PARTIE I : Arts Visuels & Mathématiques

ÂGE : 13-15 ans

OUTIL 6 : L'ART MATHÉMATIQUE DE M.C. ESCHER

C.I.P. Citizens In Power

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : L'art mathématique de M.C. Escher

Âge : 13-15 ans

Durée : 3 heures (Note : il s'agit d'une double leçon)

Concepts mathématiques : division régulière d'un plan ; symétrie ; translation, réflexion et rotation ; solides de Platon

Concepts artistiques : gravure sur bois ; linogravure ; carreaux de majolique ; mosaïques ; carreaux/pavage du plan mauresques ; motif ; lithographie

Objectifs généraux : Faire découvrir aux élèves la façon dont M.C. Escher a puisé dans les théories et les concepts mathématiques pour être capable de représenter les illustrations géométriques qui ont caractérisé son œuvre. Les étudiants comprendront la transition entre la géométrie plane et la géométrie des solides, ce qui résoudra les problèmes liés au dessin de solides dans le plan, tels que le cube, le parallélépipède, les prismes, les solides platoniques.

Instructions et Méthodologies : En abordant la vie d'Escher principalement à travers ses œuvres d'art, cet outil permet d'améliorer la mise en place de la conception et de l'illustration du plan, grâce à la réalisation de deux tâches suggérées.

Conseils pour l'éducateur : Introduisez progressivement et de manière intuitive les concepts mathématiques de base tout en présentant les œuvres d'Escher. Ensuite, expliquez aux élèves les théories et concepts mathématiques analysés dans la section mathématique de l'outil.

Ressources : Cet outil fournit des photos et des vidéos sur les œuvres d'Escher. Il comprend également des exemples concrets de terminologies, des références et des informations supplémentaires.

Résultats et Compétences ciblés :

(i) Les élèves comprendront la façon dont Escher se sert de la théorie mathématique pour créer ses œuvres d'art, ce qui lui permettra d'explorer les frontières communes entre l'art et la science.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

(ii) Les élèves comprendront comment les solides tridimensionnels sont représentés dans un plan, ce qui leur permettra de percevoir et de représenter clairement le concept d'espace tridimensionnel.

Compte-rendu et évaluation :

Dans le cadre de la réflexion et/ou de l'évaluation formative (= afin d'améliorer l'outil pour la prochaine fois en fonction des antécédents des élèves, de leurs intérêts, de leur âge exact, de la culture du pays, des connaissances préalables des élèves, etc.), l'éducateur peut utiliser ces cartes, soit en faisant une copie papier, soit en inscrivant ces déclarations au tableau pour que les élèves répondent anonymement sur un papier qu'ils remettront en sortant de la salle. La stratégie formative spécifique est appelée 3,2,1. Pour plus de stratégies, vous pouvez consulter le site : https://www.bhamcityschools.org/cms/lib/AL01001646/Centricity/Domain/131/70%20Formative%20Assessments.pdf

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 aspects que vous avez appris :	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Introduction

Bien que la perspective mathématique de l'artiste néerlandais M.C. Escher soit largement connue, seule une petite minorité de ceux qui l'ont admiré ont su apprécier le côté mathématique de ses créations. Escher a inévitablement interagi avec les mathématiciens en comprenant d'abord et en empruntant ensuite des formes mathématiques, dans le but de les incorporer dans ses œuvres. Il a principalement utilisé des représentations géométriques, comme aucun autre artiste ne l'a fait après la Renaissance, abordant même les concepts mathématiques abstraits par le biais de métaphores visuelles. Escher a insisté sur la représentation de l'infini après avoir mené ses propres recherches mathématiques sur les théories corrélées, établissant ainsi des canaux de communication et de conciliation avec des mathématiciens largement reconnus, tels que Pólya, Penrose et Coxeter, alors que ces derniers ont souvent été amenés à d'autres développements et découvertes théoriques, inspirés par la façon alternative dont Escher abordait les objets mathématiques.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les œuvres mathématiques d'Escher

M.C. Escher est né à Leeuwarden (1898) et a grandi à Arnhem, en Hollande. Il est issu d'une famille de scientifiques ; son père était ingénieur civil, tandis que ses quatre frères et soeurs avaient tous une formation scientifique. Comme le décrit Schattschneider dans son travail de recherche sur Escher, "l'atmosphère familiale lui a peut-être inculqué certaines habitudes de recherche scientifique, notamment l'approche patiente et méthodique qui allait caractériser son travail ultérieur. De plus, les jeunes garçons [Escher et ses frères] recevaient régulièrement des leçons sur les techniques de travail du bois qui allaient devenir très utiles à Escher pour la réalisation de ses gravures sur bois.

Figure 1: [Crâne], 1919 ou 1920 ; de la collection de gravures sur bois de M.C. Escher, Œuvres anciennes, 1916-1921 [Source : http://www.eschersite.com/EscherSite/Basalt_Rocks_Escher_31.html]

Sa vie scolaire a peut-être été moins utile que sa vie familiale. Se remémorant ses années d'école, Escher a avoué un jour : "J'étais un élève extrêmement mauvais en arithmétique et en algèbre, et j'ai encore beaucoup de mal avec les abstractions des chiffres et des lettres. J'étais légèrement meilleur en géométrie des solides parce qu'elle faisait appel à mon imagination, mais même dans cette matière, je n'ai jamais excellé à l'école" [...] "Il a cependant bien réussi en dessin et son professeur d'art au lycée l'a encouragé à faire des linogravures" (Schattschneider, 2010, p. 706).

