PARTIE IV : Cinématographie & Mathématiques

ÂGE : 16-18 ans

OUTIL 36 : PROBABILITÉS DANS "LAS VEGAS 21" PAR ROBERT LUKETIC

LogoPsyCom

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : Probabilités dans "Las Vegas 21" par Robert Luketic

Âge : 16-18 ans

Durée : 2 heures

Concepts Mathématiques : Fibonacci, factorielles, permutations, combinaisons, Triangle de Pascal, probabilité

Concepts Artistiques : Blackjack, comptage de cartes

Objectifs Généraux : Découvrir les concepts mathématiques présentés dans le film et acquérir une vision plus pratique de l'utilisation des mathématiques dans un jeu couramment joué.

Instructions et Méthodologies : Les élèves exploreront les mathématiques en jouant aux cartes et en regardant les vidéos proposées. Cet outil aidera votre classe à découvrir les concepts nécessaires à l'apprentissage des probabilités.

Ressources : Cet outil fournit des images et des vidéos à utiliser en classe. Les thèmes abordés dans ces ressources vous aideront à trouver d'autres matériels pour personnaliser et nuancer votre leçon.

Conseils pour l'éducateur : L'apprentissage par la pratique est très efficace, en particulier pour les jeunes apprenants ayant des troubles de l'apprentissage.

Compétences et Résultats ciblés : À la fin de cet outil, l'élève sera capable de :

- Comprendre les factorielles ;
- Utiliser les permutations et les combinaisons ;
- Calculer des probabilités.

Compte-rendu et Évaluation:

Écrivez trois aspects que vous avez aimé dans cette activité	1. 2. 3.
Écrivez deux choses que vous avez apprises :	1. 2.
Écrivez un aspect à améliorer	1.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Introduction

Regarder un film peut être une activité de loisirs active ou passive. Les films peuvent être des ressources précieuses pour que les apprenants explorent les différents sujets abordés. Certains films utilisent les mathématiques dans leurs intrigues, mais les élèves n'y prêtent pas toujours attention, bien qu'ils soient plus susceptibles de comprendre un sujet dont ils ont entendu parler à la télévision.

En voyant les personnages réfléchir aux problèmes mathématiques et aux différents concepts abordés, le spectateur veut comprendre ces concepts et résoudre ces problèmes, tout comme il essaie souvent de deviner la fin d'un film. Dans ce cas-ci il va apprendre de nouvelles choses simplement en suivant le parcours des personnages pendant toute l'histoire.

Par conséquent, enseigner aux élèves les mathématiques qui se cachent derrière certains films peut être une grande valeur ajoutée au cours de mathématiques, souvent jugé trop abstrait, en apportant aux élèves une compréhension plus pratique et réelle des usages possibles des mathématiques.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

“Las Vegas 21” par Robert Luketic

Synopsis

Figure 1: Poster du film "Las Vegas21"

Le film " Las Vegas 21 " parle d'un groupe d'étudiants de MIT (Institut de technologie du Massachusetts) qui décident d'utiliser la technique du comptage de cartes pour gagner plus de jeux de Blackjack dans les casinos. Cette méthode est très connue et repose sur les probabilités.

Bande annonce:
https://www.youtube.com/watch?v=3Ngavhd2178

Le Blackjack

Ce film parle de Blackjack, mais savais-tu que le Blackjack était à l'origine un jeu français dans les années 1760 appelé "Vingt-et-un", comme le titre du film !
Dans ce film, Ben est très bon en maths et son professeur lui demande de rejoindre son club de comptage de cartes pour jouer à Las Vegas. Ben a besoin d'argent pour payer ses études universitaires et accepte de jouer jusqu'à ce qu'il gagne la somme d'argent dont il a besoin. Ce film est basé sur des faits réels, il y avait vraiment une équipe du MIT qui s'entraînait pour jouer au Blackjack en comptant les cartes.

Tu peux en apprendre plus dans ce documentaire en anglais :
https://www.youtube.com/watch?v=QflVqavHHM0

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l’information contenue dans ce document.

Glossaire

MIT : Massachusetts Institute of Technology (en français: Institut de technologie du Massachusetts), une université privée très réputée aux États-Unis.

