

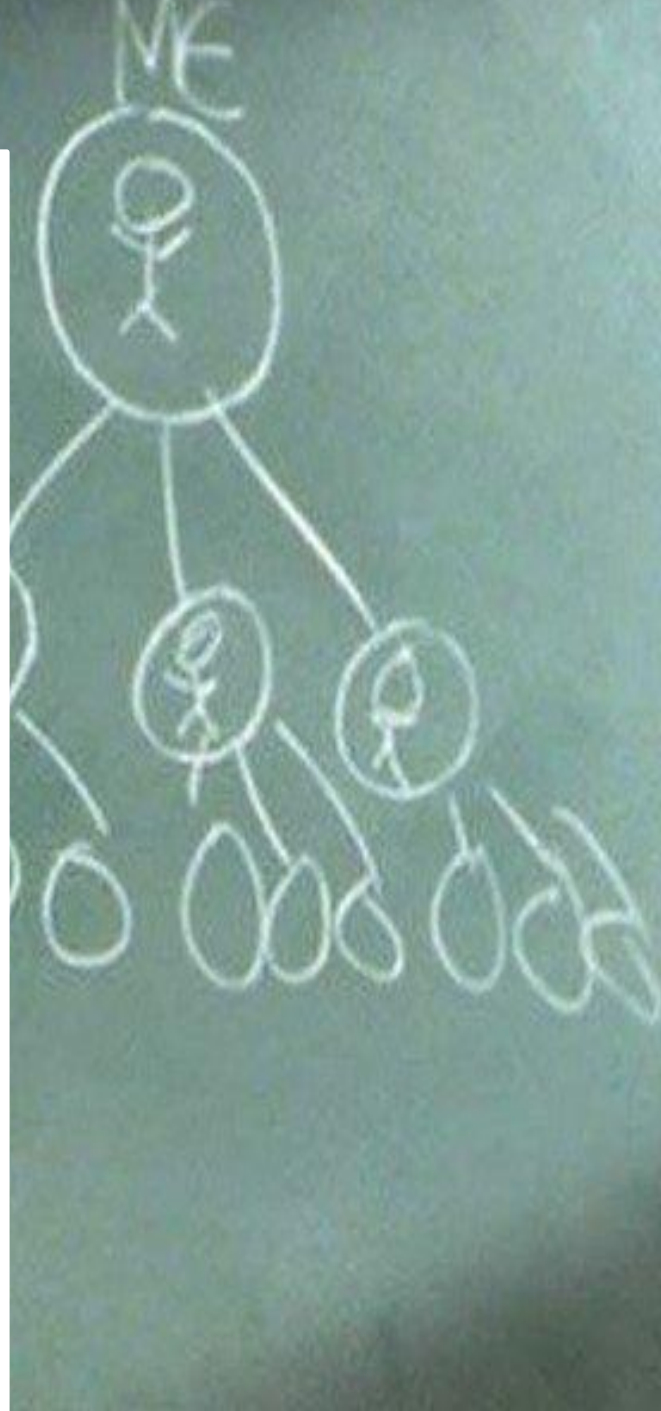
# PARTIE IV : Cinématographie & Mathématiques

ÂGE : 16 – 18 ans

---

(Source: <https://cinemaplanel.pt/pay-it-forward-book-acao-vez/>)

Pay It Forward Infographic.



## OUTIL 39 : CROISSANCE EXPONENTIELLE DANS LE FILM "UN MONDE MEILLEUR"

---

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino



Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

## Educator's Guide

**Titre** : Croissance exponentielle dans le film "Un monde meilleur"

**Âge** : 16 –18 ans

**Durée** : 2 heures

**Concepts Mathématiques** : Exposant, Fonctions exponentielles, Croissance exponentielle, Décroissance exponentielle

**Concepts Artistiques** : Modèle exponentiel

**Objectifs Généraux** : étudier et analyser des exemples réels de croissance et de décroissance exponentielles ; représenter graphiquement des équations et des fonctions exponentielles.

**Instructions et Méthodologies** : Montrez la bande-annonce du film "Un monde meilleur" et proposez aux élèves de regarder le film complet à la maison.

**Ressources** : Un stylo et une calculatrice.

**Conseils pour l'éducateur** : Pour aider les élèves à comprendre les résultats des graphes, laissez-les proposer différentes valeurs et faire leurs représentations.

**Compétences et Résultats ciblés** : À la fin de cet outil, l'élève sera capable de :

- Reconnaître et résoudre des problèmes impliquant l'application de fonctions exponentielles, ainsi qu'une représentation graphique susceptible de représenter une fonction exponentielle ;
- Utiliser les règles des exposants pour travailler avec des fonctions exponentielles et en faire une représentation graphique.