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Figure 2 : Tête d'enfant, Linogravure en vert, 1916, 89 mm x 114mm

Figure 3 : Les Rag Pickers, linogravure en noir, rouge vin, violet ,1918,160mmx200mm

Figure 4 : Perroquet, linogravure, 1919, 166mm x 275mm

(**Figures 2-4 :** Source : https://www.mcescher.com/gallery/)

M.C. Escher a été accepté pour étudier l'architecture à l'école d'architecture et d'arts décoratifs de Haarlem ; cependant, c'est son professeur, Samuel Jessurun de Mesquita, qui l'a rapidement encouragé à suivre un cours de graphisme. Après avoir obtenu son diplôme, en 1922, Escher a voyagé en Italie et en Espagne, où il s'est concentré sur la représentation des paysages, des bâtiments, ainsi que sur certaines parties de la nature. Lors de son voyage à l'Alhambra (Grenade, Espagne), Escher s'inspire de l'esthétique géométrique qui décore les carreaux de majolique, et en particulier de la manière de construire le carrelage dans cette région, ce qui l'amène à concevoir ses propres collections.

Ainsi, dans les années 1920 et comme le décrit Schattschneider, M.C. Escher "a produit quelques "mosaïques" périodiques ayant une forme unique, dont certaines étaient imprimées à la main sur de la soie. Contrairement aux carreaux mauresques qui avaient toujours des formes géométriques, les formes des carreaux d'Escher (qu'il

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

appelait "motifs") devaient être reconnaissables (dans leurs contours) comme des créatures, même si elles n'étaient que le fruit de l'imagination. Ces premières tentatives montrent qu'il a compris (intuitivement, du moins) comment utiliser les transformations de base - préservant la congruence - les translations, les demi-tours (rotations de 180°), les réflexions et les réflexions glissées - pour produire ses carreaux" (Schattschneider, 2010, p.707).

Figure 5: Les pavages mauresques de l'Alhambra ont inspiré le travail d'Escher avec les carreaux du plan.

Après son mariage en 1924, il continue à faire des voyages dans le sud de l'Italie dans le but d'utiliser certains éléments de dessin dans ses ébauches pour des lithographies et des gravures sur bois, tandis qu'en 1936, il décide de s'installer avec sa famille en Suisse, en raison de la montée du fascisme italien. Lors d'un de ses voyages en famille à l'Alhambra, Escher a esquissé les carreaux de majolique de l'Alhambra.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

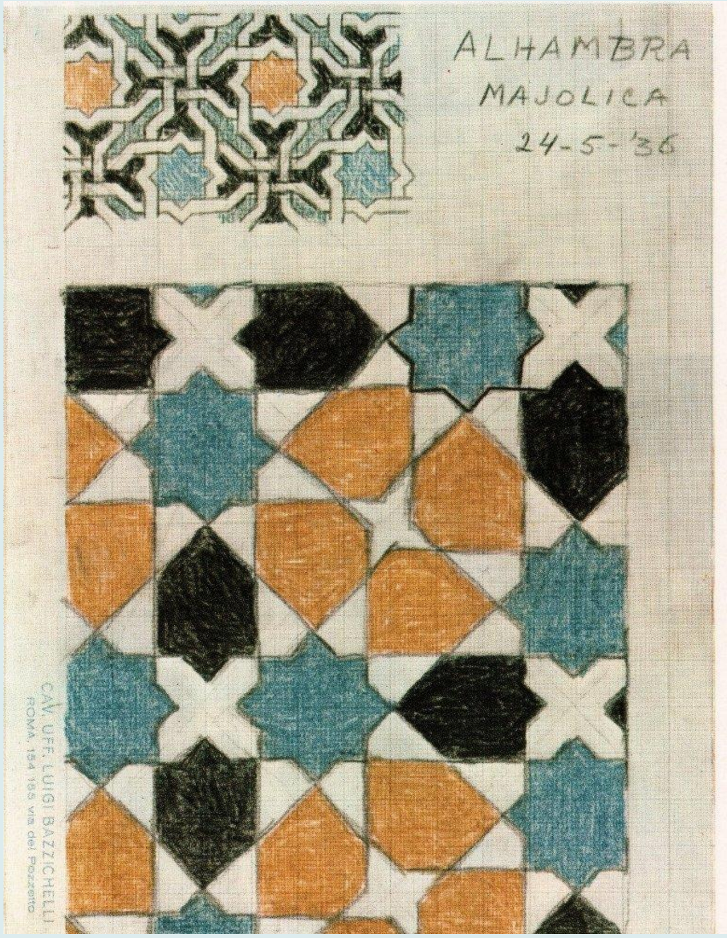


Figure 6 : Croquis d'Escher réalisés en 1936, car il a été influencé par le travail de la majolique de l'Alhambra. Il a utilisé des crayons et des crayons de couleur

(Source: http://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Mihai/section8.html)

C'était la deuxième fois qu'Escher se rendait à l'Alhambra et ce moment peut être considéré comme un tournant dans son travail, tant en ce qui concerne son style que les champs thématiques dont il s'est inspiré. Ce fait peut être attribué au remplacement des "paysages" esquissés, résultant de diverses influences de la nature, des animaux et de l'architecture, par ce que l'on appelle les "mindscapes", se concentrant ainsi davantage sur la relation géométrique des carreaux les uns avec les autres, ainsi que sur les façons de créer des dessins symétriques de motifs imbriqués.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.





