et la surface de l'eau, une onde d'un quart se forme donc dans la bouteille ! Plus les tonalités sont élevées, plus les longueurs d'onde sont petites.

$$\frac{340 \text{ m/s}}{\text{Fréquence}} = \text{longueur d'onde}$$

## OUTIL 24 : Pythagore et sa musique mathématique

### TÂCHE 1

6) La longueur d'onde du son est égale à 4 fois la distance entre la bouche et la surface de l'eau, une onde d'un quart se forme donc dans la bouteille ! Plus les tonalités sont élevées, plus les longueurs d'onde sont petites.

$$\frac{340 \text{ m/s}}{\text{Fréquence}} = \text{longueur d'onde}$$

### TÂCHE 2

Si tu souffles dans la bouteille, c'est l'air qui va vibrer. Si tu frappes la bouteille, c'est la bouteille qui vibre. Le son lorsque l'on souffle sera plus fort que celui que l'on produit en frappant la bouteille.

### TÂCHE 3

Utilise les informations (la formule) figurant dans la réponse à la Tâche 1 et mesure tes bouteilles.

## OUTIL 25 : Bach et le ruban musical de Möbius

### TÂCHE

a)  $4\frac{2}{3} au$

b)  $2\frac{2}{3} au$

## OUTIL 26 : Bach et le ruban musical de Möbius

### TÂCHE

a) 3 tours

b) 102 cm

## OUTIL 27 : Logarithmes dans la gamme tempérée

### TÂCHE 1

1.1. 6      1.2. 1      1.3. -4      1.4. 0      1.5.  $-\frac{1}{2}$

1.6. 6      1.7. 3      1.8. -2      1.9.  $\frac{1}{2}$       1.10.  $\frac{4}{3}$

1.11.  $-\frac{1}{2}$       1.12. -2      1.13. -7

### TÂCHE 2

2.11. 4;

2.12. -2;

2.13. -7;

2.14.  $-\frac{19}{5}$ ;

2.15.  $-1$ ;

2.16.  $-\frac{5}{6}$ .

### TÂCHE 3

3.1. 10;

3.2. 1;

3.3. 40.

### TÂCHE 4

-2.

## OUTIL 28 : Arithmétique de base dans « L'homme qui calculait », chapitre 3

### TÂCHE 1

1) b

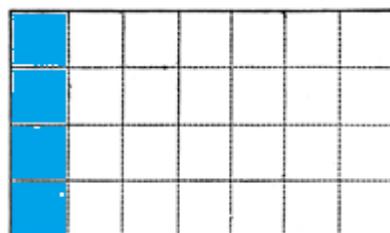
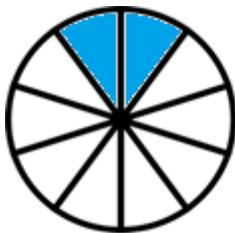
2) a

3) b

4.1) [Réponse possible]

4.2) [Réponse possible]

5.1) b



5.2) c

5.3) b

5.4) b

5.5) c

5.6) c

6.1) b

6.2) c

6.3) a

6.4) a

7) a

8) b

9) b

10) c

11) b

## TÂCHE 2

[Jeu de rôles]

## OUTIL 29 : Géométrie "Éléments" d'Euclide

### TÂCHE

[Jeu de rôles]

## OUTIL 30 : Volumes dans « L'homme qui calculait », Chapitre VIII

### TÂCHE 1

[Jeu de rôles]

### TÂCHE 2

1.1.216 cm<sup>3</sup>.

1.2.24 cm<sup>3</sup>.

1.3.192 cm<sup>3</sup>.

### TÂCHE 3

564π cm<sup>3</sup>.

# OUTIL 31 : Aborder la logique mathématique par "La leçon" de E. Ionesco

## TÂCHE 1

(I)

- (i) Non
- (ii) Oui
- (iii) Non

(II)

P	P'
A	A' (Faux-F)
Y	Y' (Vrai- V)

(III)

P1	P2	P1 and P2
A	Y	Faux (F)
Y	A	Faux (F)
Y	Y	Faux (F)
A	A	Vrai (V)

(IV)

P1	P2	P1 or P2
A	Y	Vrai (V)
Y	A	Vrai (V)
Y	Y	Faux (F)

A	A	Vrai (V)

## TÂCHE 2

### SUGGESTIONS

- Après avoir discuté de quelques concepts de base de la logique mathématique, tels que la vérité mathématique, l'implication mathématique, l'équivalence mathématique, ce scénario peut être lu ou donné comme devoir à la maison pour être mémorisé et joué par les élèves.

