

PARTIE I : Arts visuels et mathématiques

ÂGE : 13-15 ans

OUTIL 4: POLYÈDRES ET PERSPECTIVES

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : Polyèdres et perspectives

Âge : 13 – 15 ans

Durée : 2 heures

Concepts mathématiques : Polyèdre, Polyèdre convexe, Solides platoniques, Hexaèdre, Tétraèdre, Octaèdre, Icosaèdre, Dodécaèdre

Concepts artistiques : Perspective linéaire, Perspective aérienne, Point de fuite

Objectifs généraux : Identifier et reconnaître les solides platoniques ; Analyser les différentes techniques selon lesquelles les artistes ont développé leurs compétences au fil du temps, notamment par l'utilisation de la perspective.

Instructions et Méthodologies : Demandez aux élèves de regarder les peintures à grande échelle afin d'avoir une idée plus précise de la perspective, soit en projetant les peintures, soit sur internet.

Ressources : Un stylo, une règle et des crayons/crayons de couleur.

Conseils pour l'éducateur : Préparez des plans des solides platoniques et distribuez-les aux élèves au cas où ils auraient du mal à réaliser les exercices 4 et 5. En étant capable de les manipuler physiquement, ils comprendront mieux le concept.

Résultats et Compétences ciblés : À la fin de cet outil, l'élève pourra :

- Comprendre le processus logique derrière les différentes façons dont les artistes ont développé des peintures par l'utilisation de la perspective linéaire et aérienne ;
- Connaître la différence entre la perspective linéaire et la perspective aérienne ;
- Comprendre le concept derrière un solide platonique et ce qu'il faut pour qu'un polyèdre soit considéré comme tel, ainsi que les nommer.

Compte-rendu et Évaluation :

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 choses que vous avez apprises	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Introduction

Les polyèdres ont une relation avec l'art depuis des milliers d'années.

Des centaines d'artefacts ressemblant à des polyèdres, dont on pense qu'ils datent du néolithique (environ 5000 ans avant JC), ont été trouvés en Ecosse. Certains d'entre eux (Fig. 1) sont aujourd'hui exposés au Ashmolean Museum d'Oxford.

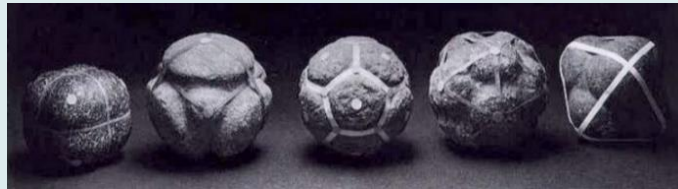


Fig. 1 – Pierres sculptées du Néolithique

(Source: <https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/neolithic.html>)

Dans la Grèce antique, cependant, les polyèdres étaient un symbole de vérités philosophiques et religieuses profondes. Le mathématicien et philosophe Platon (428 - 347 av. J.-C.), dans son dialogue écrit *Timée* (vers 360 av. J.-C.), est allé jusqu'à associer les cinq polyèdres réguliers et convexes aux quatre éléments de base que l'on croit être à la base du monde physique - l'Air, l'Eau, la Terre et le Feu (et l'Univers).

3

Aussi mythique que la théorie de Platon ait pu paraître, elle a influencé de nombreux autres philosophes au cours des siècles suivants, au point que ces solides sont devenus connus sous le nom de solides de Platon. Par exemple, Johannes Kepler (1571-1630), en cherchant un ordre mathématique dans le monde, inspiré par cette théorie, a représenté les éléments comme on le voit sur la Fig. 2.



Fig. 2 – L'association des solides de Platon aux éléments, par Johannes Kepler.

(Source: <http://thewondersofmathandart.blogspot.com/2012/11/patterns-in-void-platonic-solids-in.html>)

Polyèdres et perspectives

Perspective linéaire

La relation entre les polyèdres et l'art a atteint son apogée pendant la Renaissance (1300-1600), après que le sculpteur et architecte Filippo Brunelleschi (1377-1446) ait découvert les principes de la perspective linéaire. Il s'agissait d'une technique qui permettait de créer une illusion de profondeur sur une surface plane.