Figures 7-11 : Aquarelles d'Escher qui mettent en évidence la notion de "symétrie" à travers des dessins symétriques de motifs imbriqués (1938-1950)

(**Figures 7-11** : Source : https://www.mcescher.com/gallery/symmetry/)

En d'autres termes, Escher a commencé à rassembler les inventions de sa propre imagination, tout en éprouvant son besoin intérieur d'étudier davantage les théories scientifiquement prouvées des mathématiques, de la géologie et de la cristallographie. Il semble que les dessins géométriques mauresques qui, pour des raisons religieuses, étaient totalement dépourvus de toute forme humaine, l'attiraient de façon inimaginable ; théoriquement, ces dessins pouvaient continuer à "l'infini".

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Ainsi, à partir de cette période, les illustrations d'Escher incorporent principalement un dessin géométrique ; il fait usage de contradictions, tandis que ses gravures s'approchent d'un "temps et d'un espace infinis".

Symétrie et solides de Platon

Escher a surtout travaillé avec les symétries, les anneaux et les sphères dans l'espace, les images réfléchies, les inversions, les rotations, les relativités, ainsi qu'avec la collision entre le plan et l'espace.

Il a souvent intégré dans ses œuvres des objets tridimensionnels, les solides dits de Platon, tels que des sphères, des cubes et des tétraèdres. Il utilisait également des cylindres et des polyèdres stellaires, tandis qu'à de nombreuses reprises, il combinait des formes bidimensionnelles avec des formes tridimensionnelles, en se concentrant sur le concept de dimensionnalité. Ses travaux ont ainsi suscité l'intérêt de mathématiciens réputés, comme par exemple Doris Schattschneider et Roger Penrose, qui se sont tous deux intéressés aux distorsions géométriques.

Par exemple, dans sa "Chute d'eau" (1961), on peut observer deux composés polyédriques, à savoir un composé de trois cubes et un dodécaèdre rhombique étoilé, tous deux situés au sommet d'un bâtiment impossible (photo 6). Ce dernier (dodécaèdre rhombique) est largement connu sous le nom de solide d'Escher, qui avait également été utilisé dans son ouvrage "Étoiles" (1948) dans lequel les cinq solides de Platon sont incorporés, en combinaison avec d'autres solides stellaires qui représentent des étoiles (Photo 6).

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

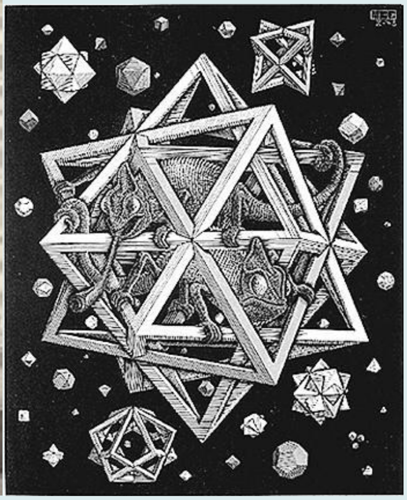


Figure 12 : Chute d'eau, 1961 Lithographie

Figure 13 : Étoiles, 1948, Gravure sur bois

(**Figures 12-13** : Source: https://www.mcescher.com/gallery/impossible-constructions/)

On peut voir ci-dessous des œuvres d'art provenant de la collection mathématique d'Escher, dans laquelle il avait utilisé des figures stéréométriques, telles que des anneaux et des sphères, par le biais d'une collision entre le plan et l'espace.

Figure 14 : 'Étoiles, 1948, gravure sur bois en couleur

Figure 15 : 'couronnes concentriques, 1953, gravure sur bois

Figure 16 : Sphere Spirals, 1958, Gravures sur bois en gris, noir, jaune et rose, imprimées à partir de 4 blocs

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

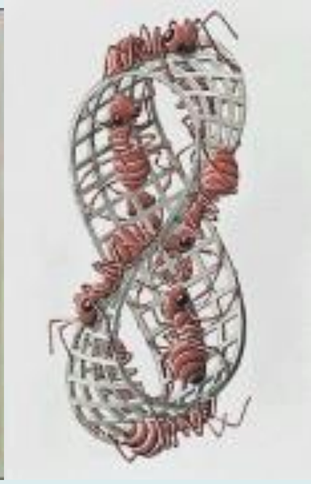




Figure 17 : Surface de sphère avec poissons, 1958gravure sur bois en gris, or et brun rougeâtre, imprimée à partir de 3 blocs

Figure 18 : Bande de Möbius II, 1963, gravure sur bois en rouge,

Figure 19 : Nœuds, 1965, gravure sur bois en rouge, vert et brun, imprimée à partir de 3 blocs

(**Figures 14-19** : Source: https://www.mcescher.com/gallery/mathematical/)

La "division régulière d'un plan" dans les modèles mathématiques

Cependant, Escher est devenu célèbre pour la division régulière du plan avec ses dénommés pavages du plan. Le pavage d'une surface plane est le fait de couvrir un plan d'une ou plusieurs formes géométriques, appelées carreaux, sans chevauchement ni vide.

