PARTIE II : Musique & Mathématiques

ÂGE : 16-18 ans

"Brown Violin"
(Source: https://www.pexels.com/photo/brown-violin-697672/)

OUTIL 21 : FONCTIONS TRIGNOMÉTRIQUES DANS LES SÉRIES HARMONIQUES

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : Fonctions trigonométriques dans les séries harmoniques

Âge : 16-18 ans

Durée : 3 heures

Concepts mathématiques : Fonctions trigonométriques

Concepts artistiques : Séries harmoniques en musique, notes de musique, fréquence des notes de musique et des ondes sonores.

Objectifs généraux : Comprendre les fonctions trigonométriques, calculer la période de leur graphe et résoudre des équations trigonométriques.

Instructions et Méthodologies : Il sera utile d'utiliser une calculatrice graphique (il peut s'agir de la calculatrice graphique en ligne Desmos) pour montrer les graphes aux élèves et présenter les solutions des équations trigonométriques. Pour donner aux élèves une idée plus précise des modes de vibration, veuillez leur faire regarder la vidéo "Modes sur une corde" (cf. "Pour en savoir plus...") après l'explication.

Ressources : Un stylo ; Ordinateur connecté à internet ; Accès au site web : https://www.desmos.com/

Conseils pour l'éducateur : Commencez par montrer les graphes des fonctions trigonométriques et expliquez leurs propriétés. Résolvez une équation pour chacune des trois fonctions afin que les élèves puissent les résoudre par eux-mêmes.

Résultats et Compétences ciblés : A l'issue de cet outil, l'élève sera capable de :

- Générer le graphe d'une fonction trigonométrique ;
- Calculer la période d'une fonction trigonométrique ;
- Résoudre des équations du type $\sin x = a$, $\cos x = a$ and $\tan x = a$.

Compte-rendu et évaluation :

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 éléments que vous avez appris :	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Introduction

Les mathématiques et la musique ont toujours été liées. Toutefois, ce n'est qu'au sixième siècle avant J.-C. que l'on a découvert les premières preuves de cette relation. Pythagore a comparé le son produit par des marteaux de différentes longueurs, utilisés par les forgerons, au son du monocorde, dont on pense que Pythagore était l'inventeur.

Cette comparaison a permis à Pythagore de découvrir et d'améliorer les raisons mathématiques des sons grâce à l'étude des sons produits par le monocorde. Il a divisé la corde en deux parties égales, puis en trois parties égales, et ainsi de suite. Il a fait correspondre les sons mathématiquement en fonction des subdivisions qu'il effectuait et a créé la gamme pythagoricienne, dans laquelle chaque note maintenait une relation bien définie avec l'autre.

De nombreux peuples et cultures ont créé leurs propres gammes. Un exemple est celui du peuple chinois qui a créé la gamme pentatonique. La culture occidentale, cependant, a adopté un tempérament égal à 12 tons, connu sous le nom de gamme tempérée ou gamme chromatique.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Série Harmonique

Il est communément admis que les notes de musique naturelles sont les suivantes : A, B, C, D, E, F et G. Néanmoins, celles-ci sont représentées dans la plupart des pays par la convention de dénomination des solfèges Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si selon la correspondance suivante : C-Do, D-Re, E-Mi, F-Fa, G-Sol, A-La et B-Si. La définition de ces notes a été largement influencée par les Mathématiques.

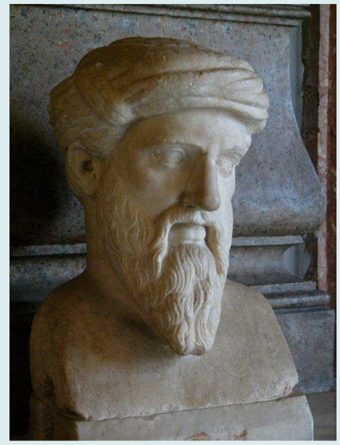

Fig. 1 – Buste de Pythagore
(Source:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg)

Au sixième siècle avant J.-C., Pythagore s'est rendu compte qu'en faisant vibrer une corde, non seulement celle-ci vibrait dans toute sa longueur, mais elle formait aussi une série de nœuds, qui se divisent en sections plus petites, les partiels, qui vibrent à des fréquences supérieures à la fondamentale.

Pour étudier la relation entre la longueur de la corde vibrante et le son musical produit par celle-ci, il a utilisé un monocorde.