Après avoir publié sa méthode, elle s'est répandue dans toute l'Italie et en Europe, et d'autres artistes l'ont utilisée et perfectionnée. Le chef-d'œuvre de Léonard de Vinci "La Cène", comme le montre la figure 3, est un excellent exemple de cette mise en œuvre dans la peinture.



Fig. 3 – La Cène (1495-98), par Leonardo de Vinci
(Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Last_Supper)

4

Le concept de polyèdre et de solides platoniques s'est encore élargi lorsque les artistes ont commencé à l'utiliser dans leurs compositions.

Ces formes d'illustration, utilisant les principes de la perspective linéaire, ont rendu explicite la distinction entre les faces avant et arrière des polygones du polyèdre (Fig. 4), contrairement aux dessins précédents dans lesquels les polygones avant et arrière étaient visuellement indiscernables et/ou confus.

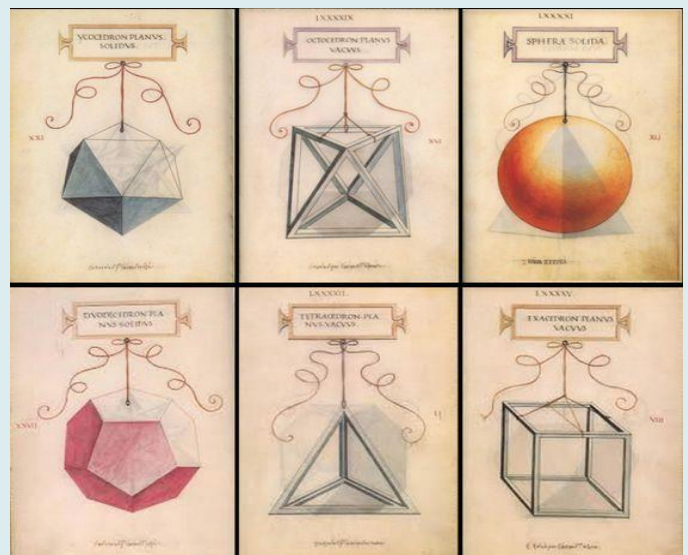


Fig. 4 – Illustrations de polyèdres pour le livre de Luca Pacioli "La Divine Proportion" (1509), de Léonard de Vinci. (Source: <https://lifethroughamathematicianseyes.wordpress.com/2018/01/24/leonardo-da-vincis-geometric-sketches/>)

À l'époque moderne, l'utilisation de polyèdres peut être trouvée dans d'autres formes d'art, comme le design et l'architecture. Quelques exemples dans les Fig. 4, 5, 6 et 7.

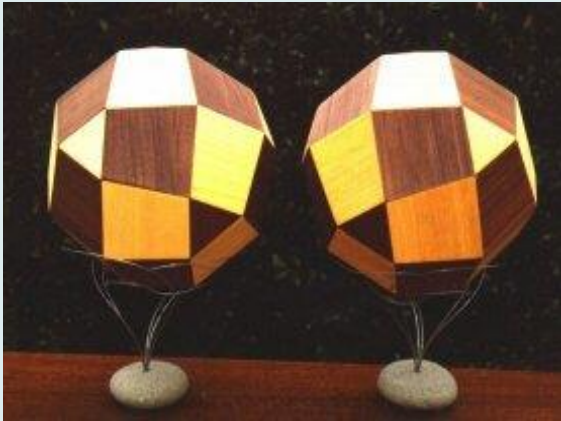


Fig. 5 - "Yin et Yang", de George W. Hart (Source: <https://www.georgehart.com/sculpture/yin-yang.html>)



Fig. 6 – Auditorium du Dôme de la Seine Musicale, à Paris (Source: GraphyArchy [CC BY-SA 4.0] (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>))



Fig. 7 – Polyèdre habitable, par Manuel Villa (<https://newatlas.com/habitable-polyhedron-pod/22858/#gallery>)



Fig. 8 – Bâtiment de la Casa da Música, à Porto (Source: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Casa-da-musica\(exterior\).1000.jpg#filelinks](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Casa-da-musica(exterior).1000.jpg#filelinks))

Perspective aérienne (perspective de couleur)

Une fois la perspective linéaire adoptée et maîtrisée, d'autres moyens de créer une illusion de profondeur ont été étudiés. L'un d'entre eux est connu sous le nom de perspective aérienne, dont la règle consiste à utiliser des couleurs et des nuances plus sombres au premier plan d'une illustration, et des couleurs plus claires à l'arrière-plan de manière à créer de la profondeur.

