

PARTIE V: Littérature & Mathématiques

ÂGE : 16-18



OUTIL 49 : LES SECTIONS CONNIQUES DANS « ALICE AU PAYS DES MERVEILLES » DE LEWIS CARROLL

LogoPsyCom



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : Les mathématiques dans « Alice au pays des merveilles » de Lewis Carroll (1865)

Âge : 16-18 ans

Durée : 3 heures

Concepts Mathématiques : Géométries euclidiennes et non euclidiennes, sections coniques.

Concepts Artistiques : L'analyse littéraire, le roman, les métaphores.

Objectifs Généraux : Découvrir les concepts mathématiques présentés dans le livre et apprendre à construire un raisonnement mathématique dans la vie quotidienne.

Instructions et Méthodologies : Les élèves exploreront les mathématiques à travers la littérature. Ils pourront les appliquer à des situations réelles. Votre classe découvrira différents concepts mathématiques pour apprendre les sections coniques.

Ressources : Cet outil est illustré de photos et de vidéos. Les thèmes abordés dans ces ressources vous aideront à trouver d'avantages de matériels pour personnaliser et nuancer votre leçon.

Conseils pour l'éducateur : L'apprentissage par la pratique est très efficace, en particulier pour les jeunes apprenants ayant des difficultés d'apprentissage. Expliquez toujours l'utilisation pratique de chaque concept mathématique.

Compétences et Résultats ciblés : À la fin de cet outil, l'élève sera capable de :

- Comprendre la différence entre la géométrie euclidienne et non euclidienne ;
- Comprendre ce que sont les sections coniques ;
- Utiliser une équation quadratique pour dessiner le graphe d'une fonction.

Compte-rendu et Évaluation :

| | |
|--|----------------|
| Écrivez trois aspects que vous avez aimé dans cette activité | 1. 2. 3. |
| Écrivez deux choses que vous avez apprises : | 1. 2. |
| Écrivez un aspect à améliorer | 1. |

Introduction

La lecture peut nous aider à comprendre le monde qui nous entoure d'une façon que nous ne soupçonnons pas. Les livres sont donc des ressources précieuses qui permettent aux apprenants d'explorer de nouveaux sujets et concepts cachés dans l'histoire.

Certains auteurs utilisent les mathématiques dans leurs intrigues et bien que les élèves ne se penchent pas particulièrement dessus, de les avoir rencontrées dans leurs lectures les rend plus susceptibles de comprendre par la suite le sujet en question.

Voir les personnages réfléchir à des problèmes et des concepts mathématiques donne envie au lecteur de comprendre ces concepts et de résoudre ces problèmes avec eux. Il s'agit de la même démarche que lorsque les lecteurs essaient de deviner la fin d'une histoire. Ici, ils apprendront de nouvelles choses simplement en suivant les aventures des personnages.

Par conséquent, enseigner aux élèves les mathématiques qui se cachent derrière certains livres bien connus peut être une grande valeur ajoutée à un cours de mathématiques. Et cela en offrant aux apprenants une expérience plus immersive des utilisations possibles des mathématiques.

“Alice au pays des merveilles” de Lewis Carroll

1. Résumé

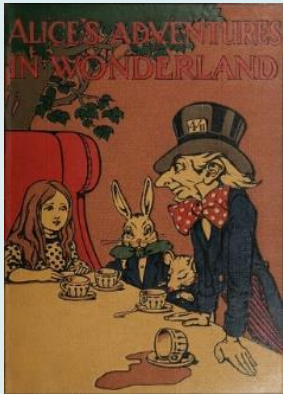


Figure 1: Première de couverture d'« Alice au pays des merveilles »

Ce roman écrit par Lewis Carroll en 1865 raconte l'histoire d'une petite fille de sept ans, Alice, qui tombe dans un terrier de lapin et qui arrive au Pays des Merveilles. C'est un lieu imaginaire avec des gens bizarres et des animaux qui parlent. Elle va d'un endroit à l'autre, changeant de taille et de forme et vit des aventures inattendues. Vous connaissez peut-être mieux son adaptation en dessin animé par Disney.

2. Le Contexte

Avant d'aller plus loin dans l'histoire, il est important de connaître le contexte dans lequel ce roman a été écrit. L'auteur s'appelait Charles Lutwidge Dodgson (il a utilisé Lewis Carroll comme pseudonyme). Il était professeur de mathématiques au Christ Church College d'Oxford et était un mathématicien très conservateur. Il a basé toutes ses connaissances mathématiques sur les "Éléments" d'Euclide. Au cours du XIXe siècle, les mathématiques ont évolué et de nouvelles théories ont vu le jour. Par exemple, l'algèbre abstraite et les "nombres imaginaires" ont émergé à cette époque. Afin de montrer l'absurdité de ces nouvelles mathématiques, il a utilisé des métaphores tout au long de l'histoire d'Alice.

3. La scène de la Chenille

Dans cette scène, Alice a changé de taille plusieurs fois en mangeant des champignons magiques. Elle rencontre une chenille qui fume un narguilé. Le mot "algèbre" vient de l'arabe "al jebr e al mokabala" qui signifie "restauration et réduction". C'est exactement ce que fait Alice lorsqu'elle mange un champignon. En espérant retrouver sa taille d'origine elle rétrécit de près de 3m à 8cm. Cette scène donne le ton des aventures

suivantes, car Alice devra manger la quantité exacte de champignons nécessaire pour trouver l'équilibre et conserver la taille et les proportions de son corps.

