SOLUÇÕES

UNIDADE 1: Arte Gótica

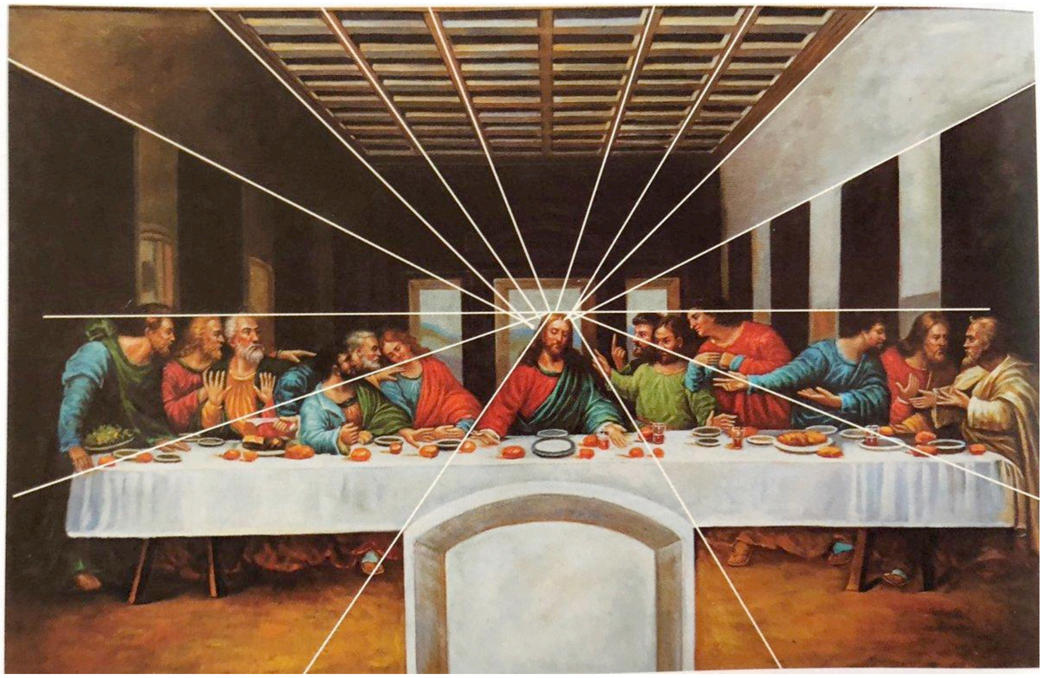
[explicação na unidade]

UNIDADE 2: Geometria na Arte Islâmica

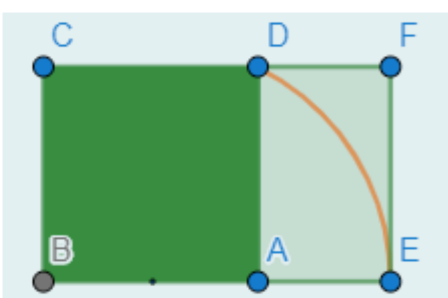
[explicação na unidade]

UNIDADE 3: Arte e Geometria no Renascimento

A)



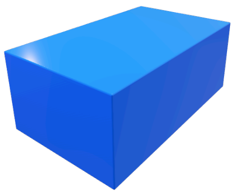
B)



- $\frac{2,7}{b} = 1,618$
- 2,7 = 1,618 * b
- b = $\frac{2,7}{1,618}$
- b = 1,669

C)

Um cone é curvo, por isso não é um poliedro.



Sim, este é um prisma retangular

F + V - A = 2 6 + 8 - 12 = 2

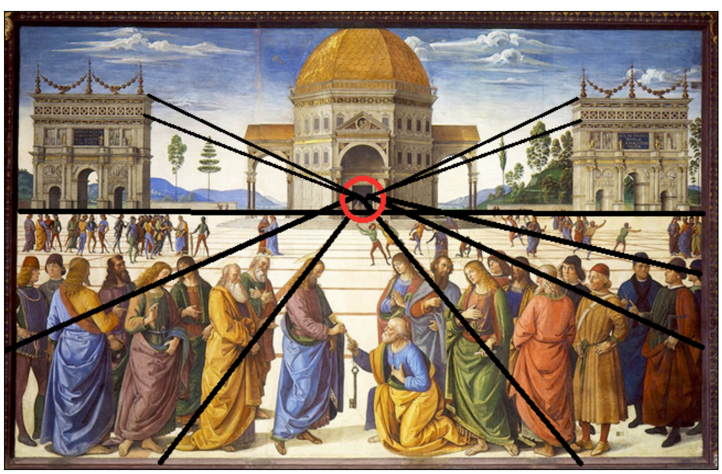
Sim, este é um prisma triangular

5 + 6 - 9 = 2

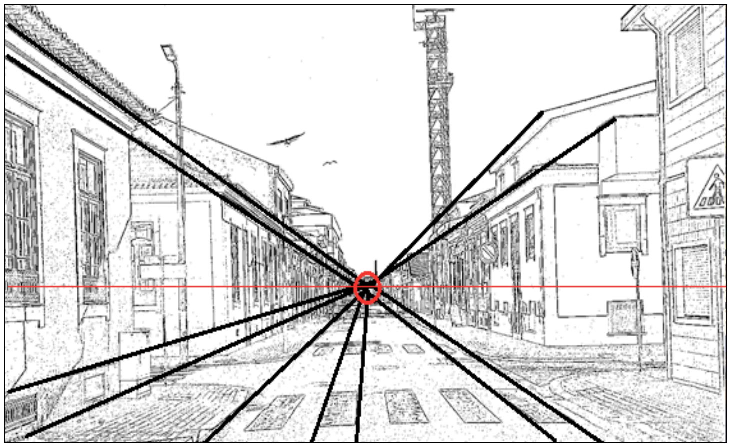
UNIDADE 4: Poliedros e Perspetiva

TAREFA 1

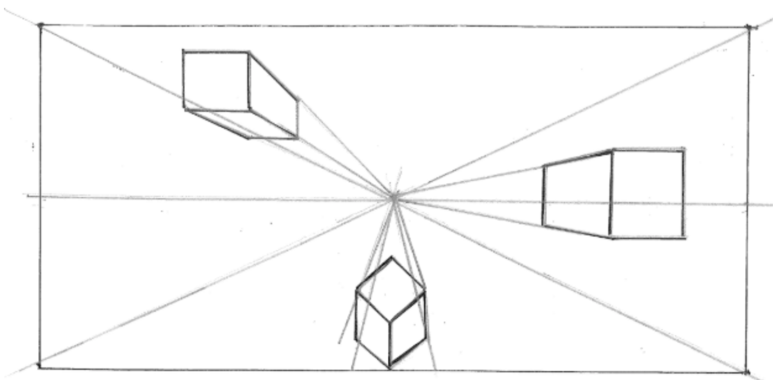
1.1 [Resposta possível]



1.2 [Resposta possível]

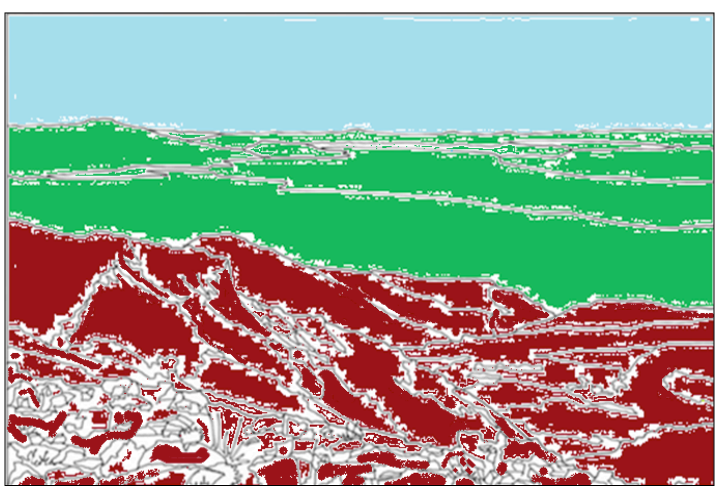


1.3 [Resposta possível]



TAREFA 2

[Resposta possível]



TAREFA 3

Fig. 20 – Sem perspetiva;

Fig. 21 – Perspetiva aérea;