Il semble qu'Escher ait été fortement influencé par la définition du mathématicien Haag de la "division régulière d'un plan" donnée comme suit :

"Les divisions régulières du plan consistent en des polygones convexes congruents reliés entre eux ; la disposition des polygones adjacents est la même partout"

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

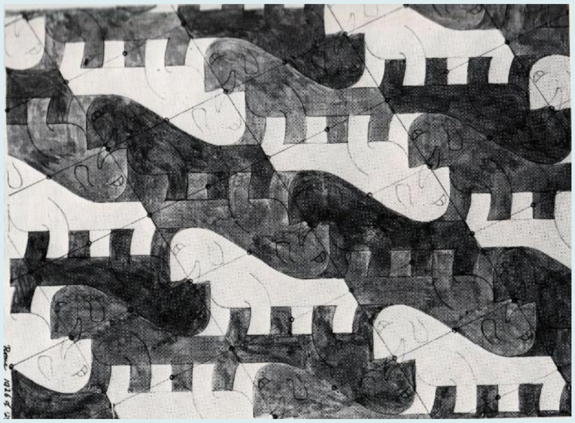


Figure 20 : Première tentative d'Escher (1926 ou 1927) de maintenir une division régulière du plan, en utilisant des animaux imaginaires (Source : http://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Mihai/section8.html)

Créer une "métamorphose" par l'utilisation de pavages

Dans cette section, nous allons aborder le processus de "métamorphose" qui fait partie intégrante des créations d'Escher, et la manière dont il utilisait les "pavages" dans le but de maintenir une "métamorphose". Dans un premier temps, il faut noter qu'Escher a utilisé les "pavages" comme une étape intermédiaire, et non comme un thème principal dans ses œuvres. Les métamorphoses ont été réalisées par le passage progressif de figures et de formes abstraites à des formes concrètes strictement délimitées, tandis que ces dernières se transformaient en autre chose. Voici quelques exemples de la phase intermédiaire, à savoir la "phase de pavage", ainsi que du produit final :

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

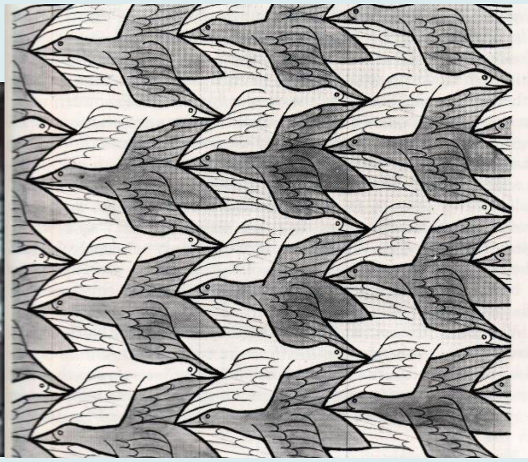


Figure 21 : Dans la partie gauche, la célèbre gravure sur bois d'Escher, intitulée "Jour et nuit' (1938),

Figure 22 : Pavage utilisé par Escher pour réaliser cette gravure sur bois.

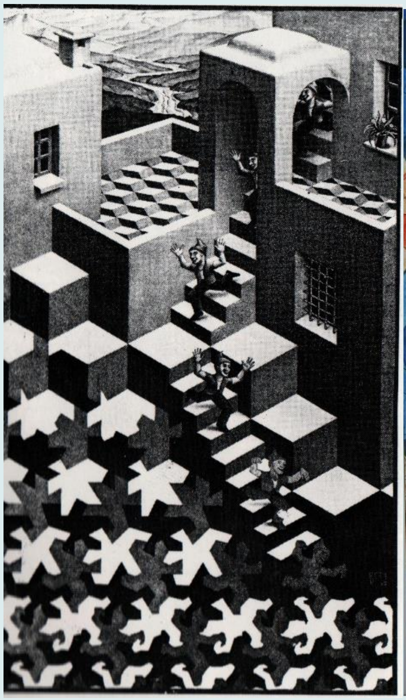


Figure 23 : Dans la partie gauche, la lithographie "Cycle" d'Escher de 1938,

Figure 24 : le remplissage périodique des espaces (pavage) qui constitue la base pour atteindre le résultat final du "Cycle.

Par exemple, son œuvre "Métamorphose I" (1937) représente trois bâtiments de la ville côtière d'Atrani transformés en cubes qui se sont finalement transformés en garçons chinois.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

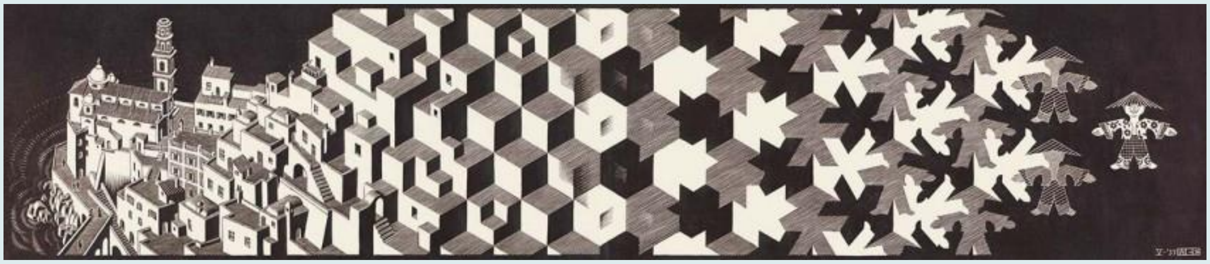


Figure 25 : Métamorphose I, 1937, gravure sur bois imprimée en deux feuilles (Source : https://www.mcescher.com/gallery/switzerland-belgium/metamorphosis-i/)

Dans son livre "Plane Tessellations" (1958), Escher fournit de plus amples explications sur les étapes qu'il franchit pour créer une "métamorphose".