4. La scène du poivre et du porc

Dans cette scène, Alice est dans la cuisine de la duchesse et tout le monde commence à éternuer parce que le cuisinier a ajouté trop de poivre à sa préparation. La duchesse confie son bébé à Alice. Le bébé se transforme alors lentement en porc, ce dont Alice se rend compte lorsqu'elle entend le bébé grogner au lieu d'éternuer. Cette scène montre l'absurdité de la géométrie projective. La géométrie projective permet d'étudier si les propriétés d'une forme peuvent rester les mêmes lorsque la forme est projetée sur une autre surface, à condition que cette même forme conserve ses propriétés de base. L'auteur utilise une technique euclidienne appelée "reductio ad absurdum" pour dire que "si la règle fonctionne pour un triangle, elle devrait aussi fonctionner pour un bébé. CQFD". Le bébé conserve certaines de ses propriétés de base, étant toujours rose et rondouillard, c'est pourquoi Alice ne se rend compte de la métamorphose que lorsqu'il se met à grogner.



EXTRAIT:

“La Duchesse était assise sur un tabouret à trois pieds, au milieu de la cuisine, et dorlotait un bébé ; la cuisinière, penchée sur le feu, brassait quelque chose dans un grand chaudron qui paraissait rempli de soupe.

« Bien sûr, il y a trop de poivre dans la soupe, » se dit Alice, tout empêchée par les éternuements.

Il y en avait certainement trop dans l'air. La Duchesse elle-même éternuait de temps en temps, et quant au bébé il éternuait et hurlait alternativement sans aucune interruption. Les deux seules créatures qui n'éternuassent pas, étaient la cuisinière et un gros chat assis sur l'âtre et dont la bouche grimaçante était fendue d'une oreille à l'autre.

« Pourriez-vous m'apprendre, » dit Alice un peu timidement, car elle ne savait pas s'il était bien convenable qu'elle parlât la première, « pourquoi votre chat grimace ainsi ? »

« C'est un Grimaçon, » dit la Duchesse ; « voilà pourquoi. — Porc ! »

Elle prononça ce dernier mot si fort et si subitement qu'Alice en frémit. Mais elle comprit bientôt que cela s'adressait au bébé et non pas à elle [...]

Et là-dessus elle recommença à dorloter son enfant, lui chantant une espèce de chanson pour l'endormir et lui donnant une forte secousse au bout de chaque vers.

« Grondez-moi ce vilain garçon !
Battez-le quand il éternue ;
À vous taquiner, sans façon
Le méchant enfant s'évertue. »

Refrain

(que reprirent en chœur la cuisinière et le bébé).

« Brou, Brou, Brou ! » (bis.) [...]

« Tenez, vous pouvez le dorloter si vous voulez ! » dit la Duchesse à Alice : et à ces mots elle lui jeta le bébé. « Il faut que j'aie m'apprêter pour aller jouer au croquet avec la Reine. » Et elle se précipita hors de la chambre. La cuisinière lui lança une poêle comme elle s'en allait, mais elle la manqua tout juste.

Alice eut de la peine à attraper le bébé. C'était un petit être d'une forme étrange qui tenait ses bras et ses jambes étendus dans toutes les directions ; « Tout comme une étoile de mer, » pensait Alice. La pauvre petite créature ronflait comme une machine à vapeur lorsqu'elle l'attrapa, et ne cessait de se plier en deux, puis de s'étendre tout droit, de sorte qu'avec tout cela, pendant les premiers instants, c'est tout ce qu'elle pouvait faire que de le tenir. [...]

« Si je n'emporte pas cet enfant avec moi, » pensa Alice, « ils le tueront bien sûr un de ces jours. Ne serait-ce pas un meurtre de l'abandonner ? » Elle dit ces derniers mots à haute voix, et la petite créature répondit en grognant (elle avait cessé d'éternuer alors). « Ne grogne pas ainsi, » dit Alice ; « ce n'est pas là du tout une bonne manière de s'exprimer. »

Le bébé grogna de nouveau. Alice le regarda au visage avec inquiétude pour voir ce qu'il avait. Sans contredit son nez était très-retroussé, et ressemblait bien plutôt à un groin qu'à un vrai nez. Ses yeux aussi devenaient très-petits pour un bébé. Enfin Alice ne trouva pas du tout de son goût l'aspect de ce petit être. « Mais peut-être sanglotait-il tout simplement, » pensa-t-elle, et elle regarda de nouveau les yeux du bébé pour voir s'il n'y avait pas de larmes. « Si tu vas te changer en porc, » dit Alice très-sérieusement, « je ne veux plus rien avoir à faire avec toi. Fais-y bien attention ! »

La pauvre petite créature sanglota de nouveau, ou grogna (il était impossible de savoir lequel des deux), et ils continuèrent leur chemin un instant en silence.

5. La scène de la « Tea Party »

La scène du Thé chez le Chapelier fou tente de démontrer l'absurdité des travaux du mathématicien William Rowan Hamilton, dans lesquels il a expérimenté les quaternions, un système de nombres basé sur quatre termes. Les trois premiers termes représentent les trois dimensions et le quatrième est une unité extra-spatiale, le concept de Temps.

Le titre de ce chapitre est "tea-party", qui peut être lu comme "t-party", puisque "t" est le symbole mathématique du temps. Les trois invités de la fête du thé, le Chapelier fou, le Loir et le Lièvre de mars, représentent les trois termes initiaux. Le temps reste le quatrième et le Chapelier fou dit qu'ils se sont disputés et que maintenant le Temps ne fera plus rien



de ce qu'il demande. En conséquence, les trois invités sont maintenant obligés de tourner sur un plan autour de la table pour l'éternité. L'énigme du Chapelier "Pourquoi une pie ressemble-t-elle à un pupitre ?" n'a aucun sens, ce qui peut aussi refléter le fait que dans l'idée du temps pur de Hamilton, la cause et son effet ne sont plus liés. L'auteur a utilisé sa créativité pour démontrer l'absurdité des nouvelles théories mathématiques, qui selon lui ont créé un monde abusrd ?



