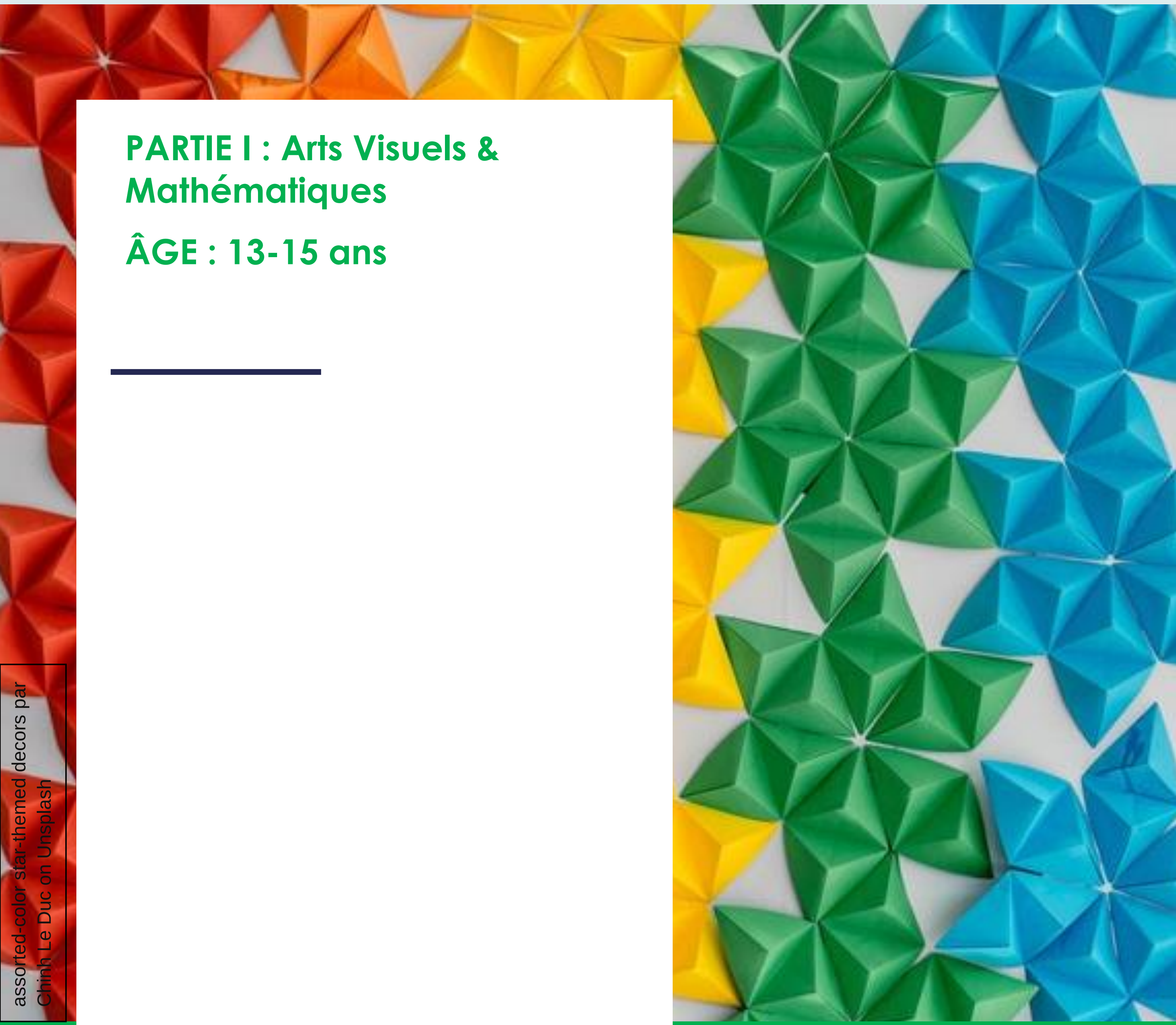


assorted-color star-themed decors par Chinh Le Duc on Unsplash

PARTIE I : Arts Visuels & Mathématiques

ÂGE : 13-15 ans

OUTIL 5 : ORIGAMI ET RELATIONS SPATIALES

LogoPsyCom

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : Origami et relations spatiales

Âge : 13-15 ans

Durée : 2 heures

Concepts mathématiques : dimensions dans l'espace, symétrie, relations géométriques, Théorème de Thales, Théorème de Pythagore, Axiomes

Concepts artistiques : Zhezhi, Origami, techniques de pliage du papier, livres animés

Objectifs généraux : Découvrir comment l'origami illustre des concepts et théorèmes mathématiques et acquérir une vision plus pratique de leur utilisation.