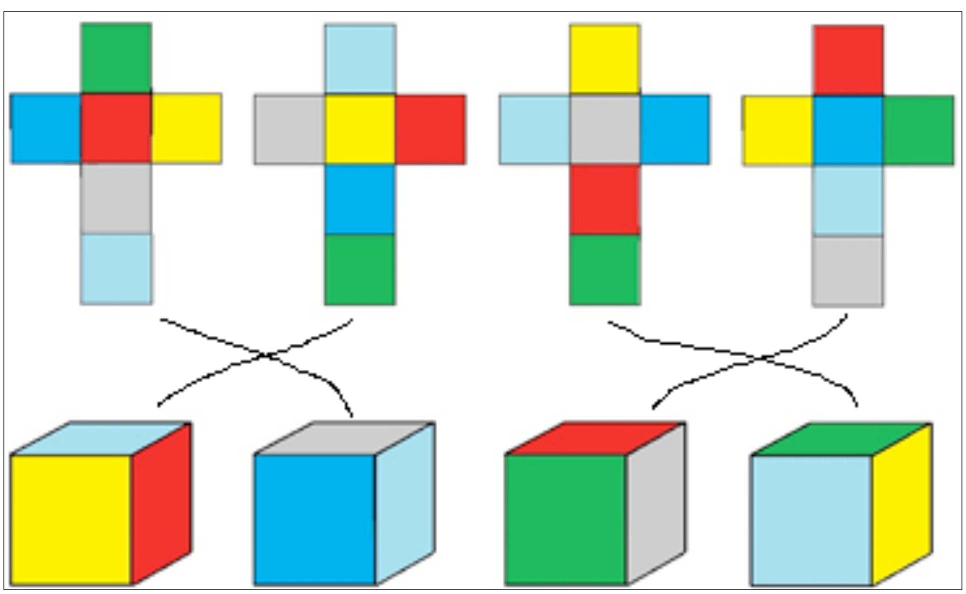
Fig. 22 – Perspetiva linear.

TAREFA 4

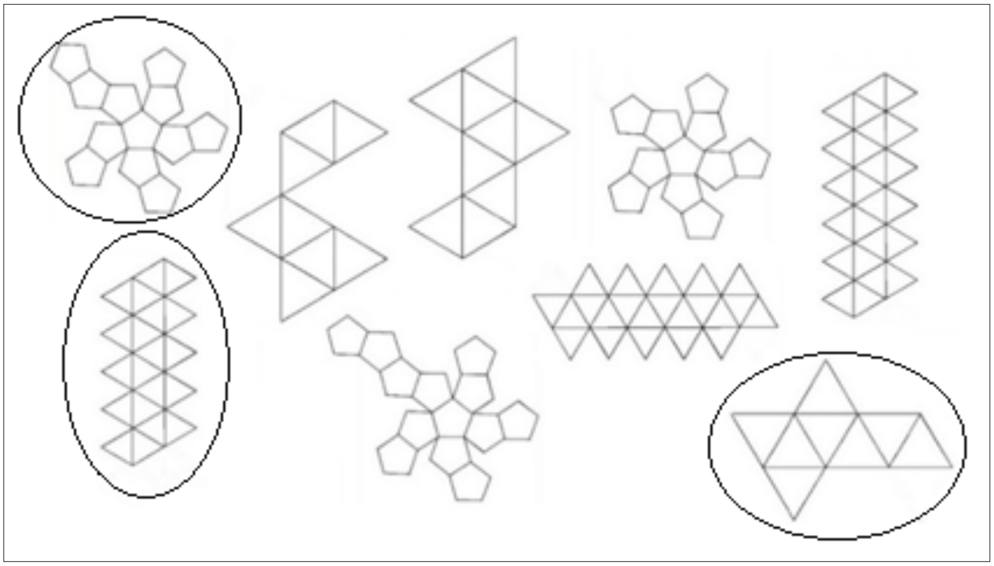
Sólido Platónico	Número de faces (F)	Número de vértices (V)	Número de arestas (A)	A + 2	F + V
Hexaedro	**6**	**8**	**12**	**14**	**14**
Tetraedro	4	4	6	8	8
Octaedro	8	6	12	14	14
Dodecaedro	12	20	30	32	32
Icosaedro	20	12	30	32	32

TAREFA 5

5.1



5.2



UNIDADE 5: Origami e Relações Espaciais

Teorema de Tales

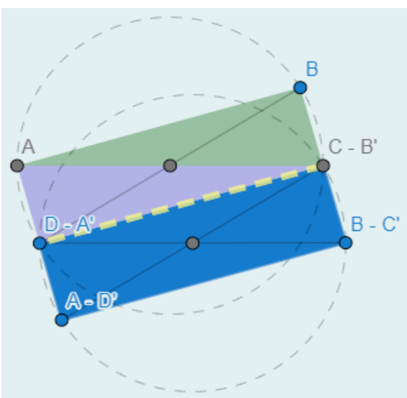
a) Sim

b) Sim

c) Que os ângulos ∠ABC e ∠ADC são retos!

d) [Resposta possível]

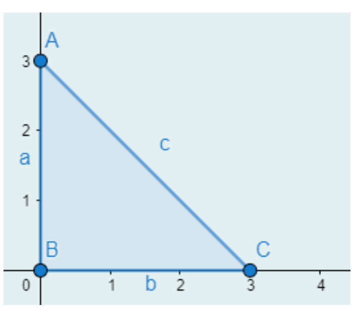
Se dobrarmos a folha no segmento DC:



É possível projetar o mesmo retângulo do lado esquerdo, que podemos dar o nome de A'B'C'D', em que:

- dobraremos o segmento AB para o segmento D'C'
- o segmento DC tornar-se-á o segment A'B'

Teorema de Pitágoras



$3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$

$c = \sqrt{18} = 4.2426$

$2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$

$c = \sqrt{29} = 5.3852$

$3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$

$c = \sqrt{58} = 7.6158$

TAREFA

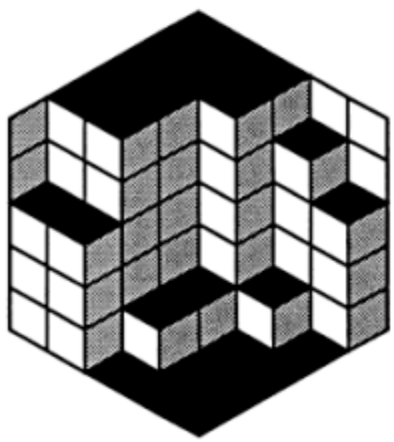
- **a)** Sim
- **b)** Sim
- **c)** Sim
- **d)** Sim

UNIDADE 6: A Arte Matemática de M. C. Escher

TAREFA

1) O número de doces é igual.

2)



3) O objeto ganha uma forma tridimensional – um cubo. Os Calissons costumam ter um formato de faces de um cubo.

UNIDADE 7: Uma exposição sincrónica de obra de arte-matemática

TAREFA

A → 6

B → 7

C → 3

D → 4

E → 1

F → 2

G → 5

UNIDADE 8: A Razão de Ouro nas Artes e Arquitetura

TAREFA 1

a) Começamos por **φ=** $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Esta equação pode ser escrita da seguinte forma: $\frac{a}{b} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a}$

Mas já sabemos que $\frac{a}{b} = \varphi$, ou seja, $\frac{b}{a} = \frac{1}{\varphi}$

Assim, obtemos $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

b) Começamos com: $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

- ⇨ $\varphi^2 = \varphi + 1$
- ⇨ $\varphi^2\text{-}\varphi\text{-}1 = 0$

Usamos a fórmula resolvente para identificar as duas raízes da equação (soluções)

$\varphi_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, em que a=1, b=-1, c=-1

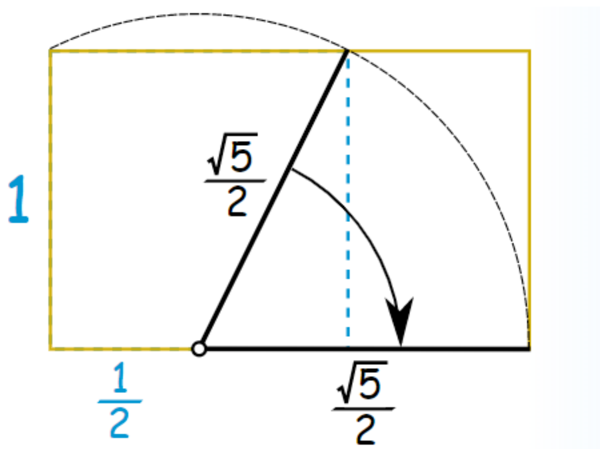
⇨ $\varphi_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1^2+4}}{2}$