Pour en savoir plus sur l'histoire du Temps, tu peux regarder cette vidéo TED-Ed (sous-titres en français disponibles) :

<https://www.youtube.com/watch?v=R3tbVHlsKhs>.

Glossaire

Pseudonyme : faux nom utilisé par un artiste, un auteur pour signer son œuvre.

Euclide (4ème - 3ème siècle avant J.-C.) : un mathématicien grec de l'Antiquité qui a établi les bases de la géométrie.

Algèbre Abstraite : une branche de l'algèbre qui étudie les structures algébriques.

Nombres Imaginaires : sont des nombres qui peuvent être écrits comme des nombres réels multipliés par l'unité imaginaire i , dont nous savons que $i^2 = -1$.

Par exemple, $ai = -a2$. Dans cette théorie, le zéro est à la fois imaginaire et réel.

Métaphore : c'est une figure de style qui nous permet de faire implicitement référence à quelque chose tout en parlant de quelque chose de différent mais en montrant explicitement la similitude que nous voulons souligner.

Ex : être à la pêche aux compliments : la personne ne pêche pas littéralement, mais nous pouvons utiliser cette image comme une métaphore.

Narguilé : une pipe orientale qui possède un long tuyau qui permet d'aspirer la fumée d'un bol rempli d'eau.

Reductio ad absurdum (latin) : signifie "réduction jusqu'à l'absurdité" et c'est un argument utilisé dans la logique pour montrer qu'une déclaration est ridicule et ne peut être prise au sérieux.

QED (latin) : "Quod erat demonstrandum" équivaut à « CQFD » en français "ce qu'il fallait démontrer" qui est souvent utilisé à la fin des démonstrations mathématiques ou philosophiques.

Quaternions : est un système de nombres qui prolonge les nombres complexes. Une de leurs caractéristiques est que la multiplication de deux quaternions n'est pas commutative.

Les maths dans « Alice au pays des merveilles »

Nous allons aborder la géométrie euclidienne et non euclidienne, ce qui te permettra de comprendre ce avec quoi l'auteur était d'accord et ce qu'il trouvait complètement absurde.

Géométrie euclidienne et non euclidienne

1. Géométrie euclidienne

La géométrie euclidienne est celle que nous apprenons le plus. Euclide était le "père de la géométrie" et a rédigé tous ses postulats, définitions et notions communes dans ses livres "Eléments". Son cinquième postulat a fait émerger quelques réflexions chez d'autres mathématiciens de renom tout au long de l'histoire. Euclide a basé sa géométrie sur la distance et les angles, ce qui ne sera pas le sujet dans les études suivantes sur la géométrie.

10



Vidéo TED-Ed sur la géométrie euclidienne et non euclidienne (sous-titres en français disponibles) :

https://www.youtube.com/watch?v=LPET_HhN0VM

2. Géométrie projective non euclidienne :

La géométrie projective est utilisée dans les géométries non euclidiennes telles que les géométries elliptiques et hyperboliques. Elle se concentre sur la projection de formes sur d'autres surfaces et indique **qu'une forme peut se plier ou s'étirer en une autre si elle conserve ses propriétés de base**. Cela suppose que le cinquième postulat d'Euclide soit erroné.

La courbure de la surface sur laquelle les formes sont projetées est en majeure partie de ce qui rend les géométries non euclidiennes différentes de la géométrie

euclidienne. La perspective, par exemple, est l'un des résultats de ce raisonnement. Les mathématiciens ont étudié les propriétés des formes projetées afin de voir si elles restaient les mêmes avec la perspective.

Exemple de deux lignes parallèles :



Figure 2: Image d'une route du point de vue du spectateur

Selon la géométrie euclidienne, deux lignes parallèles ne devraient jamais se rencontrer, mais lorsqu'elles sont regardées en perspective ou projetées sur une autre surface, ces lignes semblent se rencontrer à l'horizon, en un point quelconque de **l'infini**. Avec le concept de l'infini, nous sommes confrontés à une géométrie qui ne tient pas compte des angles et des distances des formes.

Les Sections coniques

Lorsque l'on coupe un cône selon plans, on obtient des formes différentes.

Regardons l'image suivante :

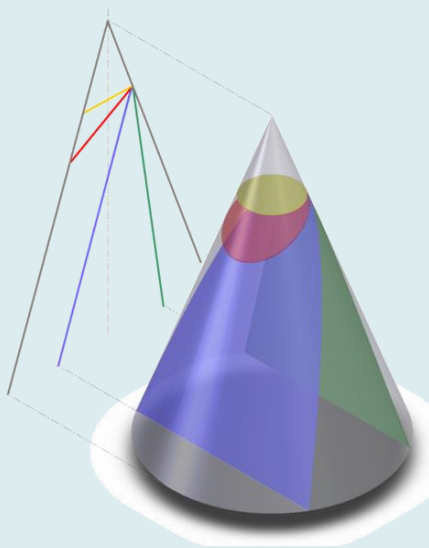


Figure 3: Représentation d'une section conique

Comme on peut le constater, en tranchant le cône avec un plan défini, on obtient différentes formes.

- En **Jaune** : on tranche le cône horizontalement et on obtient un **cercle**.
- En **Rouge** : on le tranche avec un léger angle (de biais), et on obtient une **ellipse**.
- En **Bleu** : on le tranche en diagonal et en parallèle à l'un de ses côtés et on obtient une **parabole**.
- En **Vert** : on tranche en angle aigu l'un des côtés du cône et on obtient une **hyperbole**.