L'enseignant peut décider de donner des informations aux élèves sur l'identité d'Eugène Ionesco au moyen de documents imprimés, par exemple en distribuant des documents ou en leur donnant le lien:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne\\_Ionesco](https://en.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Ionesco)

Il peut aussi demander aux élèves de faire une recherche rapide sur Ionesco et de la présenter par groupes de deux pour cette tâche principale.

- Musique : elle est toujours la bienvenue en arrière-plan. L'enseignant peut la choisir d'avance ou demander aux élèves d'en choisir une appropriée.  
Accessoires : Ils peuvent utiliser certains instruments mathématiques de la classe.  
Costumes : peuvent être très simples et venir de chez eux.

## OUTIL 32 : Les Nombres Premiers dans “The Big Bang Theory” par Chuck Lorre et Bill Prady

### Nombres premiers et composés

55	composé
41	premier
37	premier
49	composé
17	premier

### Décomposition en facteurs premiers

- a)  $15 = 5 \times 3$
- b)  $36 = 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 3^2 \times 2^2$
- c)  $72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3^2 \times 2^3$
- d)  $118 = 2 \times 59$
- e)  $270 = 5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 5 \times 2 \times 3^3$

Essaie cela avec les chiffres suivants :

a)  $\sqrt{493} = 22.2036033112$

Voir si on peut le diviser par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

On ne peut le diviser que par 17

$$493 = 17 \times 29$$

b)  $\sqrt{2486} = 49.8598034493$

Voir si on peut le diviser par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

On ne peut le diviser que par 2, 11

$$2486 = 2 \times 11 \times 113$$

c)  $\sqrt{11541} = 107.429046352$

Voir si on peut le diviser par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107

On ne peut le diviser que par 3

$$11541 = 3 \times 3847$$

d)  $\sqrt{199} = 14.1067359797$

Voir si on peut le diviser par by 2, 3, 5, 7, 11, 13

On ne peut le diviser par aucun nombre, c'est donc un nombre premier.

## TÂCHE

1.  $\sqrt{73} = 8.54400374532$

Voir si on peut le diviser par 2, 3, 5, 7

On ne peut le diviser par aucun nombre, c'est donc un nombre premier.

2.  $\sqrt{37} = 6.0827625303$

Voir si on peut le diviser par 2, 3, 5

On ne peut le diviser par aucun nombre, c'est donc un nombre premier.

3. 73 est le 21<sup>ième</sup> nombre premier

$$N = 21 \text{ et } P_n = 73$$

$$21 = 7 \times 3$$

4. 37 est le 12<sup>ième</sup> nombre premier

$$N = 21 \text{ et } P_n = 73$$

$$\text{inv}(p_{21}) = \text{inv}(73) = 37$$

$$p_{\text{inv}(21)} = p_{12} = 37$$

## OUTIL 33 : Théorie des nombres premiers et partitions dans "L'Homme qui défiait l'infini" de Matthew Brown

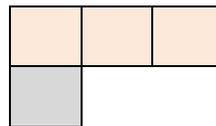
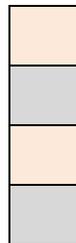
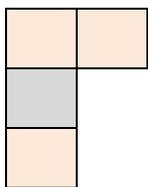
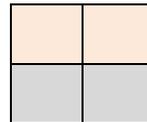
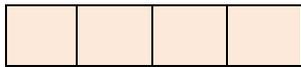
### TÂCHE

Écris-les ci-dessous :

- 4
- $2+2$ ;
- $1+3$ ;
- $1+1+2$ ;
- $1+1+1+1$ ;

Dessine le diagramme de Young pour chacune des partitions de 4 :

Réponse :



## OUTIL 34 : Mathématiques non formelles dans le film "X+Y"

**La solution des questions abordées dans le cadre de cette tâche est décrite ici :**

Donnez 0 aux cartes face visible et 1 aux cartes face cachée.

Au départ, toutes les cartes sont faces cachées, donc la ligne initiale est 1111...

Un coup peut changer de 10 à 01 ou de 11 à 00 et donc le nombre résultant en binaire est strictement inférieur au précédent.

Ainsi, à partir de 1111... le nombre diminue à chaque coup, donc les coups doivent finalement se terminer à 000...

Quelle que soit la carte face cachée que vous choisissez, vous finirez par obtenir toutes les cartes face visible.