Instructions et Méthodologies : Les élèves exploreront les deux domaines dans leur ensemble, en appliquant les techniques d'origami. Cette démarche constitue une base pour découvrir les concepts mentionnés.

Ressources : Cet outil fournit des photos et vidéos. Les thèmes abordés vous aideront à trouver d'autres supports pour personnaliser et nuancer votre leçon.

Conseils pour l'éducateur : L'apprentissage par la pratique est très efficace, en particulier avec les jeunes apprenants ayant des troubles de l'apprentissage. Expliquez toujours l'utilité pratique de chaque concept mathématique. Les exercices d'origami peuvent être réalisés en binôme, en particulier pour les élèves dyspraxiques qui auraient plus de difficultés avec les manipulations.

Résultats et Compétences ciblés : A l'issue de cet outil, l'élève sera capable de :

- Savoir quels étaient les axiomes d'Euclide ;
- Comprendre et utiliser le théorème de Thales ;
- Comprendre et utiliser le théorème Pythagore.

Compte-rendu et évaluation :

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 aspects que vous avez appris :	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Introduction

Origami est un mot japonais qui fait référence au pliage du papier. Cette technique est clairement liée aux mathématiques car elle utilise les relations spatiales pour créer des formes qui peuvent être transformées en pliant et dépliant le papier de manière spécifique.

La connaissance géométrique pourrait être conçue de manière décisive comme un instrument théorique dans les arts visuels. Chaque manipulation dans l'espace tridimensionnel est une utilisation des mathématiques. Sans même y penser, nous calculons des distances et identifions des relations spatiales.
Sans même y penser, nous calculons des distances et identifions des relations spatiales.

De nombreux chercheurs ont souligné les bienfaits de l'utilisation de l'origami dans l'éducation, notamment pour enseigner la géométrie. Les techniques de pliage du papier peuvent aider les élèves à comprendre les relations et les transformations géométriques en expérimentant et en analysant les changements qu'ils observent grâce à cette méthode créative. La valeur ajoutée est qu'ils peuvent utiliser les concepts appris pour construire de nouvelles compositions artistiques et avoir un résultat matériel à leurs opérations.

Cet outil se concentrera donc sur l'applicabilité des mathématiques dans les techniques de pliage de l'origami et comprendra quelques manipulations matérielles permettant aux élèves de vivre une expérience créative pratique avec les mathématiques.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

L'Art de l'Origami

Avant de devenir un art japonais, le pliage du papier est apparu en Chine et a été appelé Zhezhi. Ce n'est qu'au VIe siècle que des moines bouddhistes ont introduit cet art au Japon. En japonais, "origami" vient de "ori", le pliage, et "gami", le papier. Il était utilisé comme loisir pour les enfants jusqu'à ce qu'un professeur de géométrie, Akira Yoshizawa, qui avait lui-même apprécié l'origami dans son enfance, décide de l'utiliser pour enseigner les angles, les lignes et les formes à ses élèves. Il a développé ses nouvelles techniques et ce qui était un passe-temps est devenu une forme d'art qui a suscité un grand intérêt chez de nombreux professeurs de mathématiques.

Où peut-on voir et utiliser l'origami ?

L'origami peut être utilisé à de nombreuses fins différentes. Certains professeurs de mathématiques l'utilisent pour enseigner la géométrie, mais il est également possible d'appliquer l'origami ailleurs ! On peut même l'observer dans la nature !