On peut aussi utiliser un point (Foyer) et une ligne droite (directrice) pour définir ces courbes

Mesurer la distance:

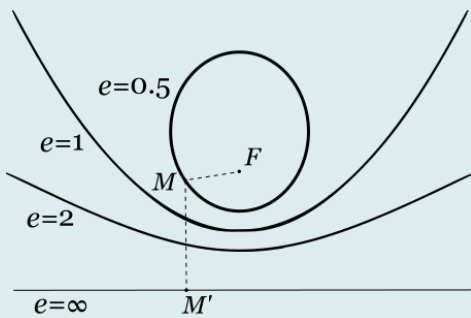


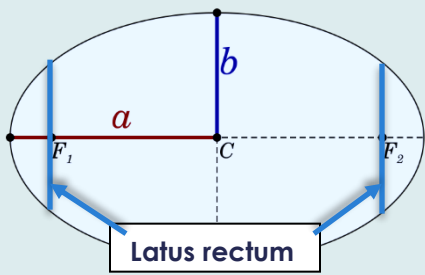
Figure 4 "Eccentricidad" de Seahen (CC BY-SA 3.0)

- Du foyer (F) jusqu'à un point sur la courbe (M)
- Perpendiculairement à la ligne directrice (M') à ce point (F), le rapport entre les deux distances reste le même
- Pour un cercle, le **rapport = 0**
- Pour une ellipse, **0 < rapport < 1**
- Pour une parabole, le **rapport = 1** (mêmes distances)
- Pour une hyperbole, le **rapport > 1**

Ce rapport est appelé **l'excentricité**, ce qui comprend :

"tous les points dont la distance au foyer est égale à l'excentricité multipliée par la distance à la directrice¹"

Le **Latus Rectum** est une ligne qui passe par le foyer et est parallèle à la directrice.



- Elle est 4 fois plus longue que la distance focale des paraboles
- C'est le diamètre des cercles
- Elle est $\frac{2b^2}{a}$ dans une ellipse où a et b sont la **moitié du diamètre majeur (a) et mineur (b)**.

¹ <https://www.mathsisfun.com/geometry/conic-sections.html>

Rappelons quelques équations pour chacune de ces courbes :

1. L'Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Le Cercle (avec $a = b$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{et donc, } x^2 + y^2 = a^2$$

Notons ici que le cercle est une ellipse pour laquelle le diamètre ne varie pas.

3. L'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4. La Parabole

$$y^2 = 4ax \quad \text{with } a > 0$$

On peut établir une formule générale pour chacune de ces courbes puisque, même si elles ont été découpées dans un solide, elles appartiennent maintenant à la géométrie plane et on peut trouver leurs coordonnées cartésiennes.

Cependant, comme elles sont courbes et n'ont pas de lignes droites, nous ne pouvons pas utiliser uniquement x et y dans cette équation.

Nous aurons donc besoin :

- x et y
- x^2 et y^2
- xy
- une constante
- des variables pour chacun



Les graphiques d'équations quadratiques à deux variables représentent toujours une section conique. Voici leur équation générale :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

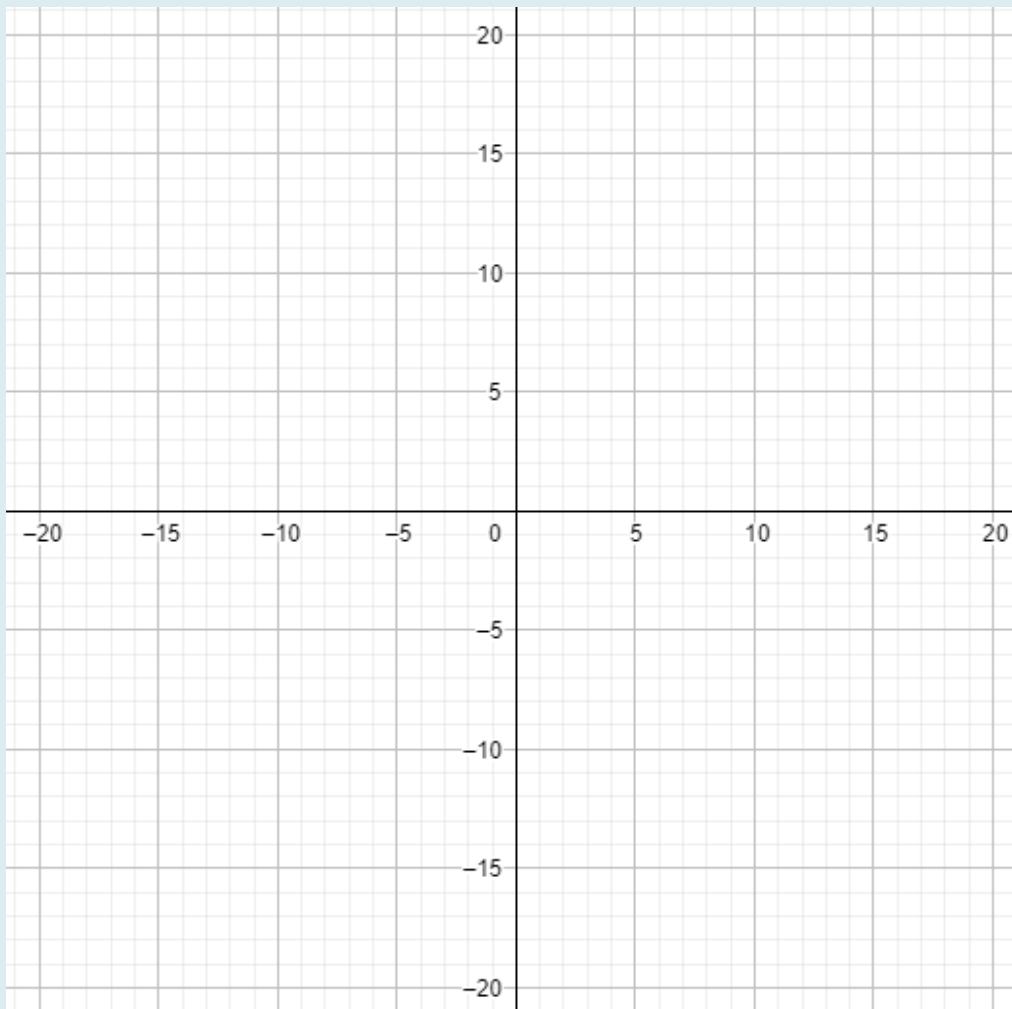
Rappelons-nous que tous les coefficients de cette équation doivent être des nombres réels et que A, B et C ne peuvent pas être tous égaux à zéro.