**La solution du film par le protagoniste (ici en anglais) :**

[https://www.youtube.com/watch?time\\_continue=14&v=mYAahN1G8Y8](https://www.youtube.com/watch?time_continue=14&v=mYAahN1G8Y8)

## OUTIL 35 : Le Théorème de Bayes dans “Retour vers le Futur” de Robert Zemeckis

### TÂCHE

Nous savons que:

- $P(1955 | F328)$  et  $P(1871 | F328)$  sont égales à 0,0.
- Nous avons maintenant deux options : 1985 and 2019

$$P(1985 | F328) = \frac{P(1985) * P(F328 | 1985)}{P(F328)}$$

$$P(2019 | F328) = \frac{P(2019) * P(F328 | 2019)}{P(F328)}$$

Nous avons besoin de connaître  $P(F328)$  avant de continuer :

$$P(F328) = (0,12 * 0,032) + (0,03 * 0,0064) = 0,004$$

$$P(1985 | F328) = \frac{0,032 * 0,12}{0,004} = 0,96$$

$$P(2019 | F328) = \frac{0,0064 * 0,03}{0,004} = 0,04$$

Nous pouvons en déduire que nous sommes en 1985 puisque la probabilité est de 96% contre seulement 4% pour 2019.

## OUTIL 36 : Probabilités dans "Las Vegas 21" par Robert Luketic

### TÂCHE

Voyons d'abord la probabilité d'avoir chacune des options possibles :

$P(\text{As}) = \frac{4}{10}$	$P(10) = \frac{2}{10}$	$P(\text{V}) = \frac{1}{10}$	$P(4) = \frac{1}{10}$	$P(5) = \frac{2}{10}$
-------------------------------	------------------------	------------------------------	-----------------------	-----------------------

- On remarque que les deux cartes ne peuvent pas comporter un 4 ni un 5, puisque la somme avec l'autre n'atteindra pas 21 points.
- Nous remarquons également que la main devra comporter un As et une carte à 10 points.
- Pour calculer cela, nous devons calculer la probabilité d'avoir soit un As et un 10, soit un As et un Valet.

Pour l'écrire mathématiquement, le calcul final sera :  $P(A \cap J \cup A \cap 10)$

→ Nous devons utiliser la formule  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$  pour chaque cas.

$$\text{A) } P(A \cap 10) = \frac{4}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{8}{100} = \frac{4}{50}$$

$$\text{B) } P(A \cap \text{V}) = \frac{4}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{4}{100} = \frac{2}{50}$$

- Maintenant, nous devons calculer  $P(A \cap B) = \frac{4}{50} \times \frac{2}{50} = \frac{8}{250}$
- Enfin, nous utiliserons la formule  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

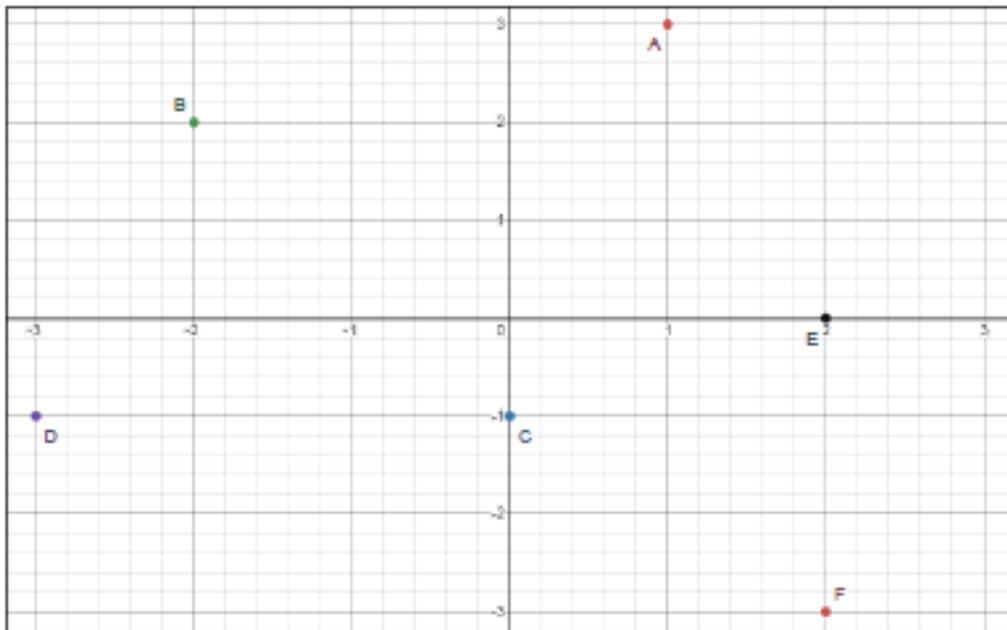
$$P(A \cup B) = \frac{4+2}{50} - \frac{8}{250} = \frac{30}{250} - \frac{8}{250} = \frac{22}{250} = \frac{11}{125} = 0,088$$

## OUTIL 37 : Système de coordonnées dans le film "Kingdom of Heaven"

### TÂCHE 1

$A(2, 0)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(-3, 4)$ ,  $D(-2, -1)$  et  $E(0, -2)$