Les tableaux du peintre romantique Caspar David Friedrich (1774-1840) sont un excellent exemple de l'utilisation de la perspective aérienne dans la peinture :



Fig. 9 – "Le Voyageur contemplant une mer de nuages" (1818), par Caspar David Friedrich (Source: <https://www.wga.hu/frames-e.html?/html/f/friedric/2/209fried.html>)



Fig. 10 – "Paysage rocheux dans les montagnes de grès de l'Elbe" (1822-23), par Caspar David Friedrich (Source: <https://digital.belvedere.at/objects/8389/felsenlandschaft-imelbsandsteingebirge>)

Comme on peut l'observer sur les figures 8 et 9, les couleurs plus claires et plus floues représentent un horizon/arrière-plan éloigné, tandis que les couleurs plus foncées, au premier plan, semblent plus proches de l'observateur. Cette utilisation des couleurs de manière si naturelle affecte les yeux du spectateur au point de créer une illusion de profondeur.

Glossaire

Perspective aérienne (perspective couleur) : Technique utilisée dans les arts visuels par la manipulation des nuances de couleur, afin d'obtenir une sensation de profondeur dans une surface plane bidimensionnelle.

Perspective linéaire : Technique utilisée pour faire une représentation approximative d'une image tridimensionnelle, telle que vue par l'œil, sur une surface bidimensionnelle, en utilisant des lignes parallèles se coupant en un seul point de la composition d'un horizon.

Renaissance : Dérivé du mot italien "Rinascimento". La Renaissance représente une renaissance culturelle, qui a marqué une transition du Moyen-Âge à la modernité. Elle a commencé à Florence, en Italie, et s'est étendue à toute l'Europe.

Point de fuite : Un point unique dans la composition d'un horizon utilisé en Perspective Linéaire, dans laquelle toutes les lignes parallèles convergent en un seul point. Habituellement, le protagoniste d'une composition se trouve en ce point.

Les mathématiques dans la perspective

Filippo Brunelleschi a réalisé que si des lignes parallèles convergeaient en un seul point dans une toile, cela créerait une illusion de profondeur. Ce fait l'a conduit à découvrir une méthode qui lui permet de déterminer mathématiquement, à l'intérieur d'un tableau, les proportions correctes d'un objet à l'échelle de la réalité.

Dans l'une de ses expériences les plus remarquables (Fig. 11), Filippo Brunelleschi a esquissé le Baptistère de Florence sur une toile et y a fait un seul petit trou. Ensuite, il a demandé à un homme de le tenir contre le vrai Baptistère, avec un miroir entre les deux. Il a ensuite demandé à l'homme ce qu'il voyait. L'homme a répondu : "Oh, c'est le Baptistère, Sir Filippo ! Brunelleschi venait de représenter le bâtiment en parfaite perspective.

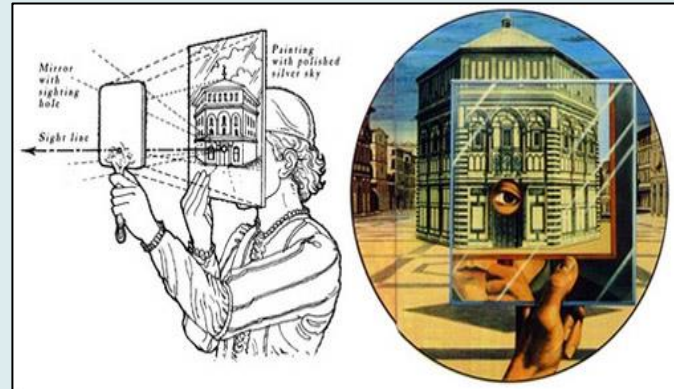


Fig. 11 – Expérience par Filippo Brunelleschi (Source: <https://lifethroughamathematicianseyes.wordpress.com/2018/01/24/leonardo-da-vincis-geometric-sketches/>)

Pour mieux comprendre, regarde le tableau original de la "Cène" montré ci-dessus (Fig. 3) et découvre comment il peut être décomposé en une vue en perspective linéaire dans une tentative réussie de créer une illusion de profondeur (Fig. 12) :