Mantemos apenas a solução positiva (trata-se de uma medida de comprimento)

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$=1.618

TAREFA 2

De a) a g)



h) $\varphi = \frac{a+b}{a}$, ou seja: $a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ e a=1

⇨ $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ =1.618

UNIDADE 9: Arte Gráfica através do uso de funções

TAREFA 1

[Resposta possível]

C	$(x+4)^{2}+(y-1)^{2}=1^{2}\ \{x<-3.25\}$	
L	$x=-2.5\{0<y<2\}$	$y=0\ \{-2.5<x<-1.5\}$
A	$2x+2\backslash\ \{-1<x<0\}$	$-2x+2\backslash\ \{0<x<1\}$
	$y=1\ \{-0.5<x<0.5\}$	
S	$(x-2)^{2}+(y-1.5)^{2}=0.25\ \{y>1.5\}$	$(x-2)^{2}+(y-1.5)^{2}=.25\ \{1.5<x<2\}$
	$(x-2)^{2}+(y-0.5)^{2}=.25\ \{2<x<2.5\}$	$(x-2)^{2}+(y-0.5)^{2}=.25\ \{y<0.5\}$
S	$(x-3.5)^{2}+(y-1.5)^{2}=0.25\ \{y>1.5\}$	$(x-3.5)^{2}+(y-1.5)^{2}=.25\ \{3<x<3.5\}$
	$(x-3.5)^{2}+(y-0.5)^{2}=.25\ \{3.5<x<4\}$	$(x-3.5)^{2}+(y-.5)^{2}=.25\ \{y<0.5\}$

M	$x=-6\{0<y<2\}$	$-1x-4\{-6<x<-5\}$
	$x+6\{-5<x<-4\}$	$x=-4\{0<y<2\}$
A	$2x+6\{-3<x<-2\}$	$-2x+-2\{-2<x<-1\}$
	$y=1\{-2.5<x<-1.5\}$	
T	$y=2\{0<x<2\}$	$x=1\{0<y<2\}$
H	$x=3\{0<y<2\}$	$x=3\ \{0<y<2\}$
	$x=3\{0<y<2\}$	
S	$(x-6)^{2}+(y-1.5)^{2}=0.25\{y>1.5\}$	$(x-6)^{2}+(y-1.5)^{2}=.25\{5<x<6\}$
	$(x-6)^{2}+(y-0.5)^{2}=.25\{6<x<6.5$	$(x-6)^{2}+(y-0.5)^{2}=.25\{y<0.5$

TAREFA 2

[Pergunta de resposta aberta]

UNIDADE 10: Frisos na Calçada Portuguesa

TAREFA 1

1.1 Rotação de meia-volta, isto é, rotação de 180º de centro no ponto O.

1.2 Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{t}$

TAREFA 2

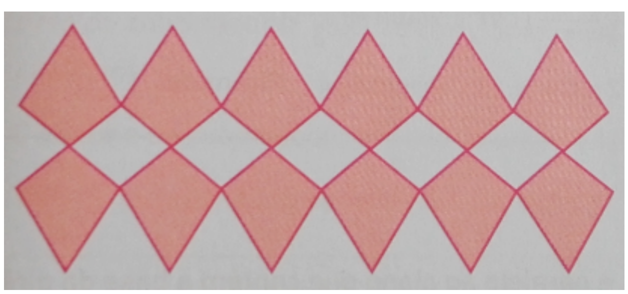
2.1 Reflexão deslizante e translação.

2.2 Reflexão de eixo vertical, reflexão de eixo horizontal, rotação de meia-volta e translação.

2.3 Reflexão de eixo vertical, reflexão deslizante, rotação de meia-volta e translação.

TAREFA 3

[Uma resposta possível]



TAREFA 4

I: Translação;

II: Reflexão de eixo vertical e translação;

III: Reflexão de eixo horizontal e translação;

IV: Rotação de meia-volta e translação.

UNIDADE 11: Fractais e Dimensões

Arquimedes serviu-se do facto de que o perímetro do círculo está enquadrado entre o perímetro de um polígono inscrito e o perímetro de um polígono circunscrito a esse círculo, obtendo assim uma aproximação de π.

Arquimedes utilizou um polígono de 96 lados para encontrar a seguinte aproximação:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

É fácil utilizar este método recorrendo trigonometria, no entanto Arquimedes recorreu apenas a geometria e a numeração grega.

UNIDADE 12: Espiral de Fibonacci nas Artes Visuais

TAREFA 1

M(7)= 13 pares de coelhos

M(12)=144 pares de coelhos

M(25)=75025 (uma vez que M(22)=17711 e M(24)=46368)

TAREFA 2

a) 2 maneiras (1-1-1, 1-1-2)

b) 3 maneiras (1-1-1-1, 1-2-1, 1-1-2)

c) 55 maneiras

UNIDADE 13: Geometria na Dobragem de Papel

Sólido platónico	**Número de arestas**	**Tipo de face**	**Medida de cada ângulo interno**	**Soma dos ângulos internos da face**
Tetraedro	4	Triângulo equilátero	60	3*60=180
Hexaedro	6	Quadrilátero	90	360
Octaedro	8	Triângulo equilátero	60	180
Dodecaedro	12	Pentágono	108	540
Icosaedro	20	Triângulo equilátero	60	180

UNIDADE 14: Razões de Frequências de Notas Musicais

Está provado que $r_3=r_2.r_1$

- ⇨ $3/2= 6/5 \, . \, r_1$
- ⇨ $r_1 = 5/4$

Mas sabemos que $r_1=f_1/f_0$ e que $f_1=5$ Hz

- ⇨ $f_0=4$ Hz

UNIDADE 15: Afinação Pitagórica e Proporções

TAREFA

1)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
8:	9										x2
	2:				3						x9
16:					27						

2)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
16:					27						x2
					2:				3		x27
32:									81		

3)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
32:									81		x2
		1:							2		x81
64:		81									

4)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
64:		81									x2
		2:				3					x81
128:						243					

5)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
128:						243					x2
						2:				3	x243
256:										729	

6)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
256:										729	x2
			1:							2	x729
512:			729								

Agora consegue obter o rácio de todas as notas.

C	D	E	F	G	A	B	C'
1/1	9/8	81/64	729/512	3/2	27/16	243/128	2/1

UNIDADE 16: Séries Numéricas na Série Harmónica

TAREFA 1:

Veja um exemplo no seguinte link:

https://www.youtube.com/watch?v=AQJw95-H9mM

TAREFA 2

2.1) $u_n = 5n\text{-}2$

2.2) $u_n = -3n + 1$

2.3) $u_n = \frac{1}{n}$

2.4) $u_n = \frac{1}{3n}$

2.5) $u_n = \frac{1}{n^3}$

TAREFA 3

3.1) $3, 6, 9, 12, 15, \ldots$

3.2) $4, 9, 14, 19, 24, \ldots$

3.3) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

3.4) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

UNIDADE 17: Música e a Razão de Ouro

TAREFA

1) $\varphi = \frac{(a+b)}{a}$

$a = \frac{(a+b)}{\varphi}$

$a = \frac{55}{\varphi} = 34$

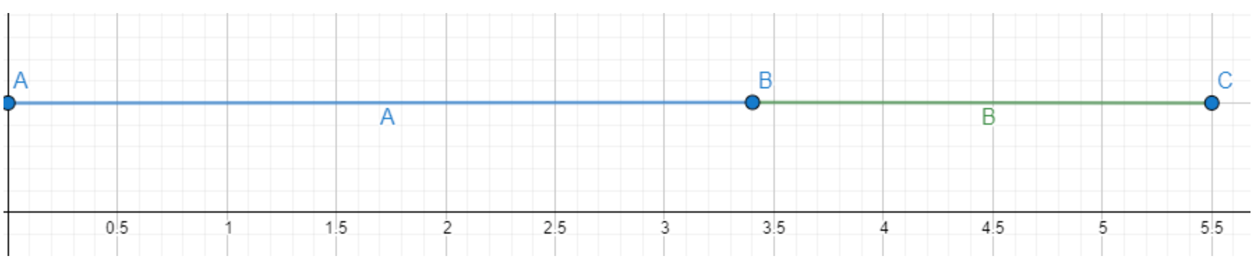
2) $\varphi = \frac{a}{b}$

$b = \frac{a}{\varphi}$

$b = \frac{34}{\varphi} = 21$

3) $\varphi = \frac{55}{34} = \frac{34}{21} \approx 1,618$

4)



UNIDADE 18: Potências na Escala Temperada

TAREFA 1

1.1. -8 **1.2.** 1 **1.3.** $\frac{4}{25}$ **1.4.** 0 **1.5.** $\frac{1}{16}$

TAREFA 2

2.11. $4^3 \times 4^5 = 4^8$;

2.12. $(-3)^3 \times (-3)^5 = (-3)^8$;

2.13. $5^7 : 5^5 = 5^2$;

2.14. $\left(-\frac{3}{2}\right)^8 : \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$;

2.15. $(3^5)^2 = 3^{10}$;

2.16. $(3^5)^3 = 3^{15}$;

2.17. $\left(\frac{27}{8}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^6$

TAREFA 3

3.1. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;

3.2. $\left(\frac{5}{3}\right)^{12}$;

3.3. $\left(\frac{1}{5}\right)^{11}$;

3.4. $\left(\frac{3}{5}\right)^{12}$.