Savais-tu que les feuilles de certains arbres se déploient parfois de manière très similaire à une technique d'origami appelée le **pliage de Miura** ? Eh bien, il s'avère que des chercheurs du Centre de biomimétique de l'Université de Reading ont découvert que les feuilles du hêtre et du charme se déploient de manière très similaire à cette technique d'origami.

Figure 1: Feuilles de hêtre qui se déploient

Parmi les utilisations humaines de l'origami, le pliage de Miura est également utilisé avec les plans. Ils sont pliés de manière à être faciles à transporter et à déplier.

Voici un GIF qui montre cette technique :

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Miura-ori.gif

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Cette technique est très utile lorsque l'on doit transporter une grande feuille de papier ou une surface plane. Elle a donc également été utilisée dans la conception des panneaux solaires afin qu'ils se déplient plus facilement lorsqu'ils sont placés à leur destination finale.

Voici une vidéo de la BYU (Brigham Young University) qui explique comment l'origami est utilisé dans la conception des panneaux solaires (en anglais) : https://www.youtube.com/watch?v=3E12uju1vgQ.

Livres animés

Tu sais probablement ce que sont les livres animés. Ils contiennent des figures pliées qui se déplient lorsque l'on ouvre le livre et montrent l'illustration de l'histoire. Ces livres utilisent le pliage du papier de manière très créative.

Le GIF suivant montre ce qu'est un livre animé : https://en.wikipedia.org/wiki/File:PopupCinderella.gif

Regarde cette vidéo de TED-Ed pour comprendre comment créer des animations dans des livres animés: https://www.youtube.com/watch?v=RZR_b753ZJ0

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Glossaire

Zhezhi : l'art du pliage de papier en Chine.

Origami : l'art du pliage de papier au Japon.

Pliage de Miura[1] : est une méthode de pliage d'une surface plate telle qu'une feuille de papier, en une forme d'aire plus petite. Ce pliage porte le nom de son inventeur, l'astrophysicien japonais Koryo Miura.

Livre animé: est un livre dans lequel l'auteur a plié le papier de façon à créer des illustrations en 3D qui se déplient lorsque l'on ouvre le livre.

[1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Pliage_de_Miura

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les maths dans l'Origami

Les Axiomes :

L'origami peut être complémentaire aux règles de géométrie que nous connaissons déjà. Par exemple, les axiomes des "Éléments" d'Euclide peuvent être un bon exemple pour créer un autre ensemble d'axiomes liés à l'art du pliage du papier.

Voyons d'abord quels étaient les **axiomes d'Euclide**[2] :

- il existe toujours une droite qui passe par deux points du plan.
- tout segment peut être étendu suivant sa direction en une droite (infinie).
- à partir d'un segment, il existe un cercle dont le centre est un des points du segment et dont le rayon est la longueur du segment.
- tous les angles droits sont égaux entre eux.
- étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première

Bien que ces axiomes puissent aider à démontrer des théorèmes plus complexes, la géométrie de l'origami peut également être très précieuse.

Voici les axiomes d'**Huzita-Hatori** :

Le **pli** et le **mouvement** sont mis en évidence sur chaque image.

1. Soient deux points **P1** et **P2** ; il existe un pli unique qui passe par les deux points.

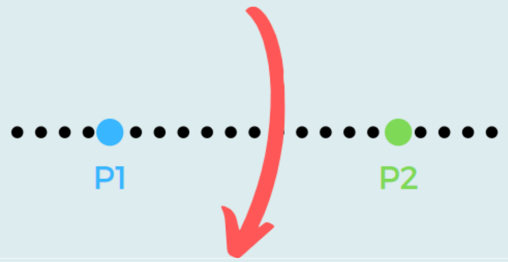


Figure 2: Premier Axiome d'Huzita-Hatori

[2] http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./a/axiomeeuclide.html