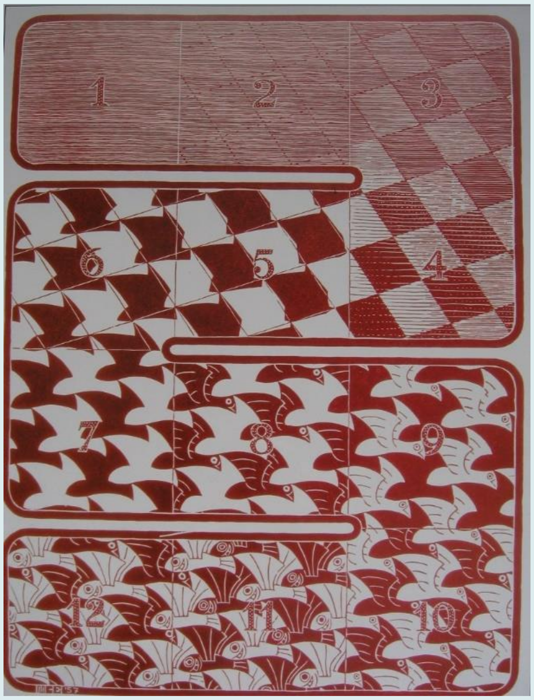


Figure 26 : Les étapes d'une métamorphose (Source : http://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Mihai/section8.html)

Comme on peut le voir sur la photo ci-dessus, de la phase 1 à la phase 4, le plan est divisé en parallélogrammes noirs et blancs. Dans la phase suivante (5), la forme des parallélogrammes est progressivement modifiée, de telle sorte qu'un gonflement vers l'extérieur sur l'un des côtés entraîne un gonflement égal vers l'intérieur sur le côté

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

opposé. Les parallélogrammes continuent à se modifier, principalement en termes de taille, tandis que beaucoup plus de détails sont progressivement ajoutés, atteignant ainsi la phase 8, dans laquelle toutes les formes noires commencent à ressembler à des oiseaux. Par la suite (phase 9-10), la même chose se produit avec les formes blanches, qui se transforment également en oiseaux. Bien que, dans les phases 11-12, par l'ajout de quelques détails supplémentaires, les oiseaux se transforment en poissons (Source : http://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Mihai/section8.html).

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

GLOSSAIRE

Gravure sur bois: une gravure réalisée à partir d'un dessin découpé dans un bloc de bois, autrefois largement utilisée pour les illustrations de livres.

Linogravure: La linogravure est une technique de gravure, une variante de la gravure sur bois dans laquelle une feuille de linoléum (parfois montée sur un bloc de bois) est utilisée pour une surface en relief. Un dessin est découpé dans la surface du linoléum avec un couteau aiguisé, un ciseau en forme de V ou une gouge, les zones en relief (non découpées) représentant un renversement (image en miroir) des parties à imprimer. La feuille de linoléum est encrée au moyen d'un rouleau, puis imprimée sur du papier ou du tissu. L'impression proprement dite peut être faite à la main ou avec une presse à imprimer.

Architecture mauresque : L'architecture mauresque est l'architecture islamique articulée de l'Afrique du Nord et de certaines parties de l'Espagne et du Portugal (Al Andalus), où les Andalous (Maures) étaient dominants entre 711 et 1492. Les meilleurs exemples subsistant en Ibérie sont La Mezquitain Córdoba et le palais de l'Alhambra à Grenade (principalement 1338-1390), ainsi que la Giralda à Séville (1184). D'autres exemples notables en Espagne sont le palais en ruine de Medina Azahara (936-1010), l'église (ancienne mosquée) San Cristo de la Luz à Tolède, la Aljafería à Saragosse et les bains de Ronda et Alhama de Grenade, par exemple.

Pavage de plan: Le pavage d'une surface plane est le carrelage d'un plan à l'aide d'une ou plusieurs formes géométriques, appelées carreaux, sans chevauchement ni interstice. En mathématiques, ils peuvent être généralisés à des dimensions plus élevées et à une variété de géométries.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les Maths dans l'Art d'Escher

(I) Les Solides de Platon

Dans la figure 27, on peut voir un cube, qui constitue l'un des cinq solides de Platon, avec son arête, sa face et son sommet, où, en termes simples :

- **La face** est une surface plane d'un solide
- **L'arête** est un segment de droite entre les faces
- **Le sommet** est un coin