TAREFA 4

4.1. 64;

4.2. 18;

4.3. $\frac{9}{25}$.

UNIDADE 19: Razões de Frequências de Notas Musicais

a) m.a+n.b+s.c = m log(2) + n log (3/2) + s log (5/4)

Devemos considerar as seguintes propriedades dos logaritmos:

$$x.\log(y) = \log(y^x)$$

e $\log(x) + \log(y) = \log(xy)$

Então,

$$m.a + n.b + s.c = \log\left(2^m\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right)^n + \log\left(\frac{5}{4}\right)^s = \log\left[\ 2^m \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{5}{4}\right)^s\right]$$

Consequentemente, o rácio do intervalo aleatório é $2^m \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{5}{4}\right)^s$

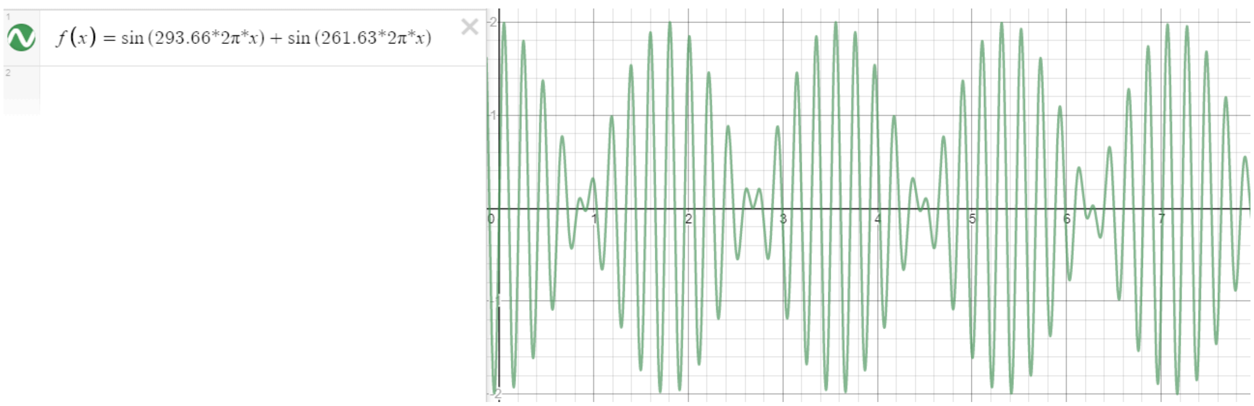
Desta forma, provamos que qualquer intervalo pode ser determinado em função de a, b e c.

b) O interval definido como b+c (definimos um intervalo aleatório para $m.a + n.b + s.c$ considerando que m=0, n=1 e s=1). Assim, o rácio é $\left(\frac{3}{2}\right)^1 \left(\frac{5}{4}\right)^1 = \frac{15}{8}$.

UNIDADE 20: A Equação da Batida

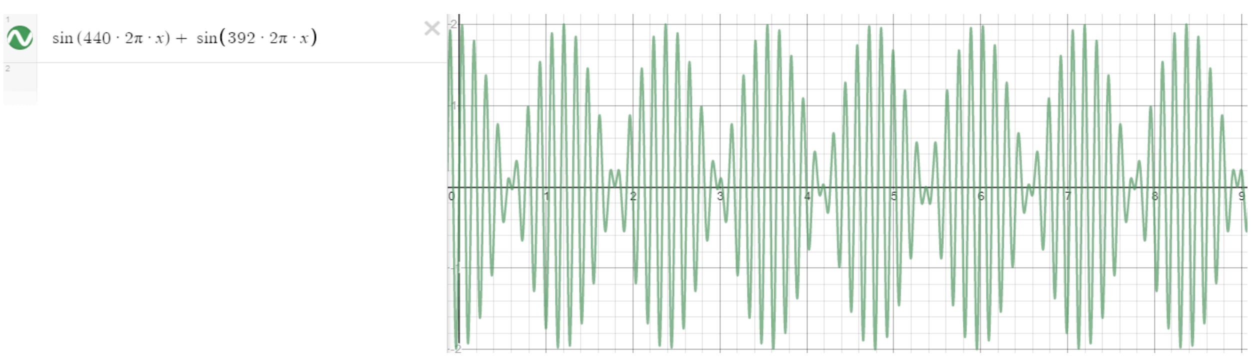
1) D e C

$$sin(293.66 * 2\pi * x) + sin(261.63 * 2\pi * x) = 2sin(277.64x * 2\pi) + cos(32x * 2\pi)$$



2) A e G

$$sin(440 * 2\pi * x) + sin(392 * 2\pi * x) = 2sin(416x * 2\pi) + cos(48x * 2\pi)$$



UNIDADE 21: As Funções Trigonométricas em Séries Harmónicas

TAREFA 1

1.1 $P = \pi$

1.2 $P = 6$

1.3 $P = \frac{2\pi}{5}$

1.4 $P = 2$

1.5 $P = \frac{\pi}{2}$

1.6 $P = 2$

TAREFA 2

2.1. $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \ V \ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z;$

2.2. $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \ V \ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z;$

2.3. Impossível porque $-1 \leq sin\ x \leq 1$ e $2 \notin [-1; 1]$;

2.4. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \ V \ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z.$

TAREFA 3

3.1. $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ V \ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z;$

3.2. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ V \ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z;$

3.3. $x = \pi \vee x = 3\pi$.

TAREFA 4

4.1. $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z;$

4.2. $x = \frac{\pi}{8} \ V \ x = \frac{5\pi}{8} \ V \ x = \frac{9\pi}{8} \ V \ x = \frac{13\pi}{8}.$

UNIDADE 22: Música e Fibonacci

$x_{16} = \frac{\varphi^{16}\text{-}(1-\varphi)^{16}}{\sqrt{5}} = 987$

$x_{17} = \frac{\varphi^{17}\text{-}(1-\varphi)^{17}}{\sqrt{5}} = 1597$

$x_{18} = \frac{\varphi^{18}\text{-}(1-\varphi)^{18}}{\sqrt{5}} = 2584$

$x_{19} = \frac{\varphi^{19}\text{-}(1-\varphi)^{19}}{\sqrt{5}} = 4181$

$x_{20} = \frac{\varphi^{20}\text{-}(1-\varphi)^{20}}{\sqrt{5}} = 6765$

UNIDADE 23: Pitágoras e a sua Música Matemática

TAREFA

6) O comprimento de onda da frequência é 4 vezes a distância da boca à superfície da água, formando-se assim uma onda de 1/4 na garrafa! Quanto mais alta a frequência, mais agudo é o som, e menor é o comprimento da onda.

$$\frac{340\ m/s}{frequência} = \text{comprimento da onda}$$

UNIDADE 24: Pitágoras e a sua Música Matemática

TAREFA 1

6) O comprimento de onda da frequência é 4 vezes a distância da boca à superfície da água, formando-se assim uma onda de 1/4 na garrafa! Quanto mais alta a frequência, mais agudo é o som, e menor é o comprimento da onda.

$$\frac{340\ m/s}{frequência} = \text{comprimento da onda}$$

TAREFA 2

Se soprar para dentro da garrafa, o som produzido resulta da vibração do ar. Se bater na garrafa, a garrafa vibrará. O som produzido quando sopra para a garrafa é mais agudo do que quando bate nela.

TAREFA 3

Aplica a fórmula obtida na TAREFA 1 e mede a frequência.