Et maintenant quelques exercices pour mettre ces formules en pratique !

1. Trouvez l'équation de la parabole qui a son sommet en (0;0) et son foyer en (-5;0)

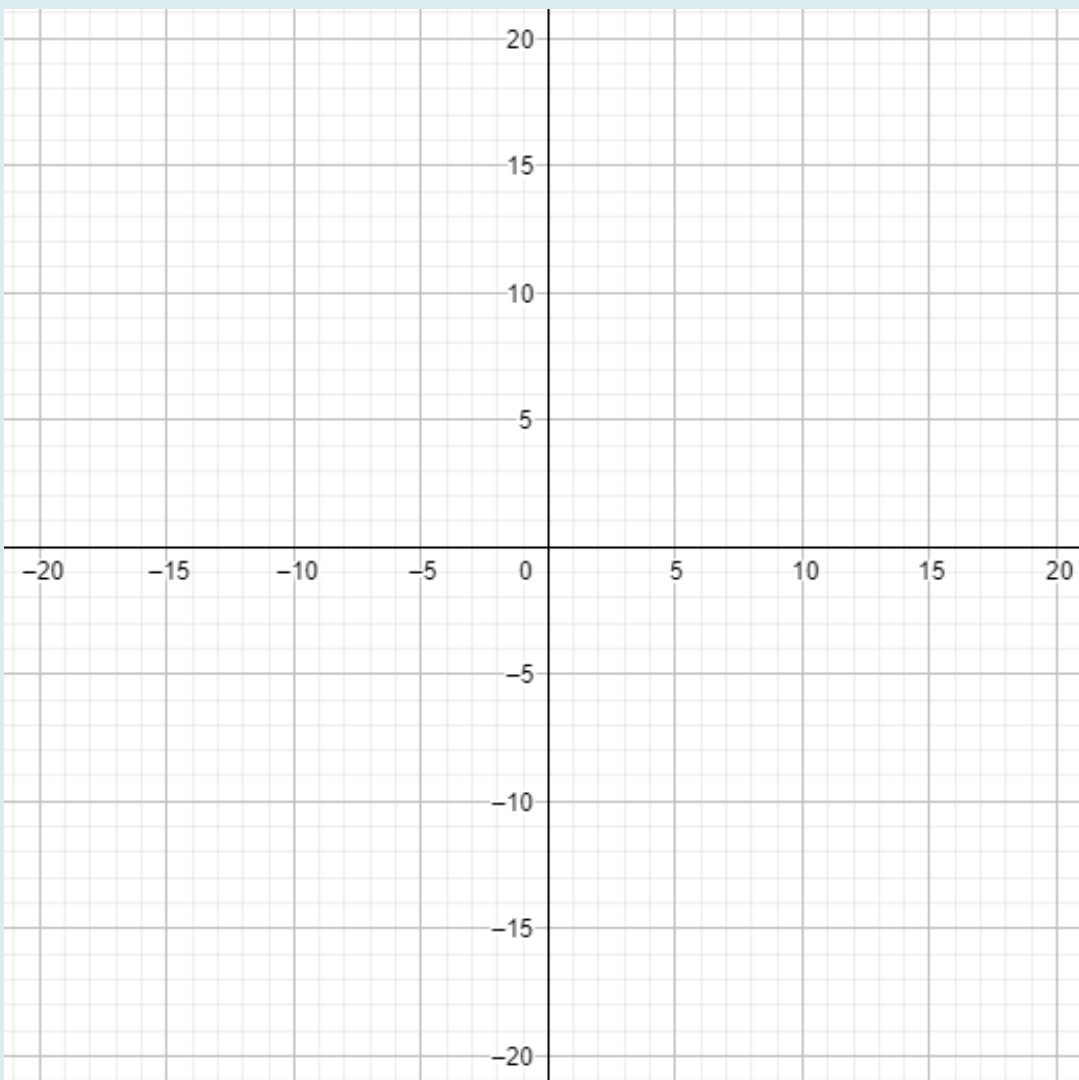
2. Dessine-le sur l'axe suivant :





3. Trouve le centre et le rayon de ce cercle : $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$

4. Dessine le cercle sur l'axe suivant :



TÂCHE

Souris comme le Chat du Cheshire :

Au pays des merveilles, Alice rencontre un étrange chat qui disparaît peu à peu, ne laissant de visible que son sourire. Ce sourire ne te rappelle-t-il pas une forme dont nous venons d'apprendre l'existence ?