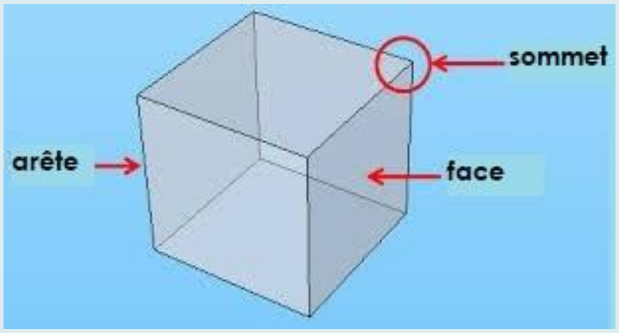
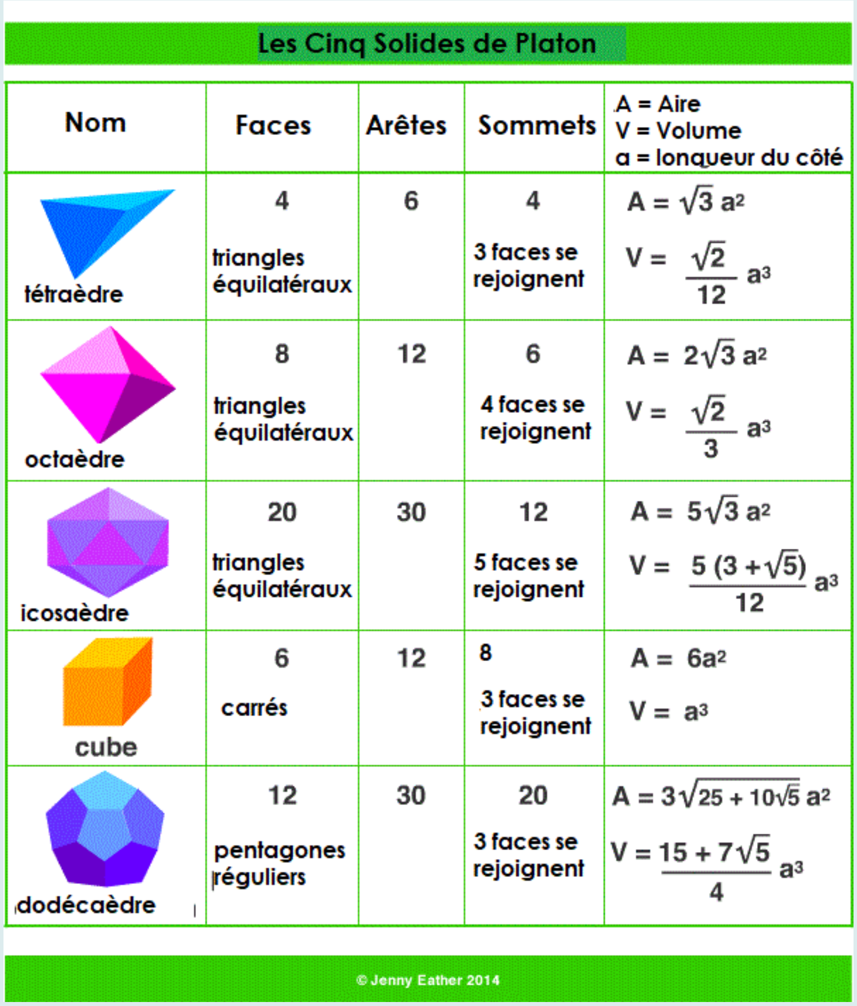


Figure 27 : Le cube, un des cinq solides de Platon

Le tableau suivant représente les cinq solides de Platon, à savoir tétraèdre, octaèdre, icosaèdre, cube, dodécaèdre. Dans la première colonne, on peut voir la façon de représenter chacun des solides ; dans la deuxième colonne, le nombre de faces de chaque solide est indiqué ; dans les troisième et quatrième colonnes, le nombre d'arêtes et de sommets respectivement de chaque solide ; dans la cinquième colonne, la formule de la surface ainsi que du volume de chaque solide est fournie, avec a qui correspond à la longueur du côté.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.



Les Cinq Solides de Platon				
Nom	**Faces**	**Arêtes**	**Sommets**	A = Aire V = Volume a = longueur du côté
tétraèdre	4 triangles équilatéraux	6	4 3 faces se rejoignent	$A = \sqrt{3}\, a^2$ $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$
octaèdre	8 triangles équilatéraux	12	6 4 faces se rejoignent	$A = 2\sqrt{3}\, a^2$ $V = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$
icosaèdre	20 triangles équilatéraux	30	12 5 faces se rejoignent	$A = 5\sqrt{3}\, a^2$ $V = \frac{5\,(3+\sqrt{5})}{12} a^3$
cube	6 carrés	12	8 3 faces se rejoignent	$A = 6a^2$ $V = a^3$
dodécaèdre	12 pentagones réguliers	30	20 3 faces se rejoignent	$A = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\, a^2$ $V = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} a^3$

© Jenny Eather 2014

Figure 28: Les solides de Platon (Source : http://www.amathsdictionaryforkids.com/qr/p/PlatonicSolids.html)

(II) LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION

- **La Translation** est communément appelé " glissement ". Elle fait glisser tous les points d'une forme sur la même distance en suivant la même direction. La translation n'a aucun effet sur la forme de la figure. Par exemple, dans le triangle QRP, chaque point a été transféré de 3 unités vers le bas (axe des y) et en même temps de 4 unités vers la droite. Le nouveau triangle qui en résulte est le Q'R'P'.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