### Compte-rendu et Évaluation :

Écrivez trois aspects que vous avez aimé dans cette activité	1. 2. 3.
Écrivez deux choses que vous avez apprises :	1. 2.
Écrivez un aspect à améliorer	1.

## Introduction

On trouve parfois des aspects liés aux mathématiques dans des séries télévisées ou des films. Dans ces cas-là, il arrive que ces concepts mathématiques n'aient pas beaucoup d'importance, car ils n'influencent pas l'histoire elle-même. Cependant, il y a quelques films dans lesquels c'est le cas.

En voici quelques exemples : "Las Vegas 21" (USA, 2008), de Robert Luketic ; "Proof" (USA, 2005), de John Madden ; "Un homme d'exception" (USA, 2001), de Ron Howard ; "Enigma" (USA, 2001), de Michael Apted ; "Pi" (USA, 1988), de Darren Aronofsky ; "Will Hunting" (USA, 1997), de Gus Van Sant et "Cube" (Canada, 1997), de Vincenzo Natali.

Dans cet outil, le film "Un monde meilleur" (USA, 2000), de Mimi Leder, sera abordé ainsi que ses concepts mathématiques, tels que la croissance exponentielle.

## Un Monde Meilleur

À la suite d'un devoir de classe de sciences sociales visant à changer le monde en mieux, Trevor McKinnney, un élève de 12 ans (joué par Haley Joel Osment), lance un mouvement qui consiste à faire une bonne action pour trois personnes qui, au lieu de rendre la pareille, doivent la "diffuser" en rendant service à trois autres personnes, et ainsi de suite.

Dans sa quête pour changer le monde, Trevor finit par déclencher une série d'événements qui peuvent être représentés comme un modèle exponentiel, ce qui signifie que ces mouvements répondent aux exigences nécessaires pour croître à un rythme exponentiel au fil du temps.

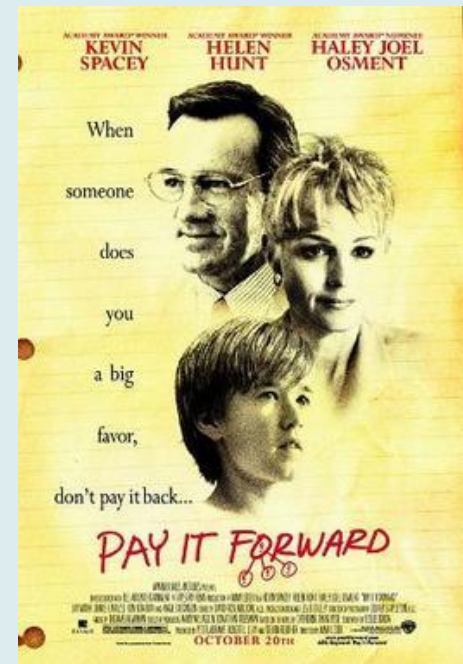


Fig. 1 – Affiche du film «Un Monde Meilleur» en anglais (2000)

(Source: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pay\\_It\\_Forward\\_\(film\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pay_It_Forward_(film)))

Le modèle exponentiel est associé à l'économiste britannique Thomas Robert Malthus (1766-1834), qui a été le premier à remarquer que toute espèce pouvait potentiellement croître selon une série géométrique. Les fonctions exponentielles dérivent de cette observation.

En mathématiques, les fonctions exponentielles sont des fonctions qui croissent par des facteurs communs sur des intervalles égaux. Cette croissance peut entraîner une augmentation ou une diminution de la valeur, qui est donc connue sous le nom de croissance exponentielle et de décroissance exponentielle, respectivement.

À long terme, la croissance ou la décroissance devient insoutenable, car les nutriments ou les ressources s'épuisent et la croissance/la décroissance s'arrête. Néanmoins, l'utilisation des fonctions exponentielles pour prédire un résultat est souvent utilisée dans des applications commerciales, scientifiques et sociologiques et peut être observée dans la nature elle-même.

## Glossaire

**Exposant** : l'opération puissance consiste à multiplier un élément  $a$  par lui-même «  $n$  » (l'exposant) fois de suite.

**Fonction exponentielle** : une fonction de la forme  $f(x) = a * b^x$ , dans laquelle le résultat change exponentiellement à mesure que  $x$  augmente.

**Croissance exponentielle** : un concept utilisé lorsqu'une valeur augmente proportionnellement à un taux constant sur une période.