### TÂCHE 2



### TÂCHE 3

[Jeu]

## OUTIL 38 : Probabilités et statistiques dans le film "Le Stratège"

### TÂCHE 1

$$1.1 \quad RC = \frac{TB \cdot (H + BB)}{PA}$$

$$RC(HOU) = \sim 738$$

$$RC(LAA) = \sim 680$$

$$RC(OAK) = \sim 767$$

$$RC(SEA) = \sim 677$$

$$RC(TEX) = \sim 666$$

### 1.2

$$HOU = 7,4\%$$

$$LAA = 5,6\%$$

$$OAK = 5,6\%$$

$$SEA = 0\%$$

$$TEX = 9,6\%$$

### TÂCHE 2

#### 2.1

$$SecA = \frac{BB + (TB - H) + (SB + CS)}{AB}$$

$$SecA(PG) = 0,41$$

$$SecA(CD) = 0,21$$

$$SecA(JV) = 0,35$$

$$SecA(YG) = 0,19$$

$$SecA(JM) = 0,2$$

Selon les statistiques de la moyenne secondaire, Paul Goldschmidt est susceptible d'être globalement plus efficace.

$$2.2 \quad RF = \frac{A + PO}{G}$$

$$RF(PG) = 9,06$$

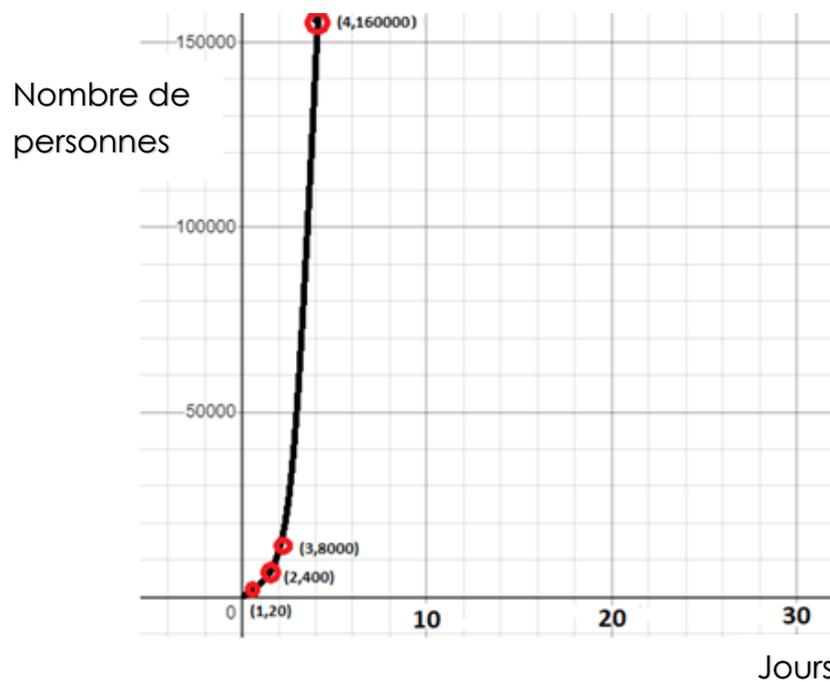
## OUTIL 39 : Croissance exponentielle dans le film "Un monde meilleur"

### TÂCHE 1

#### 1.1

Heures	Nombre de cellules	Formule
1	$20 = 20$	$y = 20^1$
2	$400 = 20(20)$	$y = 20^2$
3	$8000 = 20(20 \times 20)$	$y = 20^3$
4	$160000 = 20(20 \times 20 \times 20)$	$y = 20^4$

#### 1.2



### TÂCHE 2

$$2000(1 + 0,15)^6 = \sim 4626$$

### TÂCHE 3

$$81(1 - 0,1)^5 = \sim 48$$

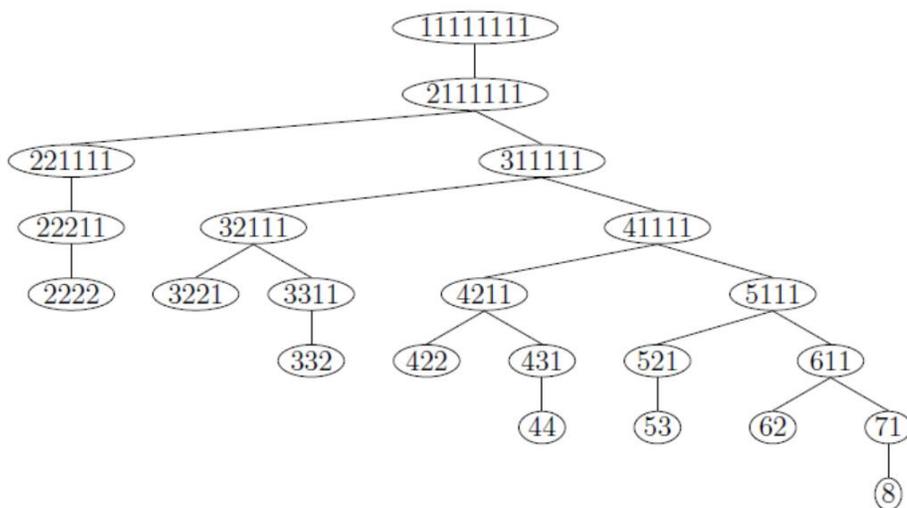
## OUTIL 40 : Théorie des nombres premiers dans "L'Homme qui défiait l'infini"