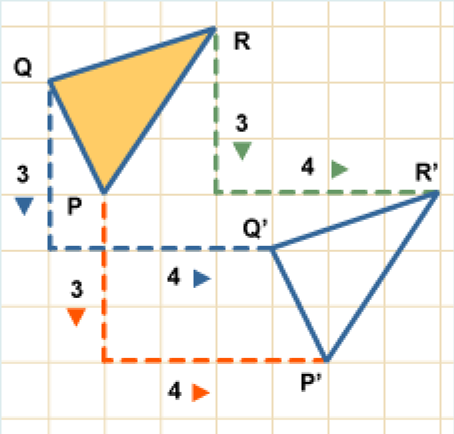
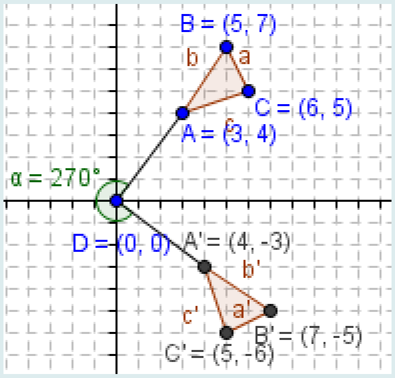


Figure 29 : Translation

- **La Rotation** Consiste à tourner une forme. La forme tournée peut se déplacer vers le haut, le bas, la droite, la gauche dans le plan. Cependant, elle doit toujours tourner autour d'un certain point qui est connu comme le centre de rotation. La rotation n'a aucun effet sur la taille de la forme.

  Par exemple, le triangle ABC effectue une rotation de 270 degrés autour du point D(0,0) qui est le centre de rotation.



Picture 30: Rotation

- **La Réflexion** consiste à retourner une forme. Elle pourrait être décrite comme l'image miroir de la forme, changeant ainsi tous les points sur une ligne. Elle ne fait que refléter la figure sur une ligne, appelée "ligne de réflexion".

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Par exemple, dans l'image suivante, l'axe "yy" pourrait être considéré comme la ligne de réflexion du triangle ABC, tandis que le triangle EDF constitue l'image réfléchie (image miroir) de ABC.

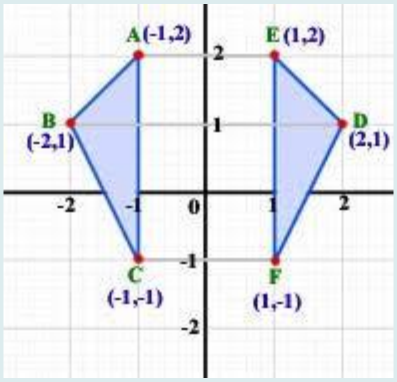


Figure 31 : Réflexion

Principes du pavage du plan

Dans ce paragraphe, nous allons tenter d'expliquer les concepts mathématiques de translation, de rotation et de réflexion à travers les "yeux artistiques" d'Escher. Disons que nous avons une surface, entièrement recouverte de triangles équilatéraux, selon la division régulière d'un plan d'Escher.

Comme décrit dans http://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Mihai/section8.html "si nous déplaçons l'ensemble du plan sur la distance AB, il couvrira à nouveau le motif sous-jacent. Il s'agit d'une translation du plan. Nous pouvons également tourner la copie de 60 degrés autour du point C, et nous remarquons qu'elle couvre à nouveau exactement le motif original. Il s'agit d'une rotation. De plus, si nous faisons une réflexion sur la droite PQ, le motif reste le même. On peut faire correspondre un motif à lui-même par translation, rotation, réflexion et réflexion glissée. Il existe 17 groupes différents de motifs. Escher a découvert toutes ces possibilités sans aucune connaissance mathématique préalable. Une caractéristique particulière du pavage de plan d'Escher est qu'il choisit des motifs qui représentent des objets ou des êtres concrets".

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

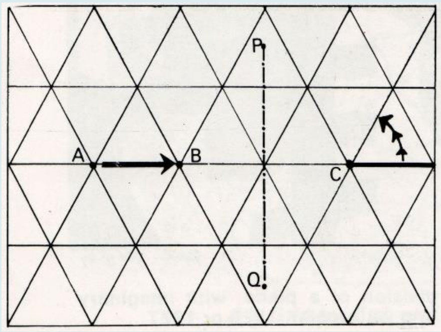


Figure 33 : (Source: http://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Mihai/section8.html)

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

TÂCHES

TÂCHE 1

Transformer un plan en un solide de Platon

Comme nous l'avons observé, Escher se concentre sur la transformation des polygones, en suivant les règles de la "Division régulière d'un plan". Il tente de donner un sens aux constructions tridimensionnelles dans le plan, en travaillant surtout avec des contrastes, comme le noir et le blanc, le jour et la nuit. Il utilise différentes tonalités de gris afin de réaliser la transition de l'un à l'autre.

Escher a commenté son travail "Chute d'eau" : Si nous regardons les différentes parties de cette construction une par une, nous ne pouvons pas y trouver d'erreur. Et pourtant, c'est une impossibilité totale car les changements se produisent soudainement lors de l'interprétation de la distance entre l'œil et l'objet".