**Décroissance exponentielle** : un concept utilisé lorsqu'une valeur décroît proportionnellement à un taux constant sur une période.

**Facteur** : un nombre qui, lorsqu'il est divisé par un autre nombre, donne un nombre pair - c'est-à-dire sans décimales.

# Les Maths dans « Un monde meilleur »

## 1. Fonctions Exponentielles

Les fonctions exponentielles sont caractérisées par une **valeur qui croît en fonction d'un facteur commun sur une période égale**, qu'il s'agisse d'une augmentation ou d'une diminution d'une certaine valeur.

Une fonction exponentielle est notée :

### Fonction Exponentielle

$$y = a^x$$

Où :

**a** = la **valeur initiale** avant de mesurer la croissance/la décroissance et est **> 0**

**x** = un exposant variable qui correspond au nombre d'intervalles de temps écoulés.

Dans le film "Un monde meilleur", Trevor lance un mouvement qui pourrait déclencher des actions qui tripleraient de façon exponentielle.

En regardant le tableau des valeurs ci-dessous, analysons le potentiel de cet impact en considérant que, pour chaque jour passé, chaque personne qui a été impliquée dans le mouvement poursuivra son processus en accomplissant une bonne action auprès de 3 autres personnes :

Jour	Nombre de personnes	Formule
1	$3 = 3$	$y = 3^1$
2	$9 = 3 \times (3)$	$y = 3^2$
3	$27 = 3 \times (3 \times 3)$	$y = 3^3$
4	$81 = 3 \times (3 \times 3 \times 3)$	$y = 3^4$
5	$243 = 3 \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$	$y = 3^5$

Le premier jour, Trevor fait 3 bonnes actions auprès de 3 personnes différentes ; le deuxième jour, chacune des 3 personnes fait 3 autres bonnes actions auprès de 3 autres personnes, soit un total de 9 ( $3 \times 3$ ). Le 5e jour, 243 personnes ( $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ) auront été impliquées. En d'autres termes, le montant triple chaque jour !

L'évolution de chaque changement peut ensuite être représentée par un graphe, comme suit :

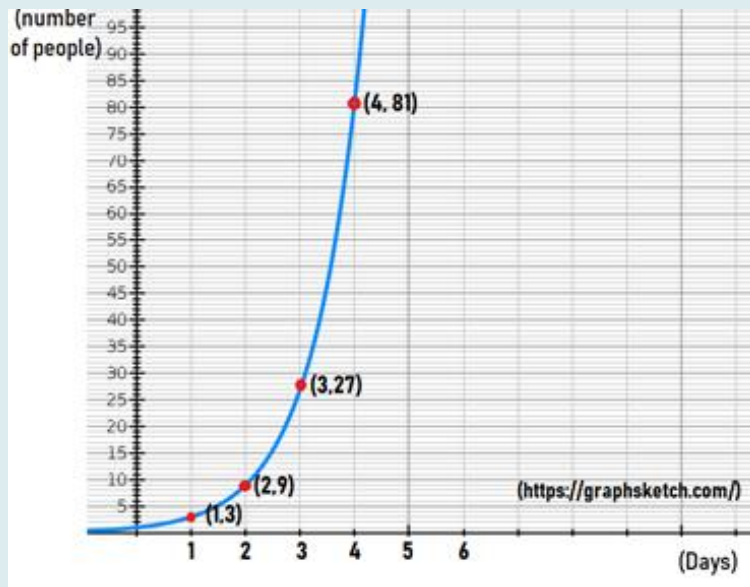


Fig. 2 – Estimation des personnes impliquées dans le mouvement de Trevor

(Source: Par l'Auteur sur graphsketch.com)

## Croissance et Décroissance Exponentielles

Nous avons vu que les fonctions exponentielles se développent par des facteurs communs. Cependant, si nous voulons introduire des décimales à la place, alors les fonctions de croissance exponentielle et de décroissance exponentielle doivent être évoquées :

**Croissance Exponentielle**

$$y = a(1 + r)^x$$

**Décroissance Exponentielle**

$$y = a(1 - r)^x$$

- Où :** **a** = la **valeur initiale** avant de mesurer la (dé)croissance;  
**r** = le **taux** constant auquel la valeur initiale va changer, généralement représenté en pourcentage et exprimé en décimale ;  
**x** = un exposant variable qui correspond au nombre d'intervalles de temps écoulés.
- Si :** **a > 0** et **r > 0**, il y a une croissance exponentielle;  
**a > 0** et **0 < r < 1**, il y a une décroissance exponentielle.