UNIDADE 25: Bach e a Fita Musical de Moebius

TAREFA

a) $4\frac{2}{3}\ au$

b) $2\frac{2}{3}\ au$

UNIDADE 26: Bach e a Fita Musical de Moebius

TAREFA

a) 3 voltas

b) 102 cm

UNIDADE 27: Logaritmos na Escala Temperada

TAREFA 1

1.1. 6 **1.2.** 1 **1.3.** -4 **1.4.** 0 **1.5.** $-\frac{1}{2}$

1.6. 6 **1.7.** 3 **1.8.** -2 **1.9.** $\frac{1}{2}$ **1.10.** $\frac{4}{3}$

1.11. $-\frac{1}{2}$ **1.12.** -2 **1.13.** -7

TAREFA 2

2.11. 4;

2.12. -2;

2.13. -7;

2.14. $-\frac{19}{5}$;

2.15. -1;

2.16. $-\frac{5}{6}$.

TAREFA 3

3.1. 10; **3.2.** 1; **3.3.** 40.

TAREFA 4

-2.

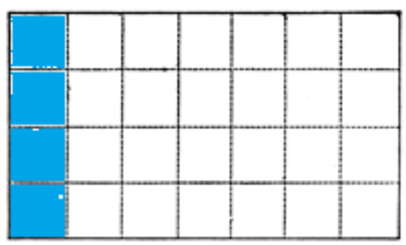
UNIDADE 28: Aritmética Básica: O Problema dos 35 Camelos ("O Homem que Sabia Contar", Cap. III)

TAREFA 1

1) b **2)** a **3)** b

4.1) [Uma resposta possível]

4.2) [Uma resposta possível]



5.1) b

5.2) c **5.3)** b **5.4)** b

5.5) c **5.6)** c **6.1)** b

6.2) c **6.3)** a **6.4)** a

7) a **8)** b **9)** b

10) c **11)** b

TAREFA 2

[Representação teatral]

UNIDADE 29: A Geometria nos Elementos de Euclides

TAREFA

[Representação teatral]

UNIDADE 30: Volumes: O Problema dos 21 Vasos ("O Homem que Sabia Contar", Cap. VIII)

TAREFA 1

[Representação teatral]

TAREFA 2

1.1. $216\ cm^3$.

1.2. $24\ cm^3$.

1.3. $192\ cm^3$.

TAREFA 3

$564\pi\ cm^3$.

UNIDADE 31: Abordando a Lógica Matemática através de “A Lição” de E. ionesco

TAREFA 1

(1)

(i) Não

(ii) Sim

(iii) Não

(2)

P	P’
A	A’ (Falsa-F)
Y	Y’ (Verdadeira- V)

(3)

P1	P2	P1 e P2
A	Y	Falsa (F)
Y	A	Falsa (F)
Y	Y	Falsa (F)
A	A	Verdadeira (V)

(4)

P1	P2	P1 or P2
A	Y	Verdadeira (V)
Y	A	Verdadeira (V)
Y	Y	Falsa (F)
A	A	Verdadeira (V)

TAREFA 2

SUGESTÕES

- Depois de discutidos alguns conceitos básicos de Lógica Matemática, tais como verdade matemática, implicação matemática, equivalência matemática, este guião pode ser lido ou dado como trabalho de casa para ser memorizado e interpretado pelos alunos.

- O professor pode dar informação aos alunos sobre quem foi Eugene Ionesco, através de folhetos impressos ou links de apoio, como por exemplo: https://en.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Ionesco
  O professor pode também pedir aos alunos que façam uma rápida pesquisa sobre quem Ionesco e que apresentem a informação em grupos pequenos.

- Música: é sempre bem-vinda como pano de fundo. O professor pode escolhê-la antes ou pedir aos alunos que escolham uma música apropriada.
  Acessórios: os alunos podem usar alguns instrumentos matemáticos da sala de aula.
  Adereços: podem ser simples e instruídos a priori para serem trazidas de casa.

UNIDADE 32: Números Primos em “A Teoria do Big Bang” de Chuck Lorre e Bill Prady

Números Primos e Números Compostos

55	composto
41	primo
37	primo
49	composto
17	primo

Factorização de Números Primos

a) 15 = 5 x 3

b) 36 = 3 x 2 x 3 x 2 = 3^2 x 2^2

c) 72 = 3 x 3 x 2 x 2 x 2 = 32 x 23

d) 118 = 2 x 59

e) 270 = 5 x 2 x 3 x 3 x 3 = 5 x 2 x 3^3

Experimente com os seguintes números:

a) $\sqrt{493}$ = 22.2036033112

Verifique se pode ser dividido por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

Só pode ser dividido por 17

493 = 17 x 29

b) $\sqrt{2486}$ = 49.8598034493

Verifique se pode ser dividido por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Pode ser dividido por 2, 11

2486 = 2 x 11 x 113

c) $\sqrt{11541}$ = 107.429046352

Verifique se pode ser dividido por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107

Só pode ser dividido por 3

11541 = 3 x 3847

d) $\sqrt{199}$ = 14.1067359797

Verifique se pode ser dividido por 2, 3, 5, 7, 11, 13

Não pode ser dividido por nenhum deles, por isso é um número primo.

TAREFA

1. $\sqrt{73}$ = 8.54400374532

Verifique se pode ser dividido por 2, 3, 5, 7

Não pode ser dividido por nenhum deles, por isso é um número primo.

2. $\sqrt{37}$ = 6.0827625303

Verifique se pode ser dividido por 2, 3, 5

Não pode ser dividido por nenhum deles, por isso é um número primo.

3. 73 é o 21° número primo

N = 21 e P_n = 73

21 = 7 x 3

4. 37 é o 12° número primo

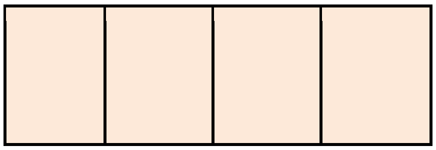
N = 21 e P_n = 73

rev(p_{21}) = rev(73) = 37

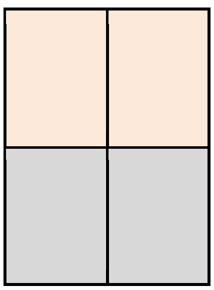
$p_{rev(21)} = p_{12} = 37$

UNIDADE 33: A Teoria dos Números Primos e Partições em "O Homem que Viu o Infinito" por Matthew Brown

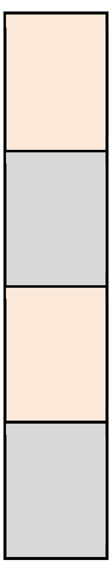
TAREFA



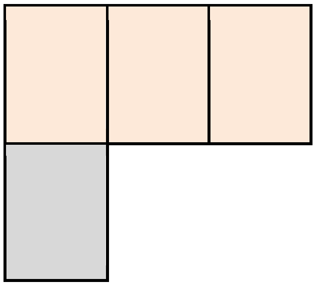
- 4



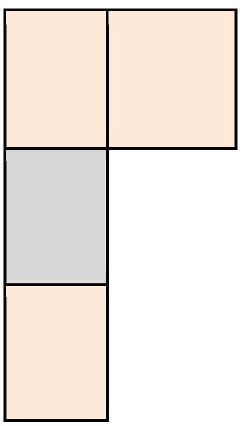
- 2+2;



- 1+3;



- 1+1+2;



- 1+1+1+1;

UNIDADE 34: Abordado a Matemática Não-formal através do filme "X+Y"

A solução das questões abordadas no âmbito da tarefa está a ser descrita aqui:

Atribua o valor 0 às cartas viradas para cima e o valor 1 às cartas viradas para baixo.

Inicialmente todas as cartas estão viradas para baixo, pelo que a linha inicial é 1111...

Uma jogada pode mudar 10 para 01 ou 11 para 00 e assim o número resultante em binário é estritamente menor do que o anterior.

Assim, a partir de 1111... o número diminui a cada movimento, pelo que os movimentos devem eventualmente terminar em 000...

Agora, independentemente da carta virada para baixo que escolher, eventualmente acabará por ficar com todas as cartas viradas para cima.