Blackjack : un jeu de cartes joué avec 52 cartes. Il est souvent joué dans les casinos.

Comptage de cartes : une technique utilisée dans les jeux de casino tels que le Blackjack pour calculer les chances de gagner.

Le jeu « Vingt-et-un » : un jeu de cartes français du 18ème siècle qui a précédé le Blackjack.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les maths dans « Las Vegas 21 »

Activité d'introduction : La Suite de Fibonacci

Le premier concept mathématique qui apparaît dans "Las Vegas 21" est la Suite de Fibonacci sur le gâteau d'anniversaire de Ben. Comme il étudie les mathématiques au MIT, ses amis lui ont préparé un gâteau spécial pour son anniversaire. La Suite de Fibonacci est une suite dans laquelle on commence par les chiffres 0 et 1 et chaque chiffre suivant est la somme des deux précédents. Elle se déroule comme suit : 0 + 1 = 1 ; 1 + 1 = 2 ; 1 + 2 = 3 ; 2 + 3 = 5, et ainsi de suite.

Figure 2: Capture d'écran de la scène d'anniversaire dans "Las Vegas 21"

Les chiffres sur le gâteau de Ben sont 0,1,1,2,3,5,8,13... Pourquoi les amis de Ben se sont-ils arrêtés là ? Peux-tu deviner l'âge de Ben ?

1. Factorielles

Les jeux de hasard ne dépendent pas toujours tant de la chance. On peut utiliser ce qu'on appelle les probabilités pour deviner ses chances de gagner le jeu.

Avant d'apprendre à calculer les probabilités, commençons par une courte vidéo sur la façon dont on peut arranger 52 cartes: https://www.youtube.com/watch?v=uNS1QvDzCVw.

Tu t'attendais à ça ? Maintenant, on comprend pourquoi ces étudiants avaient tant besoin de s'entraîner avant d'aller à Las Vegas !

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Comme tu l'as vu dans la vidéo, le nombre d'arrangements possibles pour un groupe d'éléments est appelé "La factorielle".

Retiens cette formule :

La factorielle **n!** est égale à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \ldots 3 \times 2 \times 1$$

ou

$$n! = n \times (n-1)!$$

Si tu veux calculer une fraction de factorielles, n'oublie pas de la simplifier comme suit :

$$\frac{10!}{6!} = \frac{10x9x8x7x6x5x4x3x2x1}{6x5x4x3x2x1} = \frac{10x9x8x7x\cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

Attention : il est généralement admis que 0! = 1

2. Permutations

La permutation d'un ensemble d'éléments est un arrangement ordonné de tous les éléments de cet ensemble.

Une Permutation, notée ${}_nP_r$, ${}^nP_r$, or $P(n,r)$, peut admettre ou non des répétitions :

- **Permutations avec repetition** : elles sont faciles à calculer car il y a n, le nombre de choses à choisir et r, les choix.

  La formule est : **n^r = n x n x n… (r fois)**

Exemple :

Si nous devons trouver un code à trois chiffres pour verrouiller un téléphone où il peut y avoir des répétitions, nous avons 10 chiffres parmi lesquels choisir et 3 choix à faire.

n = 10 et r = 3

${}^{10}P_3 = 10^3 = 1000$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

- **Permutations sans répétition** : la différence est que nous réduisons le nombre de choix. Pour éviter les répétitions, la formule n'est plus n x n x n x ... mais devient **n x (n-1) x (n-2) x (n-3) ... = n !** la factorielle. Cependant, si nous voulons seulement choisir r d'entre eux, nous pouvons réduire la formule à

$${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} .$$

Exemple :

Nous jouons au billard et avons 16 boules de billard. Chacune d'entre elles apparaît une fois, il n'y a donc pas de répétition. Il y a 16 x 15 x 14 x 13 x 12 x 11... x 2 x 1 permutations. Si nous voulons en choisir 5, le calcul sera différent :

$${}^{16}P_{5} = \frac{16!}{(16-5)!} = \frac{16!}{11!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 = 524\,160$$

3. Combinaisons :

La combinaison d'un ensemble d'éléments est un arrangement non ordonné de tous les éléments de cet ensemble.