$$S = p(4) + p(6) + p(8) = 5 + 11 + 22 = 38$$

$$p(6) = 11$$

- 1+1+1+1+1+1
- 2+1+1+1+1
- 2+2+2
- 2+2+1+1
- 3+1+1+1
- 3+2+1
- 3+3
- 4+1+1
- 4+2
- 5+1
- 6

Similairement,  $p(8) = 22$



## OUTIL 41: Dérivée d'une fonction dans le film "Les Figures de l'ombre"

### TÂCHE 1

[Recherche à faire par les élèves]

### TÂCHE 2

$$f(x) = x^2$$

Donc, nous devons estimer  $f(x+\Delta x)$

Nous prenons  $f(x) = x^2$  et au lieu de  $x$ , nous utilisons  $(x+\Delta x)$

Donc, au lieu de  $x$ , nous avons  $x+\Delta x$ .

Donc pour  $f(x) = x^2$ , nous avons  $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$

Mais nous savons que  $(x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

Donc  $f(x+\Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

Le numérateur de la formule de la pente est :

$$f(x+\Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Donc, la formule devient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Puisque  $\Delta x$  tend vers zéro :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

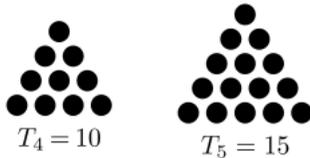
## TOOL 42: Les nombres triangulaires dans le livre "La Formule préférée du professeur"

$$(a) T_4 = \sum_{k=0}^4 k = 1+2+3+4 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$

$$T_5 = \sum_{k=0}^5 k = 1+2+3+4+5 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5(5+1)}{2} = 15$$

(b) Pour  $T_4$  le nombre de points est égal à 10, dans la mesure où  $T_4=10$ . La longueur du triangle  $T_4$  est égale à  $n=4$

(c) Pour  $T_5$  le nombre de points est égal à 15, dans la mesure où  $T_5=15$ . La longueur du triangle  $T_5$  est égale à  $n=5$



$$(d) T_4 + T_5 = 10 + 15 = 25$$

(e) Deux nombres triangulaires consécutifs peuvent être exprimés comme  $T_n$  et  $T_{n-1}$ .

Dès lors, les formules sont les suivantes :

$$T_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$T_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

$$T_n + T_{n-1} = \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2 \text{ qui est un nombre carré par définition}$$

- (f) Les résultats du point (d) se reflètent dans le point (e). 25 peut être exprimé sous la forme  $5 \times 5 = 5^2$  qui est un nombre carré (carré parfait).

## OUTIL 43 : La fonction quadratique à travers le film "Ciel d'octobre"

### TÂCHE 1

- 1.1. 401,5 m.
- 1.2. Hauteur maximale = 101,5 m; Distance = 200 m.

### TÂCHE 2

$$x \in ]-\infty; 1[ \cup ]3; +\infty[$$

### TÂCHE 3

- 3.1.  $h(0) = 1$ . La balle est lancée d'une hauteur de 1 mètre.
- 3.2. La hauteur maximale atteinte par la balle était de 73,2 m et a été atteinte 3,8 s après son lancement.
- 3.3. La balle a touché le sol environ 7,6 secondes après avoir été lancée.
- 3.4. La balle était à moins de 30 mètres du sol dans les 0,9 premières secondes et après 6,7 secondes.