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

2. Soient deux points **P1** et **P2** ; il existe un pli unique qui place P1 sur P2.

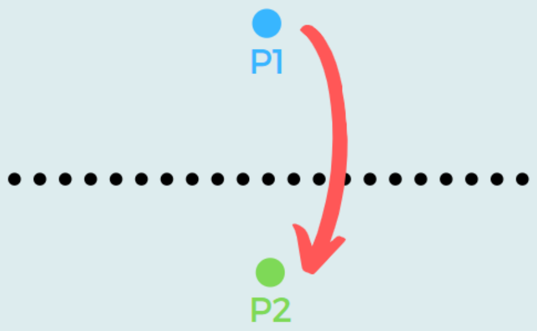


Figure 3: Second Axiome d'Huzita-Hatori

3. Soient deux droites **L1** et **L2** ; il existe un pli qui place L1 sur L2.

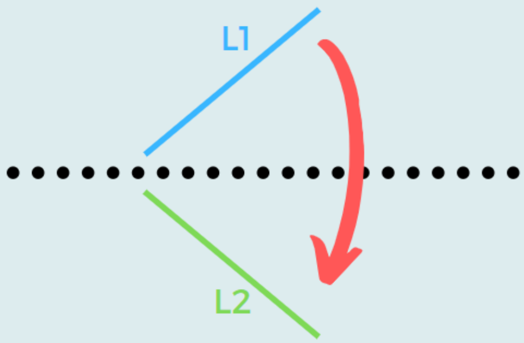


Figure 4: Troisième Axiome d'Huzita-Hatori

4. Soient le point **P1** et la droite **L1** ; il existe un pli unique perpendiculaire à L1 qui passe par P1.

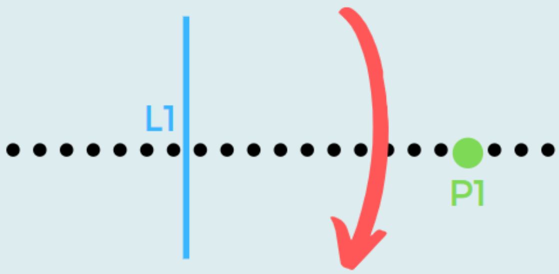


Figure 5: Quatrième Axiome d'Huzita-Hatori

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

5. Soient deux points **P1** et **P2** et la droite **L1** ; il existe un pli qui place P1 sur L1 en passant par P2.

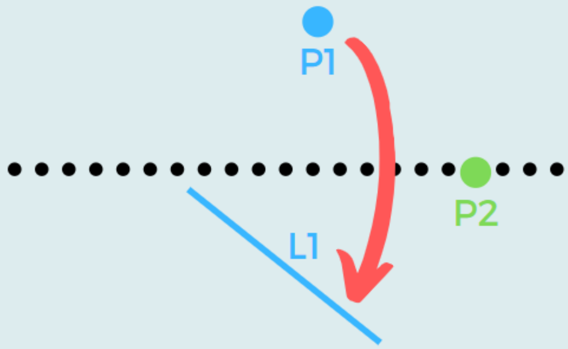


Figure 6: Cinquième Axiome d'Huzita-Hatori

6. Soient les points **P1** et **P2** et les droites **L1** et **L2**, il existe un pli qui place P1 sur L1 et P2 sur L2.

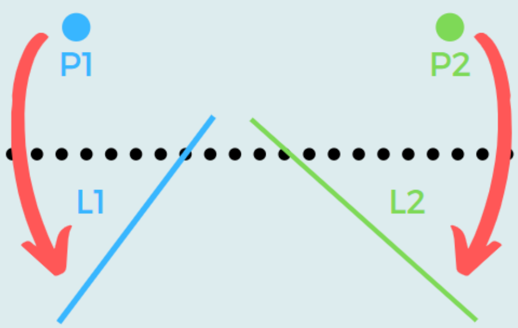


Figure 7: Sixième Axiome d'Huzita-Hatori

7. Soient un point **P1** et deux droites **L1** et **L2** ; il existe un pli qui place P1 sur L1 et qui est perpendiculaire à L2.