La figure 2 montre les nœuds et les partiels des quatre premières fréquences d'une série. Pour faciliter la compréhension, ils sont représentés séparément, mais sur une vraie corde, tous se chevauchent, ce qui génère un dessin complexe, similaire à la forme d'onde de l'instrument.

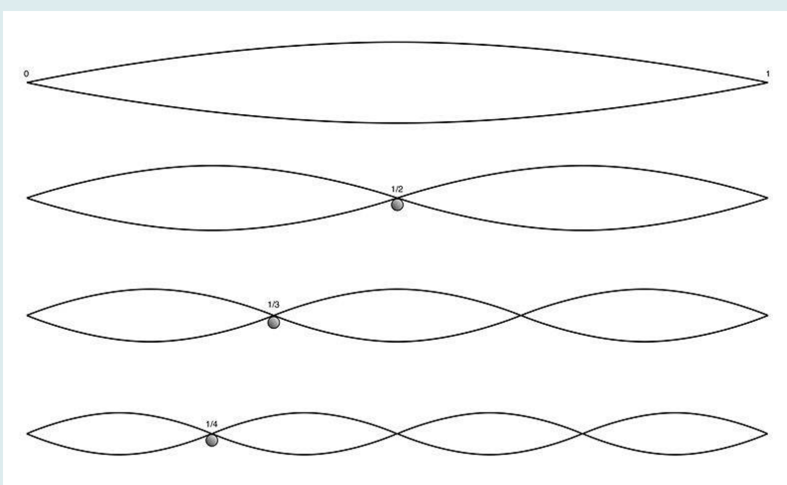

Fig. 2 – Modes de vibration des 4 premières harmoniques
((Source:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Imaginons une corde tendue, bloquée à ses extrémités. Lorsque nous touchons une extrémité de cette corde, elle vibre (figure 3) et produit une note que l'on appelle une fondamentale.

Fig. 3 – Modes de vibration d'une note fondamentale 1(f)
(Source:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Pythagore a décidé de diviser une corde en deux parties (figure 4) et de toucher l'une des parties au milieu. Le son produit était le même, mais avec une fréquence plus haute (généralement appelée "la même note, une octave plus haut"). Il a depuis été prouvé que lorsque le nombre de divisions (ou le nombre d'harmoniques) est un multiple d'un nombre antérieur, le son est répété, mais avec une fréquence plus aiguë.

Fig. 4 – Modes de vibration d'une note fondamentale 2(f)
(Source:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Il a alors décidé d'essayer de voir à quoi ressemblerait le son de la corde divisée en trois parties (figure 5) et a remarqué qu'un nouveau son, différent du précédent, en émanait. Cette fois, ce n'était pas la "même note, une octave plus haut", mais une note complètement différente, qui méritait un autre nom - la quinte.

Fig. 5 – Modes de vibration d'une note fondamentale 3(f)
(Source:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Ce son, bien que différent, s'accordait bien avec le son précédent. Il créait une harmonie agréable à l'oreille, ce qui s'explique par le fait que les divisions effectuées avaient les relations mathématiques de 1/2 et 2/3. Avec la division de la corde en quatre parties, il obtint une note maintenant connue sous le nom de "quarte". Ces trois notes sont en consonance avec la note fondamentale.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Ainsi, il a continué à subdiviser la corde, obtenant les harmoniques de la note fondamentale, et, en combinant mathématiquement les sons, il a créé des gammes qui donnent des notes naturellement liées entre elles. Au fil du temps, les notes ont reçu les noms que nous connaissons aujourd'hui et qui ont été mentionnés précédemment.

Dans ce processus, chaque note provenant d'un objet, subit l'influence de la fréquence fondamentale qui excite les autres harmoniques, ce qui résulte en une série de fréquences - la série harmonique. Les séries harmoniques sont des séries infinies, composées d'ondes sinusoïdales avec toutes les fréquences multiples entières de la fréquence fondamentale. Il n'y a pas une seule série d'harmoniques, mais plutôt une série différente pour chaque fréquence fondamentale.