**La croissance exponentielle** est souvent utilisée pour prédire la croissance d'une population ou d'un composé d'intérêt. Par exemple, disons qu'il y a une population de 2579 personnes dans une petite ville voisine, et que chaque année il y a une croissance de 12%. **Combien de personnes y aurait-il au bout de 5 ans ?**

8

Commençons par modéliser la fonction en fonction de la question. Nous savons que :

- 1) 2579 est le point de départ ;
- 2) Il y a une croissance annuelle de 12% ou 0,12 ;

La fonction utilisée est donc  **$P(5) = 2579(1 + 0,12)^5$** , où "P(5)" correspond à la population dans 5 ans.

Calculons :

$$P(5) = 2579(1 + 0,12)^5 \Leftrightarrow P(5) = 2579(1,12)^5 \Leftrightarrow P(5) = 4545$$

Dans 5 ans, il y aura une population d'environ 4545 personnes.



Un autre contexte réel dans lequel les fonctions exponentielles sont appliquées est celui de la physique.

Les substances radioactives sont des atomes à noyau instable qui se désintègrent naturellement. Dans ce cas, la **décroissance exponentielle** est utilisée pour prédire combien de temps une substance restera ou durera après un certain temps.

Prenons un échantillon de 10 mg de la substance XYZ qui se décompose à raison de 0,3 % par an. **Quelle quantité de l'échantillon resterait-il après 8 ans ?**

Commençons par modéliser la fonction en fonction de la question. Nous savons que :

- 1) 10mg est notre point de départ ;
- 2) Il y a une décroissance annuelle de 0,3% ou 0,03 ;

La fonction utilisée est donc  **$P(8) = 10(1 - 0,03)^8$** , où "P(8)" correspond à la quantité qui restera après 8 ans.

Calculons :

$$P(8) = 10(1 - 0,03)^8 \Leftrightarrow P(8) = 10(0,97)^8 \Leftrightarrow P(8) = \sim 7,83$$

Dans 8 ans, il restera environ 7,83mg de la substance XYZ.

# TÂCHES

## TÂCHE 1

Les bactéries sont des microbes unicellulaires qui se reproduisent en se divisant en deux cellules.

Considérons une population de 20 cellules qui double toutes les minutes.

- 1.1) Crée un tableau de valeurs et détermine combien de cellules il y aurait dans une période de 4 heures.
- 1.2) Représente la progression sur un graphe.

## TÂCHE 2

Supposons que tu investisses 2000 euros à un taux d'intérêt mensuel de 1,5 %.

- 2.1) Quel serait ton solde après six mois ? Trouve la fonction de croissance exponentielle et calcule-la.

10

## TÂCHE 3

Dans l'estimation précédente des personnes impliquées dans le mouvement que Trevor a lancé, nous avons vu qu'au quatrième jour, s'il n'avait pas été interrompu, il y aurait eu 81 personnes impliquées.

Considérons que, pour une raison quelconque, à la fin du quatrième jour, le mouvement devait être suspendu pendant cinq jours et que, pour chacun de ces cinq jours, il y aurait une diminution de 10 % du nombre de personnes faisant des bonnes actions lorsque le mouvement reprendrait.

- 3.1) Combien de personnes restera-t-il pour continuer le mouvement à la fin du neuvième jour ? Trouve la fonction de décroissance exponentielle et calcule-la.

## POUR EN SAVOIR PLUS...

Synopsis du film "Un monde meilleur" (2000)

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Un\\_monde\\_meilleur\\_\(film\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Un_monde_meilleur_(film))

Bande annonce du film « Un monde meilleur »

[https://www.youtube.com/watch?v=gPDHfZA4z\\_k&t=12s](https://www.youtube.com/watch?v=gPDHfZA4z_k&t=12s)

Introduction aux fonctions exponentielles (en anglais) :

<https://www.khanacademy.org/math/algebra/introduction-to-exponential-functions/exponential-vs-linear-growth/v/exponential-growth-functions>

Équations exponentielles : Application de la croissance et de la décroissance exponentielles (en anglais) :

[http://www.softschools.com/math/algebra/topics/exponential\\_equations\\_exponential\\_growth\\_and\\_decay\\_application/](http://www.softschools.com/math/algebra/topics/exponential_equations_exponential_growth_and_decay_application/)

11

Caractéristiques des fonctions exponentielles (en anglais) :

<https://mathbitsnotebook.com/Algebra1/FunctionGraphs/FNGTypeExponential.html>