## OUTIL 44 : Les nombres premiers - L'Homme qui défiait l'infini

[Explication donnée dans l'outil]

## OUTIL 45 : Probabilité dans le film suédois “Mirrored”

### TÂCHE

- 1) [tâche pratique]
- 2)  $1/6$
- 3) 21
- 4)  $1/6, 1/2, 1/36$

## OUTIL 46 : Les nombres premiers dans "Le Bizarre Incident du chien pendant la nuit" de Mark Haddon

### Nombres Premiers

55	composé
41	premier
37	premier
49	composé
17	premier

### TÂCHE

n	$2^n - 1$	$2^{n-1}(2^n - 1)$	n = premier ?	$2^n - 1$ premier?	Parfait ?
2	3	6	Yes	Yes	Yes
3	7	28	Yes	Yes	Yes
5	31	496	Yes	Yes	Yes
7	127	8128	Yes	Yes	Yes
11	2047	2096128	Yes	No	No
13	8191	33550336	Yes	Yes	Yes
17	131071	8589869056	Yes	Yes	Yes
19	524287	34359476224	Yes	Yes	Yes

## OUTIL 47 : Décryptage avec la Suite de Fibonacci dans "Da Vinci Code" de Dan Brown

### La Suite de Fibonacci – Quels sont les trois nombres suivants ?

$$8+13=21$$

$$13+21=34$$

$$21+34=55$$

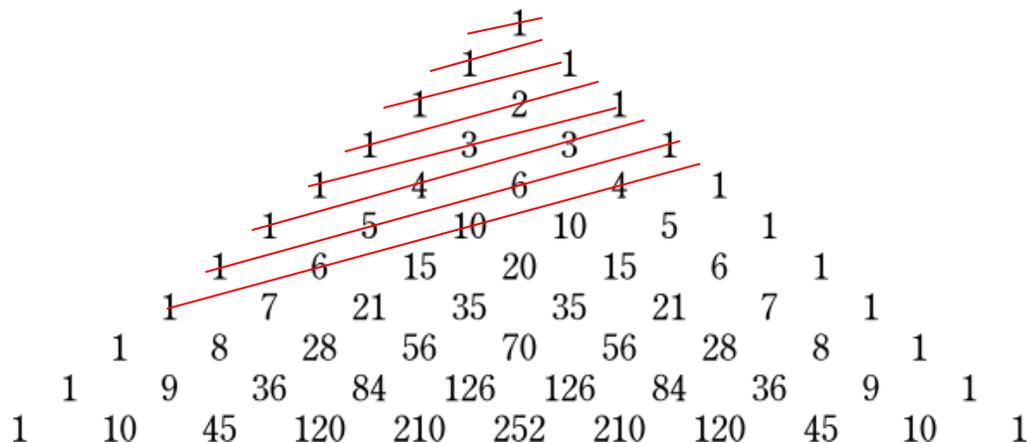
### TÂCHE

a) 1<sup>ère</sup> ligne : La Suite de Fibonacci est dans le désordre

2<sup>ème</sup> ligne : Leonardo da Vinci

3<sup>ème</sup> ligne : La Mona Lisa

b) Trouve la Suite de Fibonacci qui est cachée dans la figure ci-dessous, le Triangle de Pascal.



## OUTIL 48 : Écriture en Pi ( $\pi$ )

### TÂCHE 1

3,14159 26535 89793 23846

### TÂCHE 2

[Open answer question]

### TÂCHE 3

$P = 10\pi$  cm (valeur exacte)

$P \approx 31,4$  cm (valeur approximative).

### TÂCHE 4

$A = 100\pi$  cm<sup>2</sup> (valeur exacte)

$A \approx 314$  cm<sup>2</sup> (valeur approximative).