Cette double interprétation de "ce qui existe vraiment" et de "ce que nous voyons" n'est pas seulement un "jeu" que l'on pourrait détecter dans les arts. Elle constitue souvent le cœur d'une preuve mathématique.

Un exemple typique de ce qui est sous-entendu ici, constitue le problème des calissons (bonbons français de forme grossièrement rhomboïdale), qui a été posé pour la première fois par Hallenbeck, Deturck et Solow, en 1989. Selon cette méthode, nous plaçons les bonbons au hasard dans une boîte hexagonale, de manière à ce qu'il n'y ait pas de trous (voir photo ci-dessous). On remarquera bientôt que les bonbons pourraient être classés - selon leur orientation dans le plan - en trois groupes (situés du nord au sud, du nord-ouest au sud-est, du nord-est au sud-ouest).

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

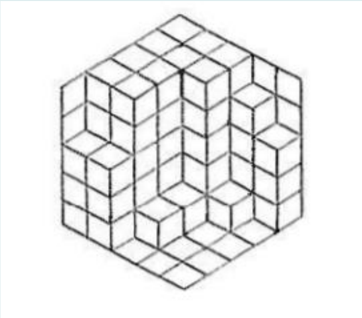
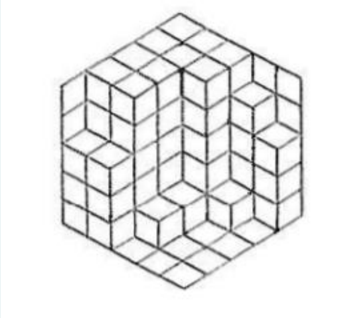


Figure 34 : Le problème des calissons : Remplir un plan hexagonal de calissons rhomboïdes (bonbons)

Question 1 : Qu'observes-tu concernant le nombre de bonbons de chacune des trois catégories ?

Question 2 : En utilisant 3 tonalités différentes (par exemple : noir, gris et blanc), colorie dans l'image suivante les bonbons de chaque catégorie avec la même couleur.



Question 3 : Une fois la tâche précédente accomplie, qu'observes-tu en ce qui concerne le plan hexagonal ? En quel solide platonicien se transforme-t-il et quel est le rôle des calissons rhomboïdes dans ce cas ?

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

TÂCHE 2

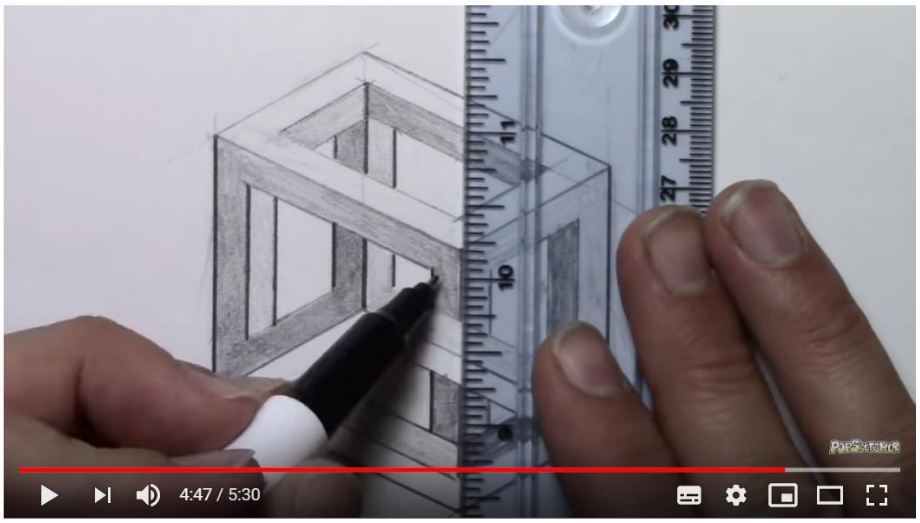
Le cube impossible d'Escher

Regarde les vidéos YouTube suivantes:

https://www.youtube.com/watch?v=CZAQ_b2rzAA

https://www.youtube.com/watch?v=OM9oYcdIJaM

Ensuite, en suivant les directives, essaye de dessiner le **cube impossible d'Escher.**



How-to-draw an Optical Illusion - Escher Cube

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

POUR EN SAVOIR PLUS…

Si vous souhaitez approfondir les thèmes abordés dans cet outil, vous pouvez consulter les liens suivants :

M.C. Escher; Le site web officiel :

https://www.mcescher.com/

Le côté mathématique de M.C. Escher par Doris Schattschneider (anglais) :

https://www.ams.org/notices/201006/rtx100600706p.pdf

M.C. Escher : Plus de mathématiques qu'il n'en faut (anglais) :

http://www.msri.org/people/members/sara/articles/siamescher.pdf

L'Art de l'Impossible : MC Escher et moi - Le savoir secret (anglais) :

https://www.youtube.com/watch?v=f7kW8xd8p4s

L'art mathématique de M.C. Escher (anglais) :

http://platonicrealms.com/minitexts/Mathematical-Art-Of-M-C-Escher/

Les pavages du plan d'Escher (anglais) :

http://pi.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Mihai/section8.html

Comment dessiner une illusion d'optique – Le cube d'Escher (anglais):

https://www.youtube.com/watch?v=CZAQ_b2rzAA

https://www.youtube.com/watch?v=OM9oYcdIJaM

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.