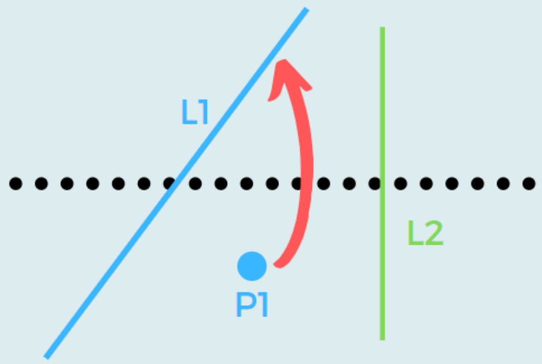


Figure 8: Septième Axiome d'Huzita-Hatori

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Théorème de Thales

Thales était un mathématicien grec de l'Antiquité. Son théorème est mentionné dans les "Éléments" d'Euclide.

Si A, B et C sont des points distincts sur un cercle où la ligne AC est un diamètre, alors l'angle $\angle ABC$ est un angle droit.

Pour le démontrer, Thales l'a expliqué comme suit, où O est l'origine du cercle :

- Puisque OA = OB = OC, les triangles OBA et OBC sont des triangles isocèles,

et par l'égalité des angles de base d'un triangle isocèle,

- $\angle OBC = \angle OCB$ and $\angle OBA = \angle OAB$.

Soit $\boldsymbol{\alpha = \angle BAO}$ and $\boldsymbol{\beta = \angle OBC}$.

- Les trois angles internes du triangle ABC sont α, $(\alpha + \beta)$, et β.
- Comme la somme des angles d'un triangle est égale à 180°, nous avons :

$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180°$

$2\alpha + 2\beta = 180°$

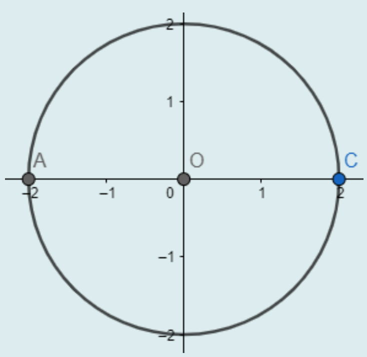
$2(\alpha + \beta) = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$

C.Q.F.D.

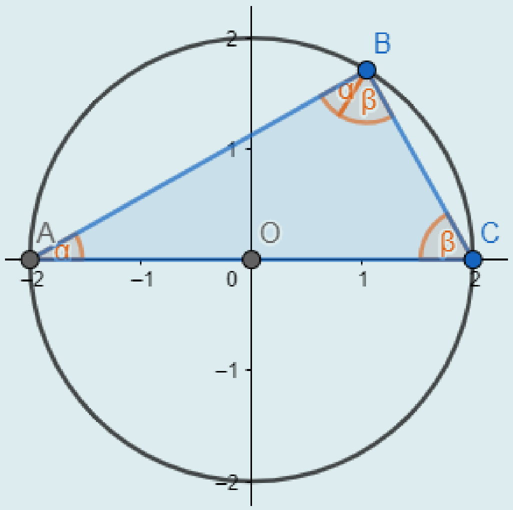
Dessinons la preuve géométrique du théorème :