- **Combinaisons sans répétition** :

Disons que nous voulons jouer au Blackjack et que dix personnes s'assoient sur cinq chaises autour de la table. Si nous essayons de trouver le nombre de permutations qu'il y a, nous utiliserons la formule

$${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Le calcul serait :

$${}^{10}P_{5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$$

Dans le cas des combinaisons, l'ordre n'a pas d'importance, il faut donc diviser ce nombre par le nombre de façons de disposer 5 personnes:

$${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \times \frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Appliquons cette formule à notre cas :

$$^{10}C_5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5! \text{ x } 5!} = \frac{10!}{120 \text{ x } 120} = \frac{3\,628\,800}{14\,400} = 252$$

On peut aussi utiliser le triangle de Pascal, qui est très utilisé par les mathématiciens depuis sa découverte.

Voici une vidéo pour en savoir plus sur le triangle de Pascal : https://www.youtube.com/watch?v=XMriWTvPXHI&t=80s

Il suffit de descendre à la $n^{\text{ième}}$ ligne et de choisir le $r^{\text{ième}}$ numéro (la première ligne et le premier numéro sont la ligne et le numéro 0).

Essayons cela avec cet exemple :

Tu joues au Blackjack et tu dois faire asseoir 4 personnes sur 3 chaises. Selon le triangle de Pascal, il y aura 4 combinaisons.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Vérifions cela avec la formule :

$$^{4}C_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{24}{6 \text{ x } 1} = 4$$

Voici un autre exemple :

Si nous avons un jeu de 52 cartes que nous voulons diviser en mains de 2 cartes pour jouer au Blackjack, combien y a-t-il de combinaisons de ces deux cartes ?

$$^{52}C_2 = \frac{52!}{2!(52-2)!} = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52 \text{ x } 51}{2!} = 1\,326 \text{ combinaisons}$$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

❖ **Combinaisons avec répétitions :** Ici, l'ordre n'a pas d'importance mais on peut répéter plusieurs fois le même choix.

Les amis de Ben doivent choisir 4 saveurs pour le gâteau d'anniversaire de Ben parmi les 7 saveurs proposées. Appelons-les A, B, C, D, E, F et G.
Combien de combinaisons avec des répétitions aurons-nous ?

Soit A, B, C, D, E, F, G où :

- V représente les saveurs choisies
- → représente les mouvements (de A à B, B à C, C à D, etc.)

A A D F	V V → → → V → → V →
C E E G	→ → V → → V V → → V
B C F F	→ V → V → → → V V →

…

On remarque qu'il y a toujours 6 flèches et 4 V. Cela nous amène à transformer la formule pour les combinaisons sans répétitions qui nous donne la formule pour les combinaisons avec répétitions :

$$^{n}C_{r} = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Appliquons cette formule à notre problème :

$$^{7}C_{4} = \frac{(4+7-1)!}{4!(7-1)!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10!}{24 \text{ x } 720} = \frac{3\,628\,800}{17\,280} = 210$$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

4. Probabilité

La probabilité est utilisée pour avoir une idée plus précise des chances que quelque chose d'aléatoire se produise.

Elle s'écrit P(A) et sera toujours comprise entre 0 et 1.

Rappelle-toi : $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

omme deux événements complémentaires constituent toutes les possibilités :

$\mathbf{P(A_C) + P(A) = 1}$

Pour la calculer, nous divisons le nombre de cas où notre choix se réalise par le nombre de cas possible :

$$\frac{\#\ \textbf{cas où A se réalise}}{\#\ \textbf{de cas possibles}}$$

Cela signifie que, par exemple, lorsque l'on lance un dé, on a $\frac{1}{6}$ possibilités d'avoir un 4 et $\frac{2}{6}$ Il est cependant impossible d'avoir à la fois un 4 et un 5, c'est pourquoi la probabilité est de $\frac{0}{6}$.