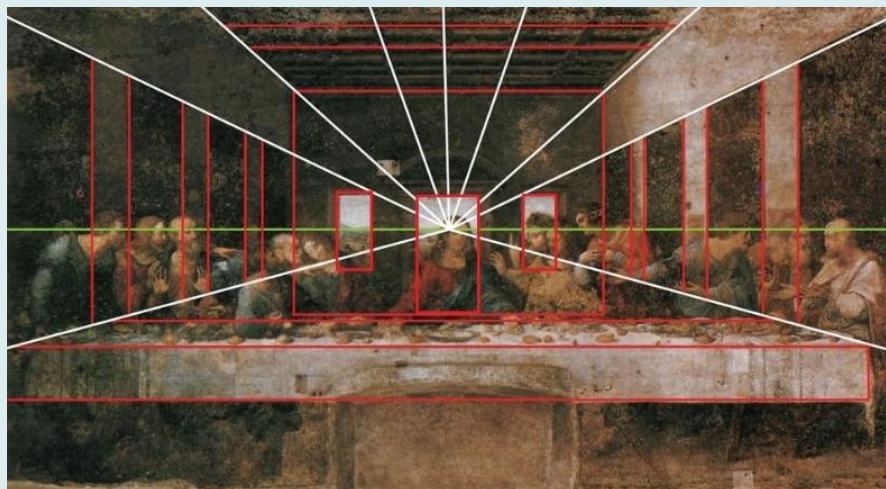


Fig. 12 – Presence of Linear Perspective in Last Supper (1495-98)
(Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Last_Supper)

Quant à la Perspective aérienne, il suffit de décomposer la toile en "couches" et de les peindre en conséquence.

La figure 13 illustre parfaitement cette règle : les tons les plus sombres de la peinture sont au premier plan. Cependant, à mesure que les plaines reculent vers l'horizon, les couleurs deviennent plus pâles, créant ainsi de la profondeur.



Fig. 13 – Représentation en perspective aérienne

(Source: [Untitled], <http://spartanartb.blogspot.com/2014/07/8th-grade-color-value-landscapes.html>)

Entre-temps, pour en revenir aux polyèdres, Leonhard Euler (1707-1783) avait établi la formule $s - a + f = 2$, communément appelée **formule d'Euler**. Cette formule indique que, dans un polyèdre convexe, le nombre de sommets (s), moins le nombre d'arêtes (a), plus le nombre de faces (f), est toujours égal à deux.

Par exemple, comme le montre la figure 13, un hexaèdre a 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces. De cette façon, $s - a + f = 2$ est égal à $8 - 12 + 6 = 2$.

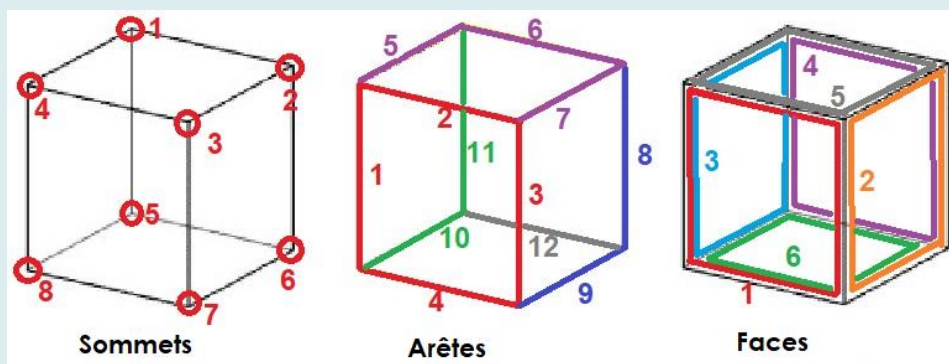


Fig. 14 – Les sommets, les arêtes et les faces d'un hexaèdre (Source: Auteur)

TÂCHES

TÂCHE 1

Selon les principes de la perspective linéaire :

1.1. Peux-tu trouver le point de fuite ? Indique-le dans la version en noir et blanc.



Fig. 15 – Le Christ remettant les clés à saint Pierre (1481-82), par Pietro Perugino
(Source: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PeruginoKeys.jpg>)