Figure 5: Illustrations du livre "Alice au pays des merveilles de Lewis Carroll

Sur la première photo, on voit très clairement sa tête, mais il semble n'avoir aucun corps. Sur la deuxième, on peut voir qu'il disparaît dans le feuillage de l'arbre. Son visage et son sourire sont toujours visibles, et son menton semble reposer sur une des branches de l'arbre.



1. Dessine la directrice, le foyer et la courbe sur l'image :



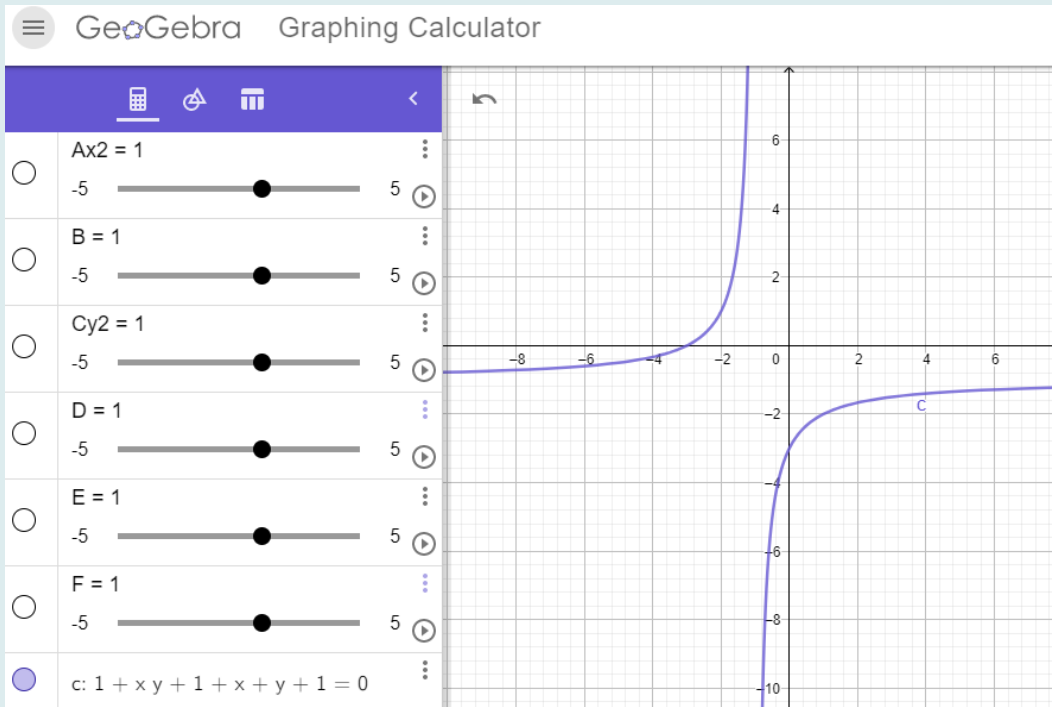
2. Réponds aux questions suivantes :

a) Quelle courbe as-tu trouvée ?

b) Pourquoi penses-tu que l'auteur a donné au chat cette capacité d'apparaître et de disparaître quand il en a envie ?

3. Utilise le logiciel [Geogebra](#) pour dessiner les formes plus facilement :

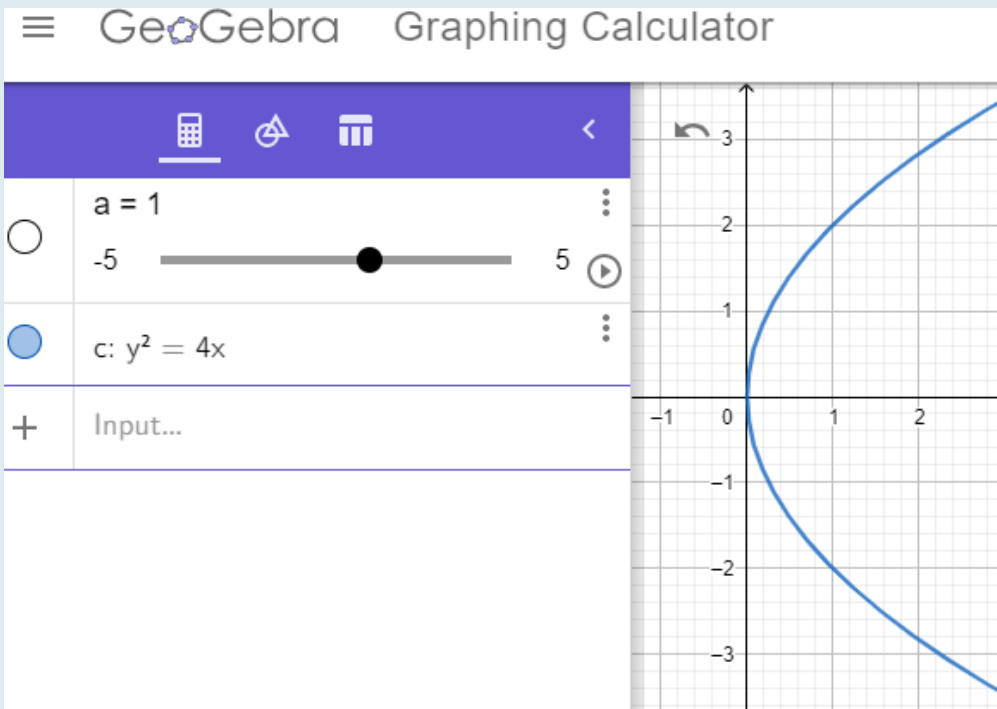
Si tu renseignes l'équation générale sur Geogebra, tu observeras ceci :