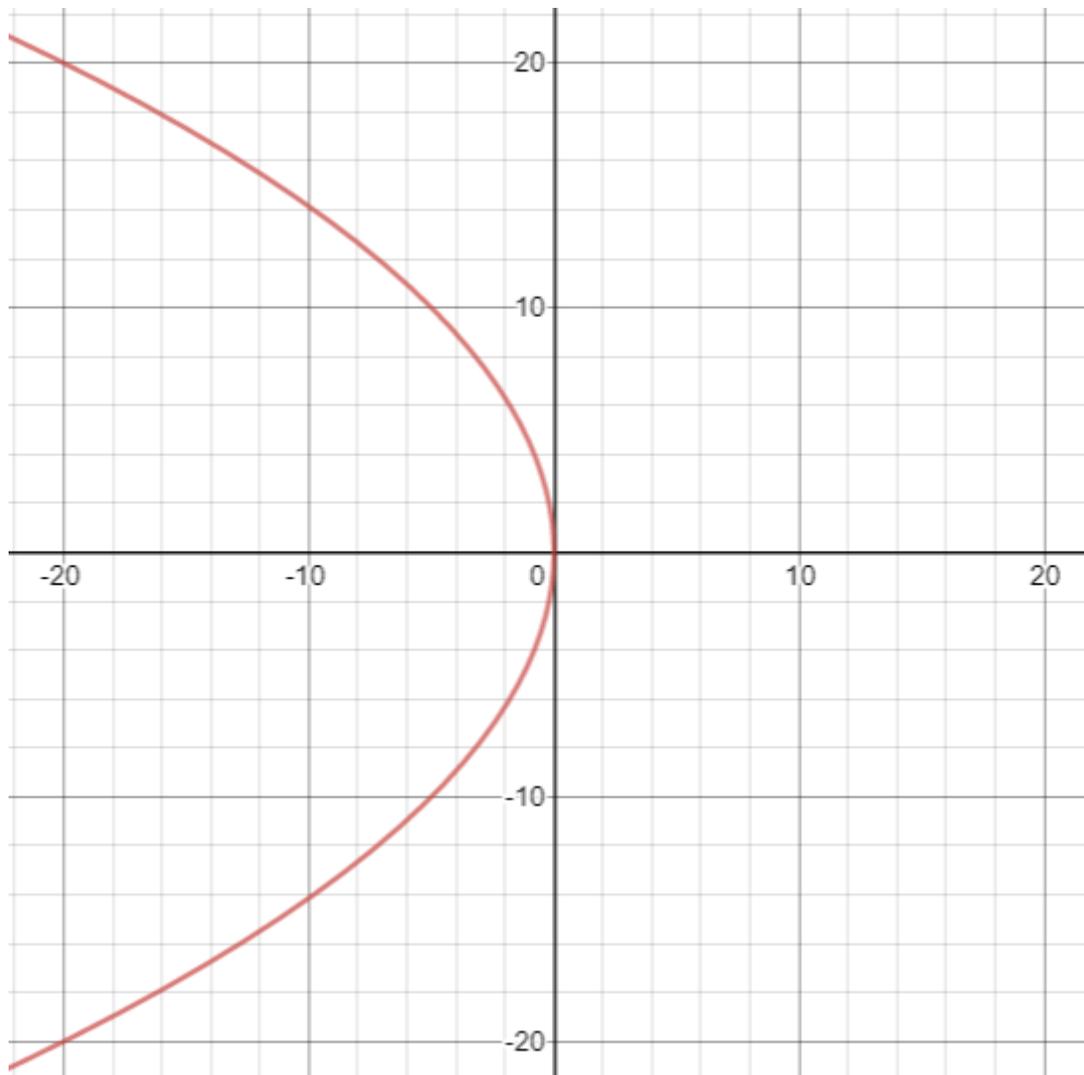
## OUTIL 49 : Les mathématiques dans "Les Aventures d'Alice au pays des merveilles" de Lewis Carroll

### Sections coniques

1. L'équation initiale est  $y^2 = 4ax$

Puisque le foyer se trouve à -5 sur l'axe des x, l'équation devient :  $y^2 = 4*(-5)x$

La réponse est  $y^2 = -20x$



3.  $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y = 6$$

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 8y) = 6$$

$$[x^2 - 2 \cdot (x) \cdot (2) + 2^2] + [y^2 + 2 \cdot (y) \cdot (4) + 4^2] - 4 - 16 = 6$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = \sqrt{26^2}$$

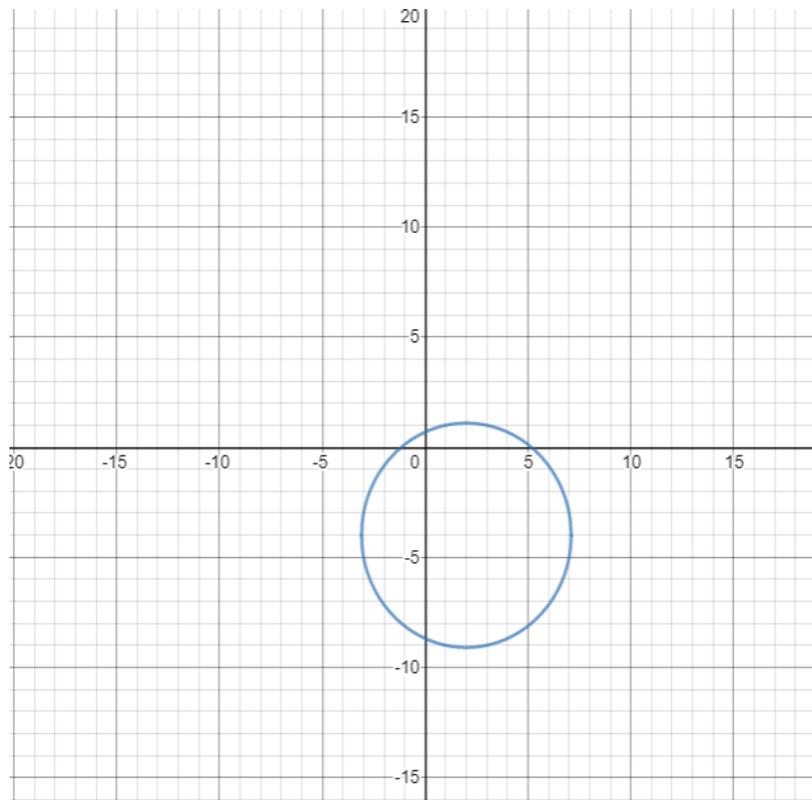
Puisque  $(y + 4)^2 = (y - (-4))^2$ ,

Nous pouvons trouver les coordonnées de l'équation initiale :  $x^2 + y^2 =$

$a^2$

Le centre est donc  $(2 ; -4)$ , et le rayon est égal à  $\sqrt{26^2}$

4.