10

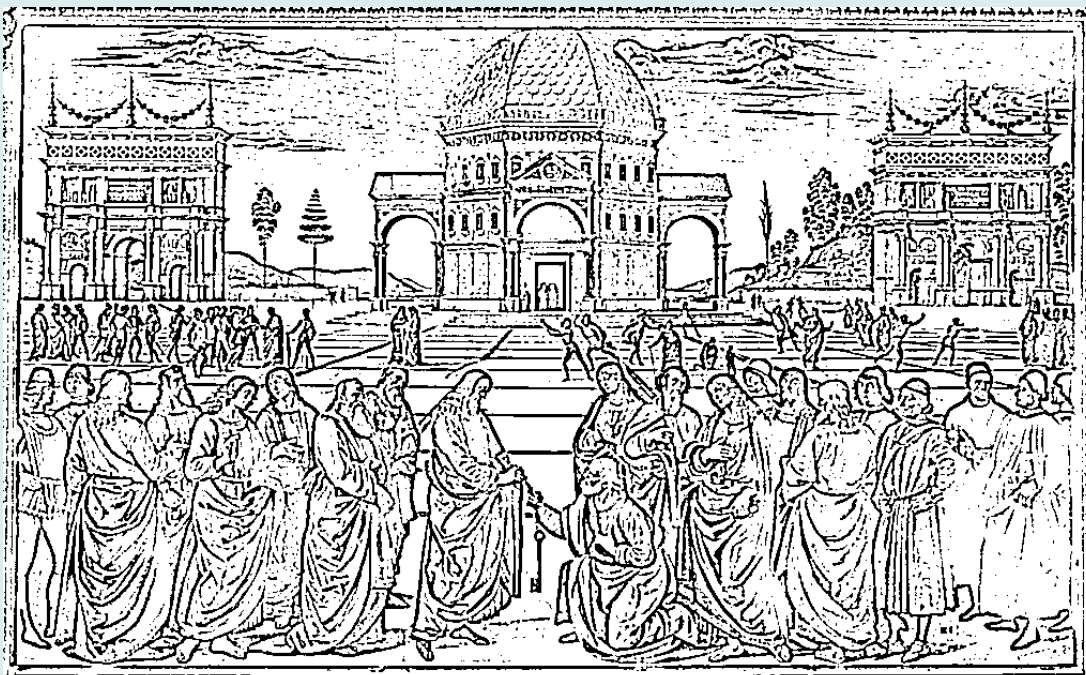


Fig. 16 – Le Christ remettant les clés à saint Pierre (1481-82), par Pietro Perugino
(Source: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PeruginoKeys.jpg>; Modifié par l'Auteur, 2019)

1.2. Regarde la figure 17. Observe les ressemblances avec les principes de la perspective linéaire dans l'image suivante. Souligne-les dans la version en noir et blanc (Fig. 18).

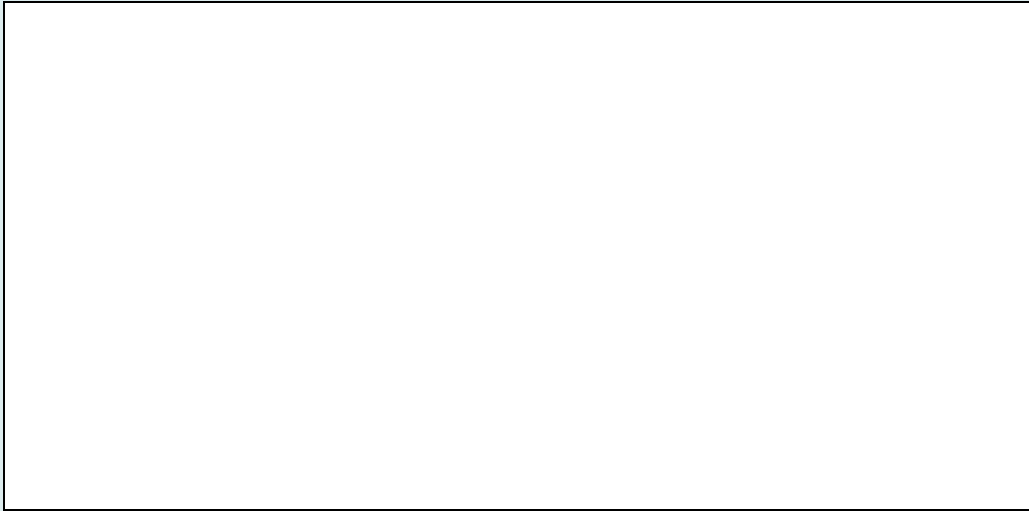


Fig. 17 – Rua 4, Espinho (2019) (Source: Auteur)