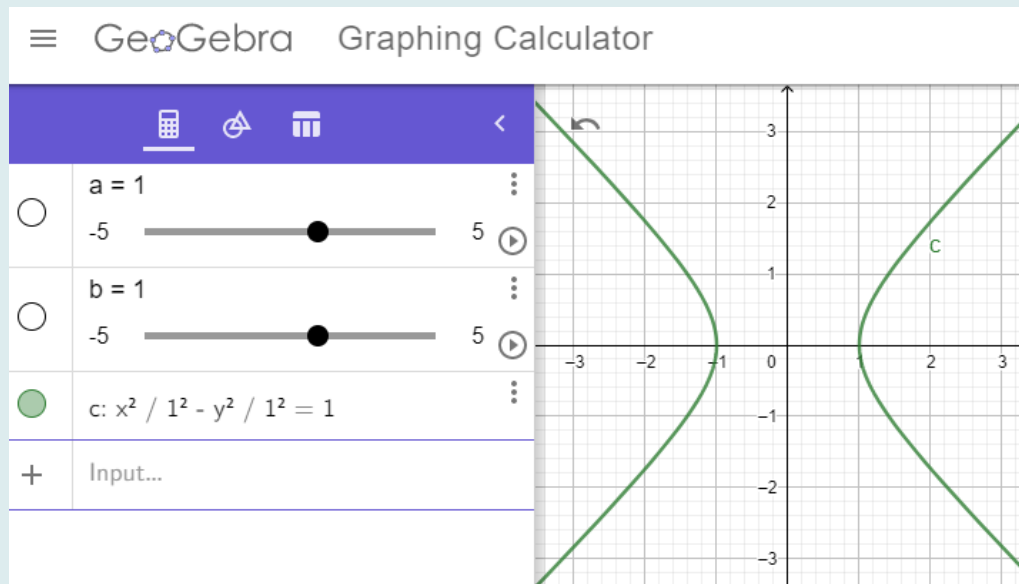
Clique sur le bouton PLAY et regarde ce qu'il se passe 😊

Et maintenant, écris la formule correspondante pour obtenir une parabole dans le programme :

6



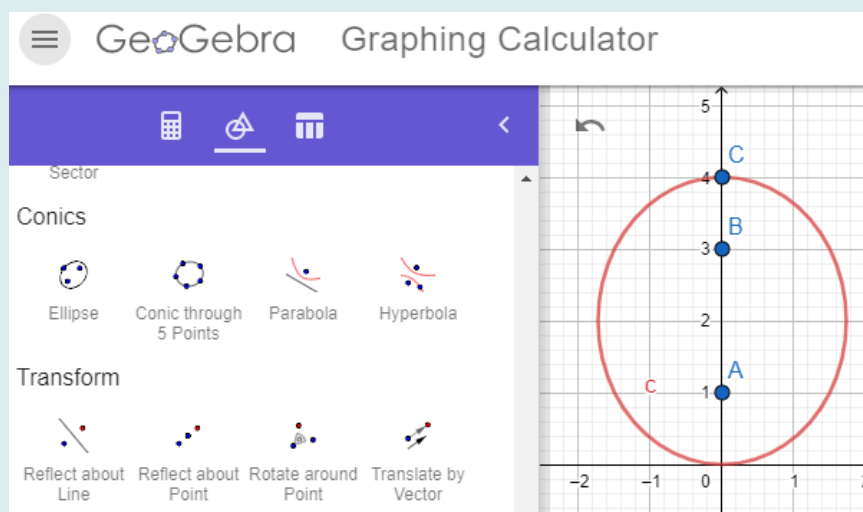
Essaye avec la formule de l'hyperbole :



Tu peux également créer tes propres formes et obtenir leurs coordonnées et équations :

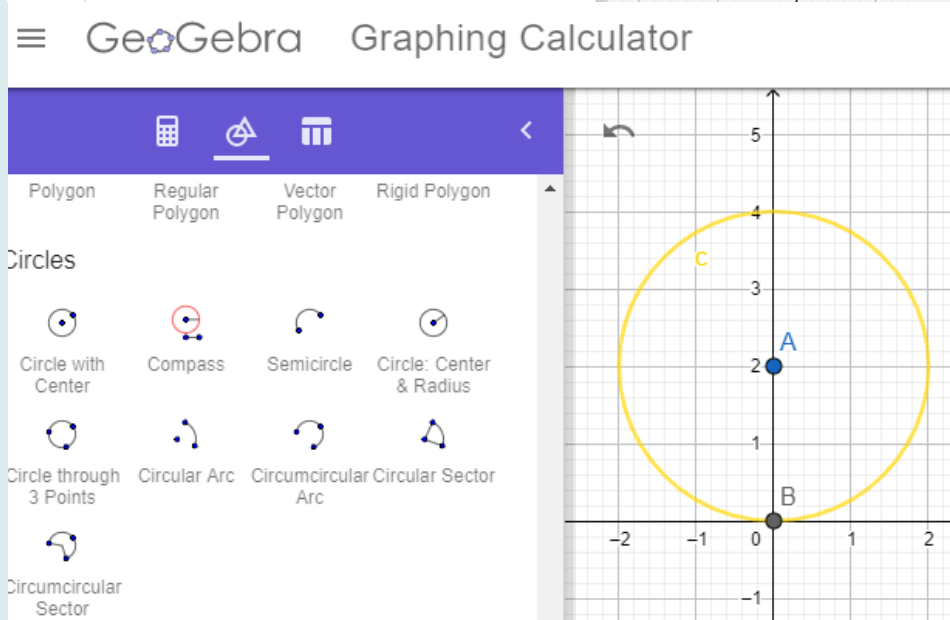
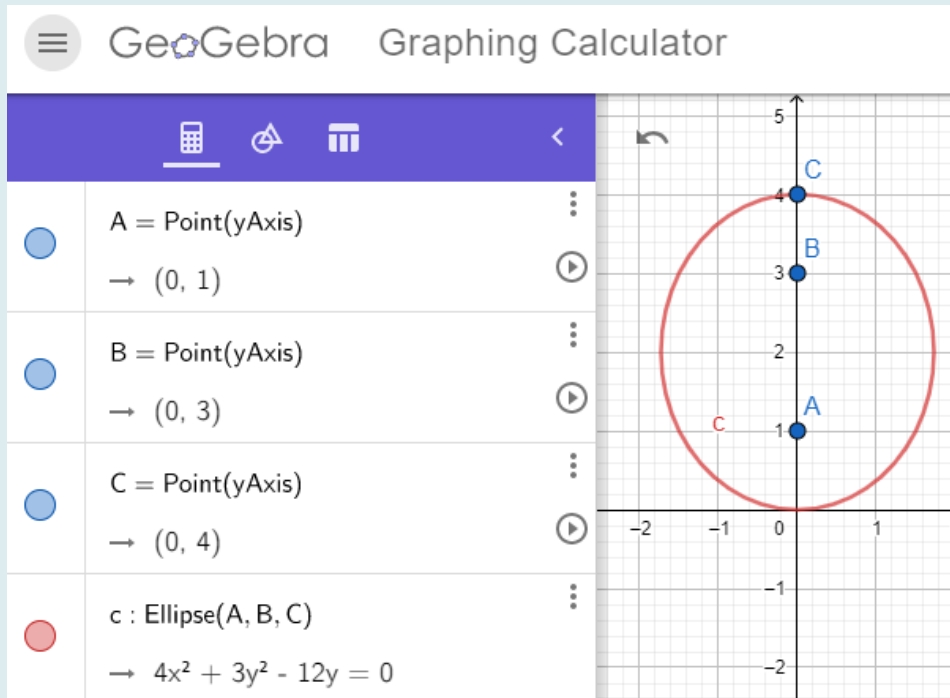
- Pour l'Ellipse :