## TÂCHE

1.



2.

a) Une hyperbole

b) Réponse possible : pour démontrer l'absurdité des mathématiques modernes selon son point de vue.

## OUTIL 50 : Graphiques dans le livre “an Abundance of Katherines”

### TÂCHE 1

[non applicable]

### TÂCHE 2

A)  $y = -x/2 + 2$

B)  $y = -x/4 + 4$

C)  $y = 3x + 1$  et  $y = -x/3 + 5$

## OUTIL 51 : Moominpappa en mer et mise à l'échelle

[Explication donnée dans l'outil]

## OUTIL 52 : La topologie dans le "Le Guide du voyageur galactique"

### TÂCHE

1. La réponse 2 est correcte (le nombre de boucles (dans le numéro huit))
3. Les réponses correctes sont 1, 2, 3, 5 et 7 puisqu'il n'y a pas de boucles dans ces numéros.

## OUTIL 53 : Poésie Mathématique

[non applicable]

## OUTIL 54 : Probabilité dans le livre “Le Bizarre Incident du chien pendant la nuit”

### TÂCHE 1

#### Les chèvres et la voiture

Lorsque l'on démarre, on a  $\frac{1}{3}$  chance d'obtenir une voiture. Il y a  $\frac{2}{3}$  chance d'obtenir une voiture si on change d'avis et  $\frac{1}{3}$  chance si on garde son choix initial. La façon la plus simple de montrer la bonne réponse est de faire un organigramme :

Je choisis une porte					
Je choisis une porte qui cache une chèvre		Je choisis une porte qui cache une chèvre		Je choisis une porte qui cache la voiture	
Je ne change pas	Je change	Je ne change pas	Je change	Je ne change pas	Je change
chèvre	voiture	chèvre	voiture	voiture	chèvre

### TÂCHE 2

#### La couleur des voitures

- a)  $\frac{1}{16}$
- b)  $\frac{1}{32}$
- c)  $\frac{1}{64}$

## OUTIL 55 : Oncle Petros et la Conjecture de Goldbach

Exercice :

a)  $46 = 23 + 23 = 29 + 17 = 41 + 5 = 43 + 3$

b)  $38 = 19 + 19 = 31 + 7$

c)  $14 = 7 + 7 = 11 + 3$

d)  $22 = 11 + 11 = 17 + 5 = 19 + 3$

e)  $40 = 23 + 17 = 29 + 11 = 37 + 3$

### TÂCHE 1 :

a)  $52 = 23 + 29$

OUI  NON

b)  $76 = 9 + 67$

OUI NON  Réponse Correcte :

$76 = 3 + 73 = 5 + 71 = 17 + 59 = 23 + 53 = 29 + 47$

c)  $80 = 59 + 21$

OUI NON  Réponse Correcte :

$80 = 7 + 73 = 13 + 67 = 19 + 61 = 37 + 43$

d)  $120 = 73 + 47$

OUI  NON

e)  $64 = 19 + 45$

OUI NON  Réponse Correcte :

$64 = 3 + 61 = 11 + 53 = 17 + 47 = 23 + 41$

f)  $92 = 89 + 3$

OUI  NON**TÂCHE 2 :**

a)  $90 = 31 + 59 = 7 + 83 = 11 + 79 = 17 + 73 = 19 + 71 = 23 + 67 = 29 + 61$   
 $= 37 + 53 = 43 + 47$

b)  $56 = 3 + 53 = 13 + 43 = 19 + 37$

c)  $88 = 71 + 17 = 29 + 59 = 41 + 47$

d)  $202 = 11 + 191 = 3 + 199 = 23 + 179 = 29 + 173 = 53 + 149 = 71 + 131 =$   
 $89 + 113 = 101 + 101$

e)  $62 = 3 + 59 = 19 + 43 = 31 + 31$

f)  $94 = 3 + 91 = 11 + 83 = 23 + 71 = 41 + 53$

g)  $110 = 3 + 107 = 7 + 103 = 13 + 97 = 31 + 79 = 37 + 73 = 43 + 67$