Fig. 18 – Rua 4, Espinho (2019) (Source: Auteur, 2019)

1.3. Trace une ligne d'horizon et définis ton point de fuite. Ensuite, trace trois cubes, chacun vu sous un angle différent. (Conseil : les objets dessinés au-dessus de l'horizon sont vus comme si on les voyait d'en dessous, les objets dessinés en dessous de l'horizon sont vus comme si on les voyait de dessus)



 **TÂCHE 2**

Colorie le paysage suivant en utilisant la perspective aérienne. (conseil : utilise des couleurs plus foncées au premier plan, des tons moyennement foncés au centre et une couleur bleue qui s'estompe à l'arrière-plan).

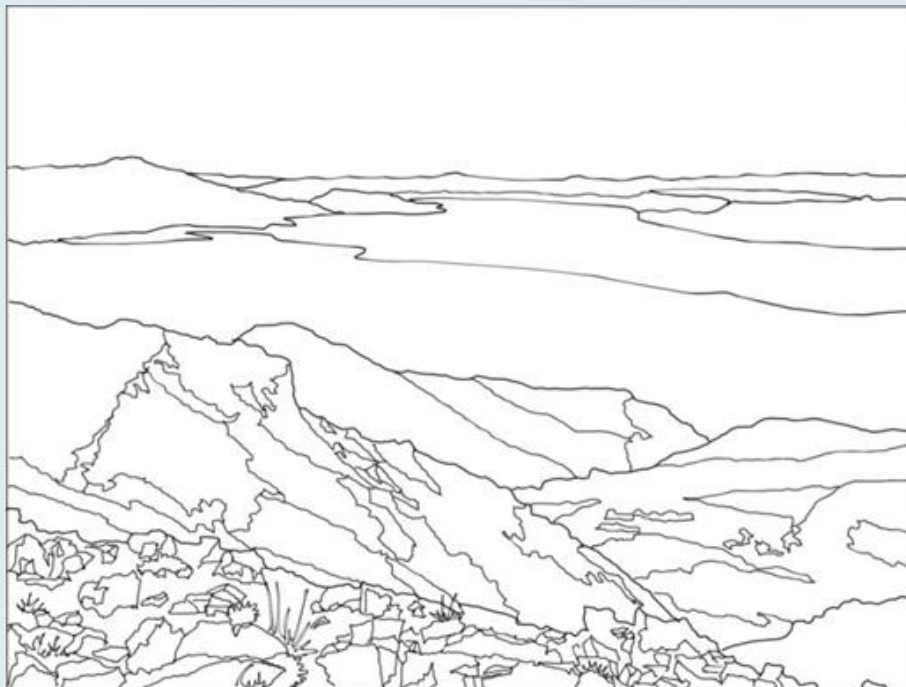


Fig. 19 – Toile pour l'entraînement à la perspective aérienne, par Erica Christensen
 (Source: <https://concepts.app/s/5aa9aa3c-529b-4875-91d3-e1a2366d299b>)

TÂCHE 3

La perspective peut être représentée dans les illustrations par l'utilisation de la perspective linéaire ou aérienne.

Indique, parmi les tableaux suivants, ceux qui représentent le mieux la Perspective aérienne, la Perspective linéaire, les deux, ou aucune.



Fig. 20 – "L'appel des apôtres Pierre et André" (1370), par Lorenzo Veneziano, au Staatliche Museum. (Source: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:15_Lorenzo_Veneziano,_Calling_of_the_Apostles_Peter_and_Andrew,_1370_Staatliche_Museen,_Berlin.jpg)



Fig. 21 – "Mona Lisa (1503), par Léonard de Vinci (Source: https://pt.wikipedia.org/wiki/Mona_Lisa)



Fig. 22 – "La guérison de l'infirme et l'élévation de Tabatha" (1424), par Masolino da Panicale

(Source: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cappella_branca,_Guarigione_dello_storpio_e_resurrezione_di_Tabitha_\(restaurato\),_Masolino.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cappella_branca,_Guarigione_dello_storpio_e_resurrezione_di_Tabitha_(restaurato),_Masolino.jpg))