1. Avec une règle et un compas, trace un cercle sur une feuille de papier.

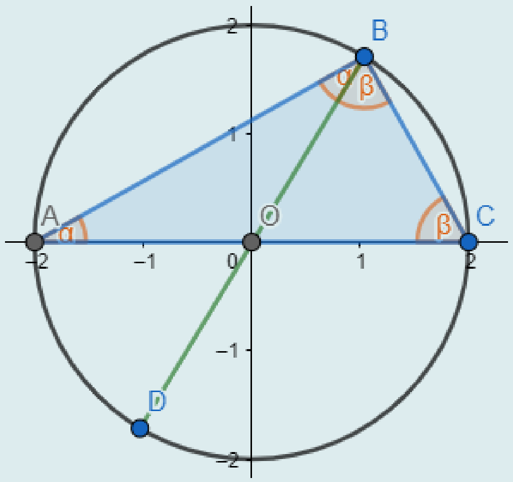


Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

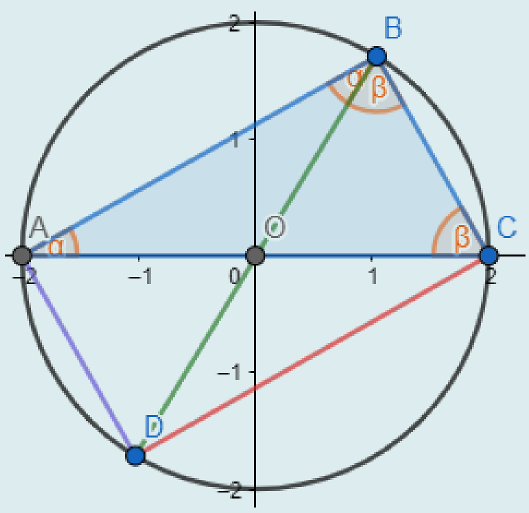
2. Dessine un triangle ABC où le **segment AC** est le **diamètre** du cercle;



3. **À partir du point B**, dessine un **segment** passant **par l'origine O** et se finissant à l'**intersection D** du cercle;



4. Tu peux maintenant dessiner un parallélogramme avec tous les points (ABCD).



Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

a) Ce parallélogramme est-il un rectangle ?

Oui

b) Tous ses angles sont-ils des angles droits ?

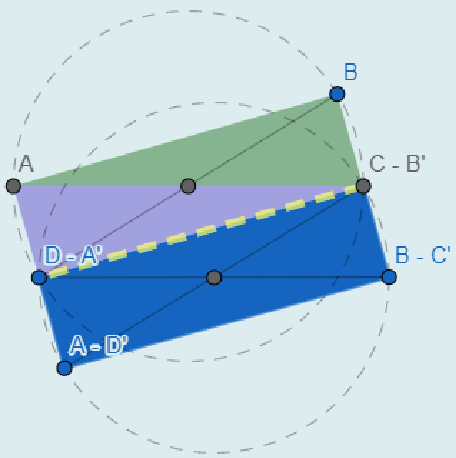
Oui

c) Qu'est-ce que cela signifie ?

Que les angles ∠ABC et ∠ADC sont des angles droits !

d) Comment penses-tu que nous pouvons utiliser l'origami ici ?

Réponse possible : Si nous plions le papier sur le segment DC :



Nous pouvons projeter le même rectangle ci-dessous, qui sera appelé A'B'C'D' dans lequel :

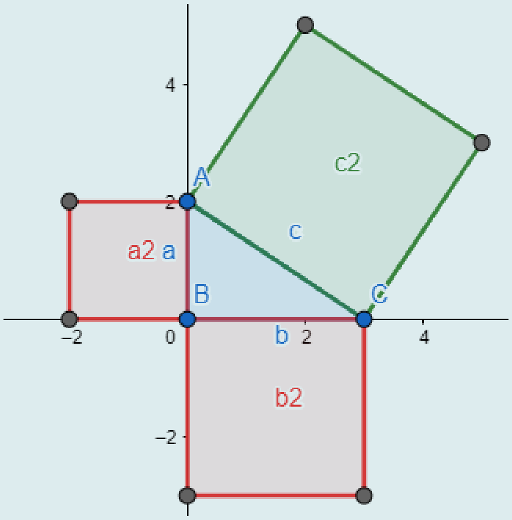
- Le segment AB sera plié sur le segment D'C
- Le segment DC deviendra le segment A'B'
- Grâce à cette opération, nous pouvons faire une transformation géométrique appelée « la réflexion » ou « symétrie axiale »

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Théorème de Pythagore

Pythagore était également un philosophe et mathématicien grec de l'Antiquité classique. Il est surtout connu pour son théorème qui dit que :

Le carré de l'**hypoténuse** (le côté **opposé** à l'angle droit) d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés de ses deux autres côtés.
Nous l'écrivons: $\mathbf{a^2+b^2 = c^2}$



Dans cet exemple:

- a = segment AB
- b = segment BC
- c = segment CA

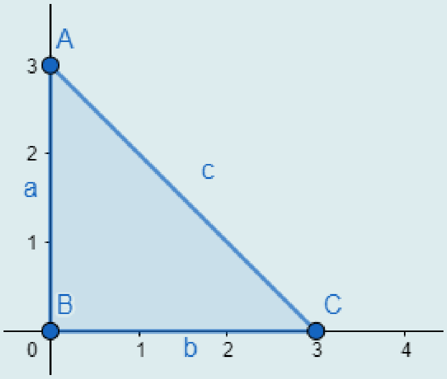
➔ Les carrés rouges représentent a^2 et b^2
➔ Le carré vert représente c^2
➔ Le segment AC est **l'hypoténuse**

Faisons quelques exercices en utilisant la formule :

Pour chaque triangle :

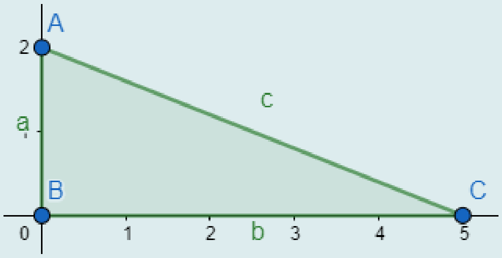
1. Nomme les segments a, b et c sur l'image ;
2. Utilise l'équation de Pythagore ;
3. Calcule la longueur de l'hypothénuse.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.



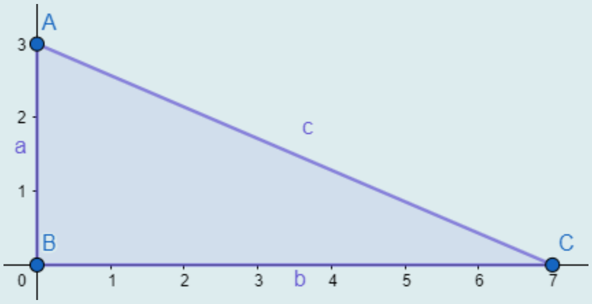
$3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$

c = $\sqrt{\mathbf{18}} = \mathbf{4.2426}$



$2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$

c = $\sqrt{\mathbf{29}} = \mathbf{5.3852}$



$3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$

c = $\sqrt{\mathbf{58}} = \mathbf{7.6158}$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

TÂCHE

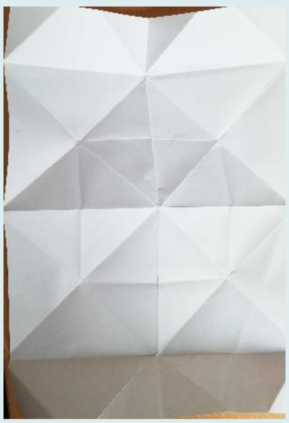
Cette tâche te permettra de comprendre comment l'origami peut représenter des concepts et des techniques mathématiques.

Dessiner le théorème de Pythagore avec une technique d'origami : le bateau !

Regarde la vidéo suivante pour apprendre à le faire :
https://www.youtube.com/watch?v=C8pK_22gReo

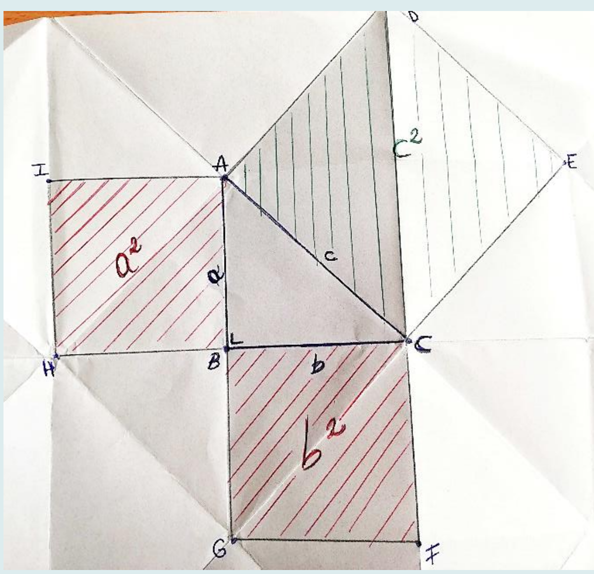
Maintenant que tu as ton bateau, déplie-le en faisant tout à l'envers.