A solução do filme pelo protagonista:

https://www.youtube.com/watch?time_continue=14&v=mYAahN1G8Y8

UNIDADE 35: Teorema de Bayes no filme “Regresso ao Futuro” de Robert Zemeckis

TAREFA

- P(1955 | F328) e P(1871 | F328) é igual a 0,0.
- Temos, agora, duas diferentes opções: 1985 e 2019

P(1985 | F328) = $\frac{P(1985)*P(F328|1985)}{P(F328)}$

P(2019 | F328) = $\frac{P(2019)*P(F328|2019)}{P(F328)}$

Precisamos de saber o que representa P(F328) antes de prosseguir:

P(F328) = (0,12 * 0,032) + (0,03 * 0,0064) = 0.004

P(1985 | F328) = $\frac{0{,}032*0{,}12}{0{,}004}$ = 0,96

P(2019 | F328) = $\frac{0{,}0064*0{,}03}{0{,}004}$ = 0,04

Existe uma probabilidade de 96% de ser o ano 1985 vs 4% de ser o ano 2019.

UNIDADE 36: Probabilidades no filme "21" de Robert Luketic

TAREFA

Em primeiro lugar, verifiquemos qual a probabilidade de obter cada uma das possíveis opções:

P(Ás) = $\frac{4}{10}$	P(10) = $\frac{2}{10}$	P(Valete) = $\frac{1}{10}$	P(4) = $\frac{1}{10}$	P(5) = $\frac{2}{10}$

- Observamos que as duas cartas não podem incluir um 4 e um 5, uma vez que a soma de uma com a outra não chegará aos 21 pontos.
- Também observamos que precisamos que inclua um Ás e uma carta de 10 pontos.
- Para o efeito, temos de calcular a probabilidade de ter um Ás e um 10 ou um Ás e um Valete.

O cálculo que devemos realizar será: P(A∩J∪A∩10)

Será necessário usar a seguinte fórmula para cada caso:

P(A∩B) = P(A) x P(B)

1) P(A∩10) = $\frac{4}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{8}{100} = \frac{4}{50}$

2) P(A∩J) = $\frac{4}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{4}{100} = \frac{2}{50}$

- Agora, calculemos P(1∩2) = $\frac{4}{50}\ x\ \frac{2}{50} = \frac{8}{250}$
- Finalmente, utilizamos a formula P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

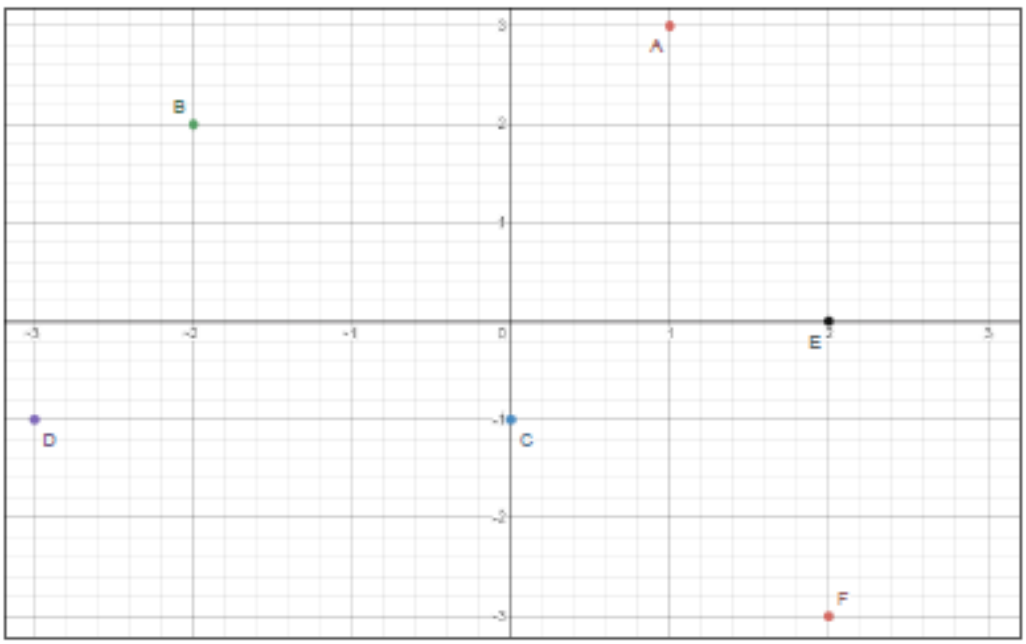
P(1∪2) = $\frac{4+2}{50} - \frac{8}{250} = \frac{30}{250} - \frac{8}{250} = \frac{22}{250} = \frac{11}{125} = 0{,}088$

UNIDADE 37: Sistema de Coordenadas através do filme “Reino dos Céus”

TAREFA 1

A(2, 0), B(2, 3), C(-3, 4), D(-2, -1) e E(0, -2)

TAREFA 2



TAREFA 3

Não aplicável.

UNIDADE 38: Probabilidade e Estatística no filme “ “Moneyball – Jogada de Risco”

TAREFA 1

1.1 $RC = \frac{TB*(H+BB)}{PA}$

RC (HOU) = ~738 | RC(LAA) = ~680 | RC(OAK) = ~767

RC(SEA) = ~677 | RC(TEX) = ~666

1.2

HOU = 7,4% | LAA = 5,6% | OAK = 5,6%

SEA = 0% | TEX = 9,6%

TAREFA 2

2.1

$$SecA = \frac{BB + (TB\text{-}H) + (SB + CS)}{AB}$$

SecA(PG) = 0,41 | SecA(CD) = 0,21 | SecA(JV) = 0,35

SecA(YG) = 0,19 | SecA(JM) = 0,2

De acordo com as estatísticas da Média Secundária, é mais provável que o Paul Goldschmidt seja mais eficaz globalmente.

2.2

$$\mathbf{RF} = \frac{\mathbf{A + PO}}{\mathbf{G}}$$

RF(PG) = 9,06

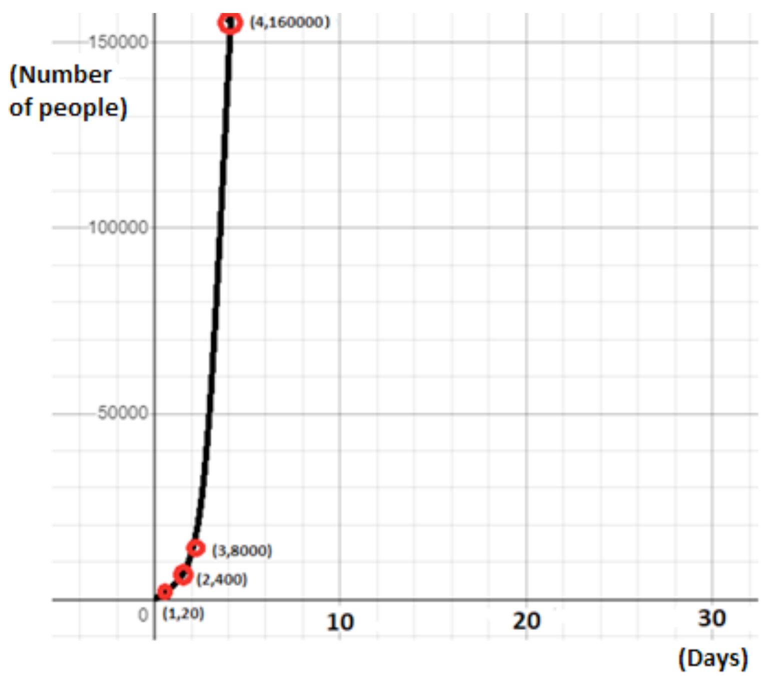
UNIDADE 39: Crescimento Exponencial no filme "Favores em Cadeia"

TAREFA 1

1.1

Horas	Número de células	Padrão
1	20 = 20	$y = 20^1$
2	400 = 20(20)	$y = 20^2$
3	8000 = 20(20x20)	$y = 20^3$
4	160000 = 20(20x20x20)	$y = 20^4$