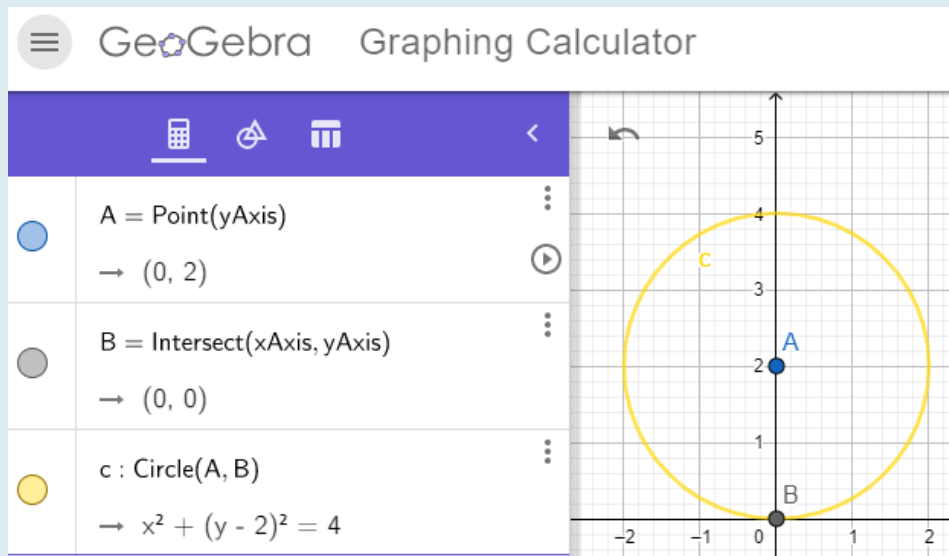
Cet outil te permet de dessiner l'ellipse de ton choix là où tu le souhaites sur le graphique :




Dans cette partie, tu peux voir quelles sont les coordonnées et les équations de l'ellipse que tu as réalisée :

- Pour le cercle





Lorsque tu cliques sur les boutons "play", tu pourras constater que la figure peut se plier, s'étirer et se rétracter pour constituer d'autres figures.

 C'est ainsi que certains mathématiciens en sont arrivés à la conclusion qu'une forme peut se plier et s'étirer pour devenir une autre forme si elle conserve ses propriétés de base, tout comme le bébé de la duchesse qui s'est transformé en porc !

POUR EN SAVOIR PLUS...

Les mathématiques d'Alice au pays des merveilles (en anglais)

<http://www.massline.org/ScottH/science/MathOfAliceInWonderland-100308.pdf>

L'algèbre dans Alice au pays des merveilles (en anglais)

<https://www.newscientist.com/article/mg20427391-600-alices-adventures-in-algebra-wonderland-solved/>

Les mathématiques cachées dans Alice au pays des merveilles (en anglais)

https://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_03_10.html

La Géométrie Projective (en anglais)

<https://www.britannica.com/science/projective-geometry>

Les postulats d'Euclide dans « Les Eléments » (sous-titres français disponibles)

[:https://www.youtube.com/watch?v=LPET_HhNOVM](https://www.youtube.com/watch?v=LPET_HhNOVM)

Histoire de la géométrie non euclidienne - partie 1 (sous-titres français disponibles) :

<https://www.youtube.com/watch?v=nkvVR-sKJT8>

Histoire de la géométrie non euclidienne - partie 2 (sous-titres français disponibles) :

<https://www.youtube.com/watch?v=vUWKMo5scKY>

Histoire de la géométrie non euclidienne - partie 3 (sous-titres français disponibles) :

<https://www.youtube.com/watch?v=H74AayZkpXg>