TÂCHE 4

En utilisant la formule d'Euler $s - a + f = 2$ (où s = sommets, a = arêtes et f = faces), remplis le tableau suivant:

Solide de Platon	Nombre de faces (f)	Nombre de sommets (s)	Nombre d'arêtes (a)	a + 2	f + s
Hexaèdre	6	8	12	14	14
Tétraèdre					
Octaèdre					
Dodécaèdre					
Isocaèdre					

TÂCHE 5

Voici des polyèdres et leur développement :

5.1 Quel hexaèdre correspond à chaque développement ?

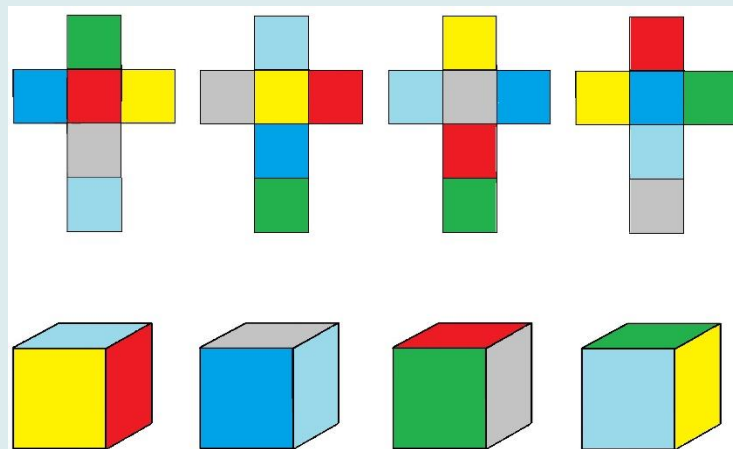


Fig. 23 – Développement d'un Cube (Source: Auteur)

5.2 Entoure les développements qui correspondent à un polyèdre de Platon:

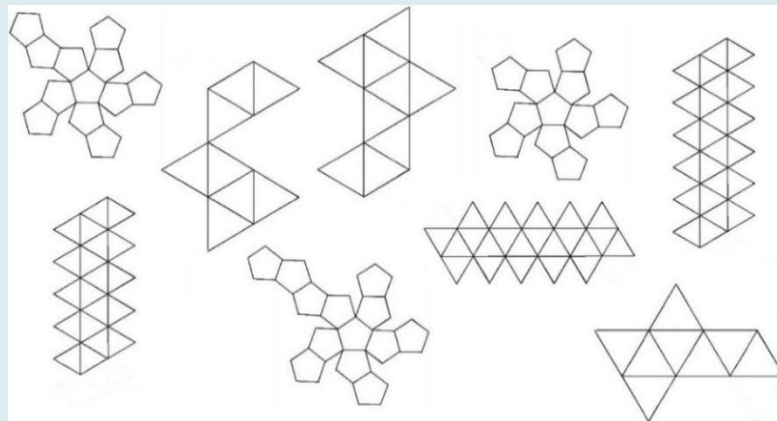


Fig. 24 – Développement de polyèdres (Source: Auteur)

POUR EN SAVOIR PLUS...

L'histoire des polyèdres en Grèce (Anglais)

<http://web.iyte.edu.tr/~gokhankiper/Polyhedra/Greeks.htm>

Polyèdres virtuels, par George W. Hart (Anglais)

<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html>

Vidéo interactive sur la perspective linéaire (Anglais)

<https://www.khanacademy.org/humanities/renaissance-reformation/early-renaissance1/beginners-renaissance-florence/a/linear-perspective-interactive>

Présence de la perspective linéaire dans les peintures à travers les époques (Anglais)

<http://headforart.com/2016/07/01/linear-perspective/>

Dessiner les polyèdres en 1 perspective (Anglais)

<https://www.studentartguide.com/wp-content/uploads/2015/02/perspective-drawing.pdf>

Polyèdres de Léonard de Vinci (Anglais)

<https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/leonardo.html>

Perspective aérienne (Anglais)

<https://www.exploring-landscape-painting.com/colour-perspective.html>

La formule du polyèdre d'Euler, par Abigail Kirk (Anglais)

<https://plus.maths.org/content/eulers-polyhedron-formula>