1.2



TAREFA 2

$$2000(1+0{,}15)^6 \;=\; \sim 4626$$

TAREFA 3

$$81\,(1\;-\;0{,}1)^5\;=\sim 48$$

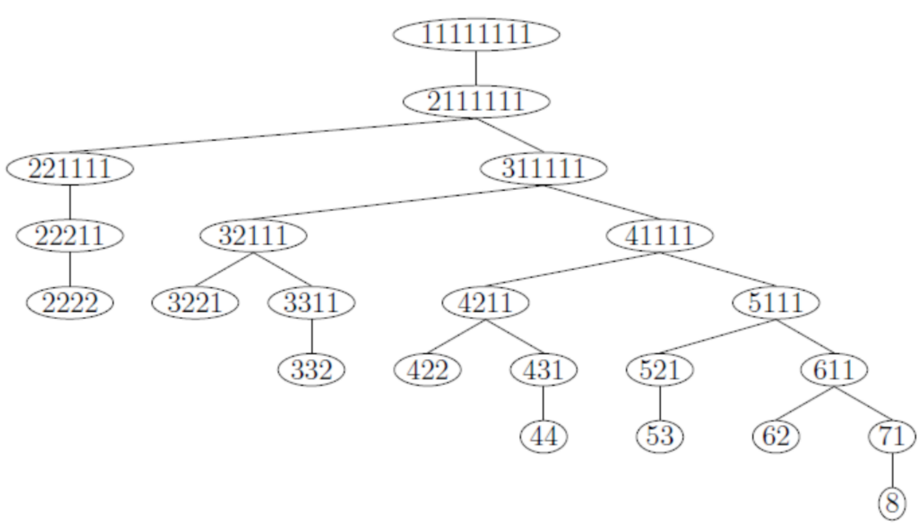
UNIDADE 40: Abordando a Teoria dos Números Primos através do filme "O Homem que Viu o Infinito"

S= p(4) + p(6) + p(8) = 5+11+22= 38

p(6)= 11

- 1+1+1+1+1+1
- 2+1+1+1+1
- 2+2+2
- 2+2+1+1
- 3+1+1+1
- 3+2+1
- 3+3
- 4+1+1
- 4+2
- 5+1
- 6

De igual forma, p(8)=22



UNIDADE 41: Abordagem da Derivada de uma Função através do filme "Elementos Secretos"

TAREFA 1

[Não aplicável]

TAREFA 2

$f(x)=x^2$

então, temos de estimar $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}+\triangle\,\mathbf{x})$.

Na verdade, consideramos $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ e em vez de $\boldsymbol{x}$, usamos $\boldsymbol{x +\triangle\, x}$.

Assim, no lugar de x, usamos $x +\triangle\, x$.

Então, a partir de $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, agora obtemos $\boldsymbol{f(x +\triangle\, x) = (x +\triangle\, x)^2}$.

Mas sabemos que se desenvolvermos

$$\boldsymbol{(x +\triangle\, x)^2 = x^2 + 2x.(\triangle\, x) + (\triangle\, x)^2}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow f(x +\triangle\, x) = x^2 + 2x.(\triangle\, x) + (\triangle\, x)^2}$$

O numerador da fórmula do declive é:

$$\boldsymbol{f(x +\triangle\, x)\text{-}f(x) = x^2 + 2x.(\triangle\, x) + (\triangle\, x)^2\text{-}x^2 = 2x.(\triangle\, x) + (\triangle\, x)^2}$$

Por isso, a fórmula escreve-se usando a seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\frac{\triangle\, y}{\triangle\, x} = \frac{2x.(\triangle\, x) + (\triangle\, x)(\triangle\, x)}{\triangle\, x} = \frac{\triangle\, x(2x +\triangle\, x)}{\triangle\, x} = 2x +\triangle\, x}$$

Que, tendo em atenção que $\boldsymbol{\triangle\, x}$ tende para 0:

$$\boldsymbol{\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle\, y}{\triangle\, x} = 2x}$$

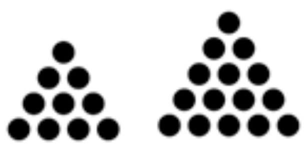
UNIDADE 42: Abordando os números triangulares através do livro 'A fórmula preferida do professor' de Yoko Ogawa

(a) $T_4 = \sum_{n=0}^{4} k = 1+2+3+4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$

$$T_5 = \sum_{n=0}^{5} k = 1+2+3+4+5 = \frac{5(5+1)}{2} = 15$$

(b) Para T_4 o número de pontos iguala 10, na medida em que $T_4 = 10$. O comprimento do triângulo T_4 será de $n = 4$.

Para T_5 o número de pontos iguala 15, na medida em que $T_5 = 15$. O comprimento do triângulo T_5 será de $n = 5$.

(c) 

$T_4 = 10$ $T_5 = 15$

(d) $T_4 + T_5 = 10 + 15 = 25$

(e) Dois números triangulares consecutivos podem ser expressos com T_n e $T_{n\text{-}1}$.

Desse modo, as fórmulas seguem:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$T_{n\text{-}1} = \frac{(n\text{-}1)(n\text{-}1+1)}{2} = \frac{n^2\text{-}n}{2}$$

$T_n + T_{n\text{-}1} = \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2\text{-}n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$ que é um número quadrado por definição.

(f) os resultados de (d) refletem-se até (e). 25 pode ser expresso como $5 \times 5 = 5^2$ que é um número quadrado (quadrado perfeito).

UNIDADE 43: Função Quadrática no filme "O Céu de Outubro"

TAREFA 1

1.1. 401,5 m.

1.2. Altura máxima = 101,5 m; Distância = 200 m.

TAREFA 2

$$x \in]-\infty;\ 1[\cup]3;\ +\infty[$$

TAREFA 3

3.1. $h(0) = 1$. A bola é lançada a partir de um ponto situado a 1 m de altura.

3.2. A altura máxima atingida pela bola foi de 73,2 m e ocorreu 3,8 s após o lançamento.

3.3. A bola atingiu o solo cerca de 7,6 s após o lançamento.

3.4. A bola esteve a menos de 30 m do solo nos primeiros 0,9 s e após os 6,7 s.

UNIDADE 44: Números primos em “O homem que viu o infinito”

[explicação na unidade]

UNIDADE 45: Probabilidade em Mirrored

TAREFA

1) [atividade prática]
2) 1/6
3) 21
4) 1/6, ½, 1/36

UNIDADE 46: Números Primos em "O estranho caso do cão morto" de Mark Haddon

Números primos

55	composto
41	primo
37	primo
49	composto
17	primo

TAREFA

n	$2^n - 1$	$2^{n-1}(2^n - 1)$	n = primo?	$2^n - 1$ primo?	Perfeito?
2	3	6	Sim	Sim	Sim
3	7	28	Sim	Sim	Sim
5	31	496	Sim	Sim	Sim
7	127	8128	Sim	Sim	Sim
11	2047	2096128	Sim	Não	Não
13	8191	33550336	Sim	Sim	Sim
17	131071	8589869056	Sim	Sim	Sim
19	524287	34359476224	Sim	Sim	Sim

UNIDADE 47: Decifrar com a sequência de Fibonacci no “O Código Da Vinci” de Dan Brown

A Sequência de Fibonacci – Quais são os três números seguintes?

8+13=21

13+21=34

21+34=55

TAREFA

a) 1st linha: A Sequência de Fibonacci está misturada

2nd linha: Leonardo da Vinci

3rd linha: The Mona Lisa

b)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

UNIDADE 48: Escrita em “Piês” (π-ês)

TAREFA 1

3,14159 26535 89793 23846

TAREFA 2

[Pergunta de resposta aberta]

TASK 3

$P = 10\pi \text{ cm}$ (valor exato)

$P \approx 31{,}4 \text{ cm}$ (valor aproximado).