Tu devrais obtenir quelque chose comme ça :



Tu peux observer des triangles et des carrés partout sur la page.

Dessinons le théorème de Pythagore par-dessus ces formes !



Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

1. Réponds aux questions suivantes pour voir si certains axiomes de l'origami sont suivis:

a. Y a-t-il un pli qui passe par les points A et E ?

   Oui

b. Y a-t-il un pli avec lequel le point I peut être placé sur le point B ?

   Oui

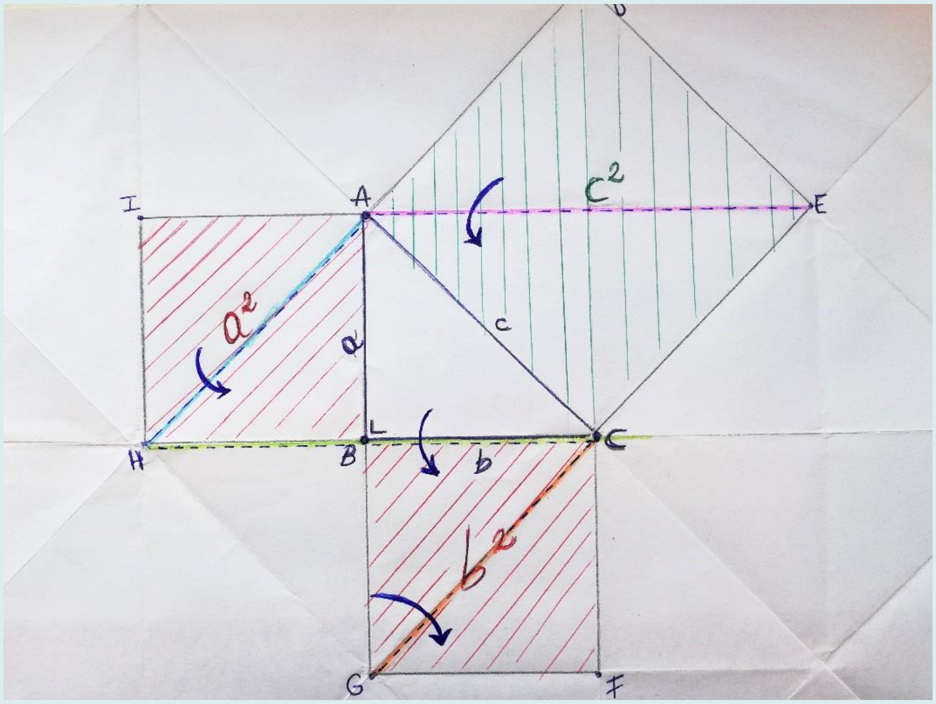
c. Y a-t-il un pli qui place le segment GB sur le segment GF ?

   Oui

d. Y a-t-il un pli perpendiculaire au segment AG qui passe par le point C ?

   Oui

2. Mets ces plis en évidence dans une couleur différente sur ton dessin.



Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

POUR EN SAVOIR PLUS…

Article sur l'utilisation de l'origami à l'école (anglais) :

http://www.fau.edu/education/centersandprograms/mathitudes/documents/20080901bMathitudesOct08revisionFinalVersionforpublicationOct242008.pdf

TED Talk sur la contribution des mathématiques à l'art de l'origami :

https://www.ted.com/talks/robert_lang_folds_way_new_origami#t-193336

Vidéo TED-Ed pour aller plus loin avec le Théorème de Pythagore :

https://www.youtube.com/watch?v=YompsDlEdtc

Article sur les mathématiques dans l'origami (anglais) :

https://theconversation.com/origami-mathematics-in-creasing-33968

Article sur l'histoire et les axiomes de l'origami (anglais) :

https://plus.maths.org/content/power-origami

Article sur les mathématiques dans l'origami (anglais) :

https://www.tor.com/2017/06/29/the-magic-and-mathematics-of-paper-folding/

Vidéo TED-Ed sur les livres animés :

https://www.youtube.com/watch?v=RZR_b753ZJ0

Comment plier un bateau en origami :

https://www.youtube.com/watch?v=C8pK_22gReo

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.