Exemple : Le problème de Monty Hall

- Dans un de ses cours, le professeur de Ben énonce un problème mathématique où :
- Il y a trois portes devant toi ;
- Derrière l'une des portes, il y a une nouvelle voiture
- Derrière les deux autres, il y a des chèvres.
- Tu veux choisir celle avec la nouvelle voiture mais il y a $\frac{1}{3}$ de chance d'obtenir la voiture et $\frac{2}{3}$ de chance d'obtenir une chèvre.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Ben choisit la porte 1 et son professeur lui montre que derrière la porte numéro 3, il y a une chèvre. Il lui propose de changer sa réponse. Maintenant qu'il sait où se trouve l'une des chèvres, doit-il saisir cette seconde chance ?

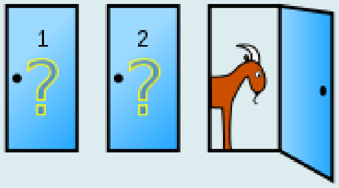

Figure 3: Représentation visuelle du problème de Monty Hall

Tu peux voir sa réponse ici : https://www.youtube.com/watch?v=huLoJcTppXk

Voici un autre exemple :

Tu as 12 cartes en main et ton voisin doit en choisir une. Dans ces 12 cartes, tu as trois dix, cinq Rois, deux As et deux quatre. Quelles sont les chances que ton voisin choisisse un Roi ?

Les cas possibles sont : {10, 10, 10, R, R, R, R, R, A, A, 4, 4}

Ainsi, la probabilité d'obtenir un roi, P(R)= $\frac{5}{12}$

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de connaître quelques formules pour ces calculs particuliers :

Pour calculer la probabilité que deux événements se produisent en même temps, il faut multiplier leurs probabilités.

P(A∩B) = P(A) x P(B)

Dans un jeu de 52 cartes, en piochant deux cartes, quelle est la probabilité de choisir une dame et un valet ?

P(V∩D) = P(V) x P(D)

P(V∩D) = $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$ = 0,006

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Pour calculer la probabilité que l'un des deux événements se produise, il faut additionner leurs probabilités, puis soustraire la probabilité que les deux se produisent en même temps.

P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

Par exemple, dans un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité de choisir une dame ou un valet ?

$P(D \cup V) = P(D) + P(V) - P(D \cap V)$

$P(D \cup V) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{169} = \frac{13}{169} + \frac{13}{169} - \frac{1}{169} = \frac{25}{169} = \mathbf{0,148}$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l’information contenue dans ce document.

TÂCHE

Jouons au Blackjack :

Nous jouons au Blackjack avec 52 cartes ; chaque carte a sa propre valeur. Le but du jeu est d'avoir une somme de 21 points. Un As et une carte à 10 points constituent la meilleure main. L'As se transforme en 1 lorsque la somme est supérieure à 21. Tous les joueurs reçoivent deux cartes face visible. Le croupier reçoit une carte face visible et une carte face cachée. Si le croupier a un Blackjack (21 points), il révèle ses cartes et remporte la mise avec les joueurs qui ont également un Blackjack. Si le croupier perd, c'est au tour des autres joueurs de garder leurs cartes, d'en prendre une autre, de diviser en deux mains différentes ou de se rendre et d'obtenir la moitié de leur mise.

Voici les valeurs de toutes les cartes :

As	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Valet	Dame	Roi
1 or 11	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	10	10

Figure 4: Image d'un jeu de cartes de casino

Nous avons cinq joueurs autour de la table. Ils ont chacun 2 cartes. Parmi ces cartes, il y a quatre As, deux dix, un Valet, un quatre et deux cinq. Quelles sont les chances d'obtenir deux cartes qui totalisent 21 ?

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

POUR EN SAVOIR PLUS…

Vidéo Ted-ED sur les Factorielles :

https://www.youtube.com/watch?v=uNS1QvDzCVw

Vidéo Ted-ED sur le Triangle de Pascal :

https://www.youtube.com/watch?v=XMriWTvPXHI&t=80s

Vidéo Ted-ED sur les Probabilités :

https://www.youtube.com/watch?v=3V2omKRX9gc

Vidéo TED-Ed sur les Probabilités :

https://www.youtube.com/watch?v=Kgudt4PXs28

La réponse de Ben au problème de Monty Hall :

https://www.youtube.com/watch?v=huLoJcTppXk

Documentaire sur l'équipe de Blackjack du MIT (en anglais) :

https://www.youtube.com/watch?v=QflVqavHHM0

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.