TASK 4

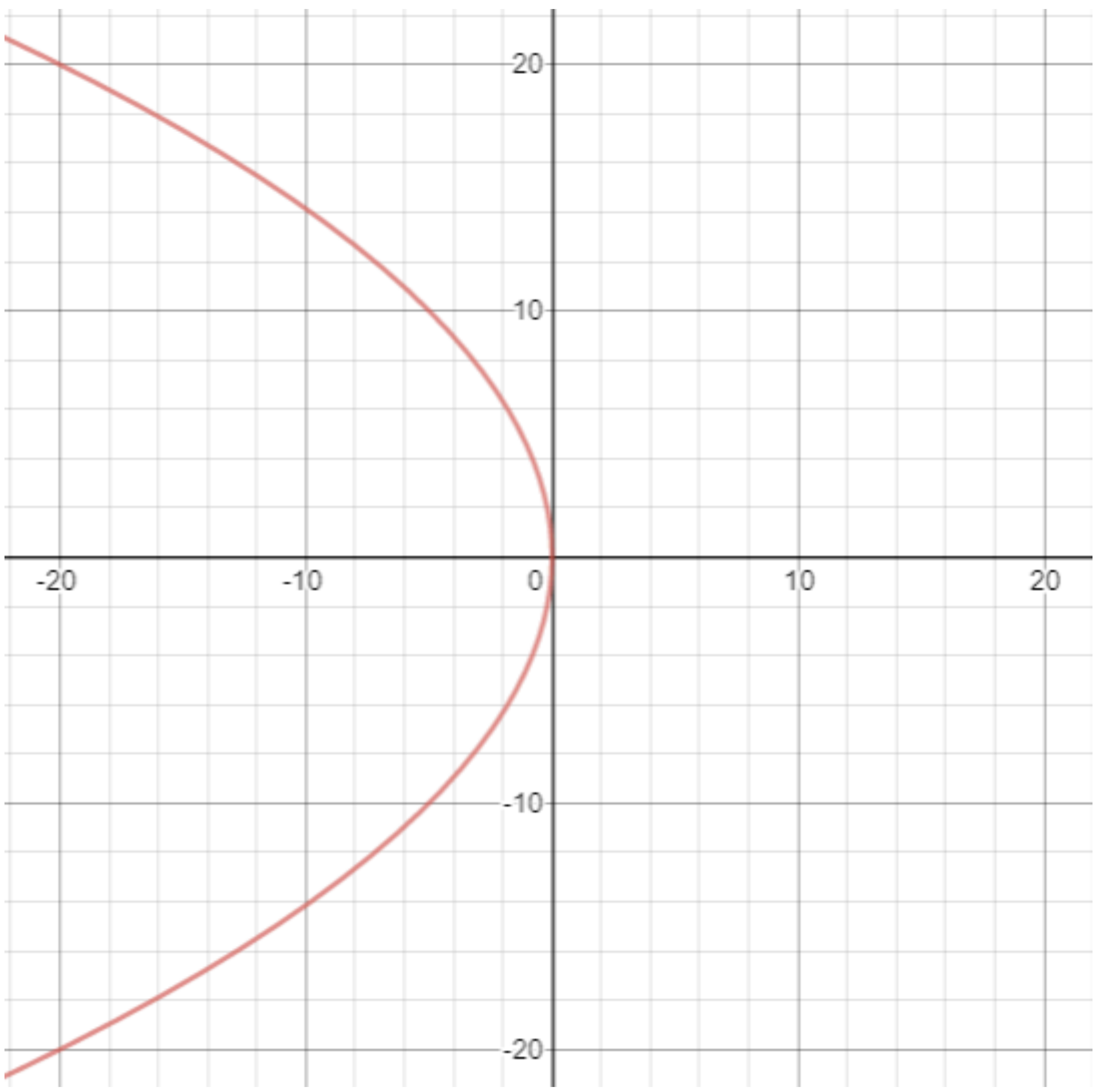
$A = 100\pi \text{ cm}^2$ (valor exato)

$A \approx 314 \text{ cm}^2$ (valor aproximado).

UNIDADE 49: Secções Cónicas em "Alice no País das Maravilhas" de Lewis Carrol (1865)

Secções cónicas

1. A equação inicial é y2= 4ax
   Uma vez que o valor do ponto de intersecção no eixo do x é -5 a equação fica: y2= 4*(-5)x
   A resposta é y2= -20x



2.

3. x2 + y2 – 4x + 8y - 6 = 0

x2 + y2 – 4x + 8y = 6

(x2 – 4x) + (y2 + 8y) = 6

[x2 – 2 *(x) * (2) + 22] + [y2 + 2 * (y) * (4) + 42] -4 - 16 = 6

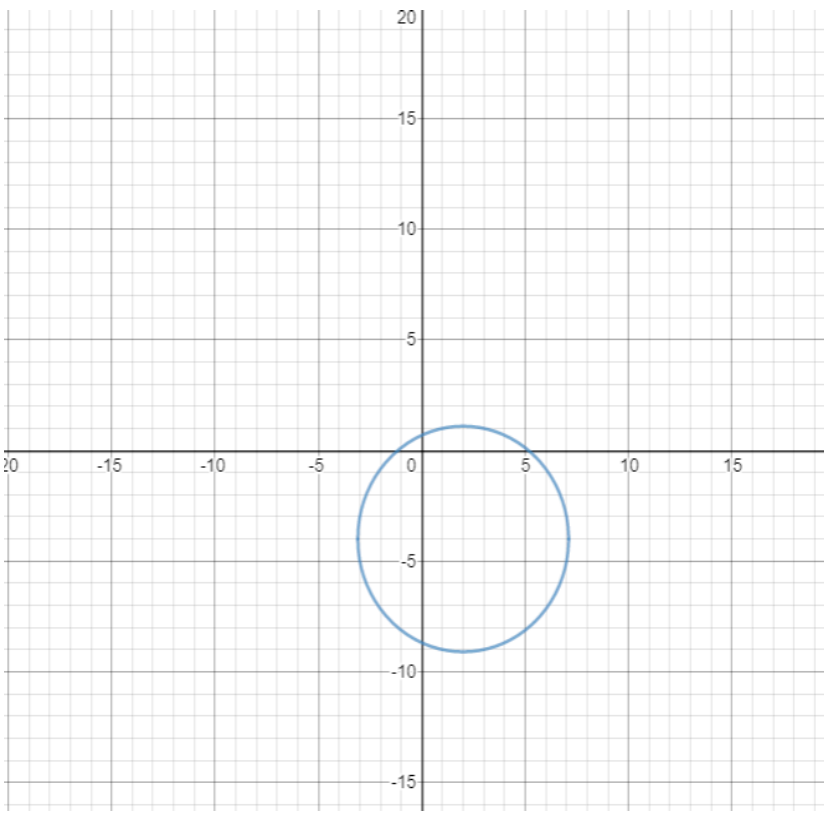
(x - 2)2 + (y + 4)2 = √26^2

Uma vez que (y + 4)2 = (y – (-4))2,

É possível encontrar as coordenadas da equação inicial x^2+ y^2= a^2

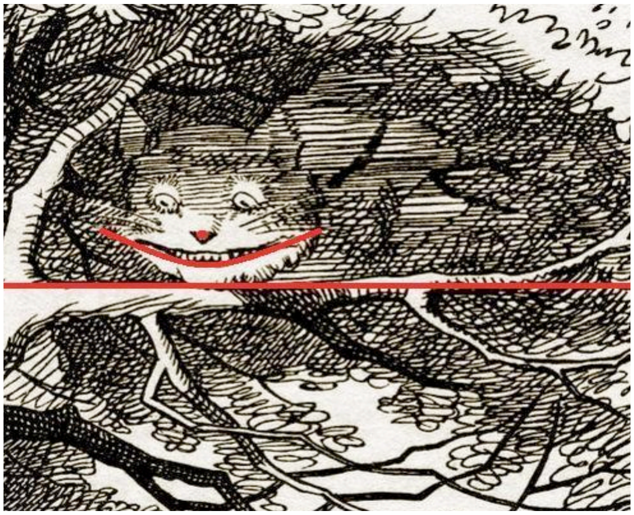
Assim, os valores do centro do círculo são (2 ; -4), e o raio é √26^2

4.



TAREFA

1.



2.

a) Uma hipérbole

b) Resposta possível: para mostrar o quão absurdo a nova matemática era para ele.

UNIDADE 50: Gráficos e funções em "O teorema de Katherine"

TAREFA 1

[não aplicável]

TAREFA 2

A) y=- x/2+2

B) y=-x/4+4

C) y=3x+1 e y=-x/3+5

UNIDADE 51: O papá Moomin no mar e nas escalas

[explicação na unidade]

UNIDADE 52: Topologia em "Guia para quem anda à boleia pela galáxia"

TAREFA

1. O algarismo que iguala a cada um dos números corresponde ao número de furos dos números. Assim, a resposta correta é 2.
2. A resposta correta é 1, 2, 3, 5 e 7 uma vez que não existem furos nestes números.

UNIDADE 53: Poesia Matemática

[Não aplicável]

UNIDADE 54: Probabilidade em “O estranho caso do cão morto””

TAREFA 1

Os bodes e o carro

Quando começamos, temos uma probabilidade de ⅓ de conseguir um carro. Existe uma probabilidade de ⅔ se mudarmos de ideias e escolhermos outra porta e de ⅓ se mantivermos a escolha inicial. Atente à seguinte tabela que demonstra o raciocínio por trás destas probabilidades:

Uma porta é escolhida					
A porta escolhida tem um bode por trás		A porta escolhida tem um bode por trás		A porta escolhida tem um carro por trás	
Mantendo a escolha inicial	Mudando de porta	Mantendo a escolha inicial	Mudando de porta	Mantendo a escolha inicial	Mudando de porta
bode	carro	bode	carro	carro	bode

TAREFA 2

A cor dos carros

- **a)** 1/16
- **b)** 1/32
- **c)** 1/64

UNIDADE 55