Examinons un exemple de série harmonique qui commence à A2 / La1 (110 Hz). Les 16 premières harmoniques de cette série peuvent être observées dans le tableau suivant :

Harmonique #	Note (Anglais)	Note (Néo-latin)	Fréquence (Hz)
1 (F)	A_2	Lá$_1$	110
2	A_3	Lá$_2$	220
3	E_4	Mi$_3$	330
4	A_5	Lá$_3$	440
5	$C^{\#}_5$	Do$^{\#}_4$	550
6	E_4	Mi$_4$	660
7	G_4	Sol$_4$	770
8	A_5	Lá$_4$	880
9	B_5	Si$_4$	990
10	$C^{\#}_6$	Do$^{\#}_5$	1100
11	$D^{\#}_6$	Ré$^{\#}_5$	1210
12	E_6	Mi$_5$	1320
13	$F^{\#}_6$	Fá$^{\#}_5$	1430
14	G_6	Sol$_5$	1540
15	$G^{\#}_5$	Sol$^{\#}_5$	1650
16	A_6	Lá$_5$	1760

Tableau 1 – Les 16 premières harmoniques

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Ondes sonores

Lorsqu'un instrument de musique produit un son, il vibre et une série d'ondes sinusoïdales sont émises. En plus de la fréquence fondamentale qui définit la note, plusieurs fréquences harmoniques (onde dont la fréquence est un multiple entier positif de la fréquence de l'onde originale) sont également émises. De cette façon, l'existence de plusieurs fréquences dans le même intervalle de temps, produites par la même source sonore, conduit à la formation d'ondes complexes/irrégulières, résultant de la somme d'harmoniques sinusoïdales simples, comme le montre la figure 6.

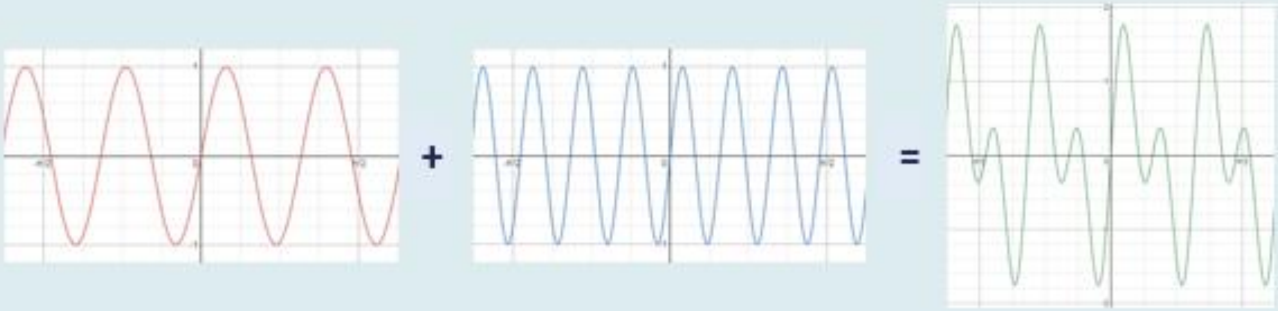

Fig. 6 – Formation d'une onde sonore irrégulière
(Source: Auteur sur Desmos)

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Erasmus+

Glossaire

Quinte : l'intervalle entre une note de musique et une autre, qui est de quatre degrés par rapport à la première, à l'intérieur d'une gamme.

Quarte : intervalle entre une note de musique et une autre, qui est de trois degrés par rapport à la première, à l'intérieur d'une gamme.

Fréquence : quantité physique indiquant le nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps donné.

Fréquence fondamentale : la fréquence composante la plus basse et la plus forte de la série harmonique d'un son.

Note fondamentale : note principale d'un accord, dont découlent les autres accords

Série Harmonique : ensemble d'ondes composé de la fréquence fondamentale et de tous les multiples entiers de cette fréquence.

Harmonique : son d'une série qui constitue une note.

Harmonie : combinaison simultanée de sons.

Monochorde : un instrument de musique ancien composé d'une caisse de résonance, sur laquelle était tendue une seule corde fixée par deux supports mobiles.

Octave : intervalle entre une note de musique et une autre avec la moitié ou le double de sa fréquence.

Gamme pentatonique : ensemble de toutes les gammes composées de cinq notes ou tons.

Hauteur : les sons à haute fréquence transmis à l'oreille humaine, généralement au-dessus de 5 KHz.

Gamme (musicale) : séquence ordonnée de sons selon la fréquence vibratoire des sons (généralement du son de plus basse fréquence au son de plus haute fréquence).

Gamme tempérée : division de l'octave en douze demi-tons égaux.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les mathématiques dans les séries harmoniques :

Fonctions trigonométriques

Lorsqu'un instrument de musique est capable de produire des sons, il vibre et une série d'ondes sinusoïdales est émise. Lorsqu'elles sont isolées, ces ondes obéissent à la fonction mathématique suivante : $\mathbf{f(x) = \sin(f_i . 2\pi x)}$, où $\mathbf{f_i}$ est la fréquence de l'harmonique d'ordre $\mathbf{i}$.

Prenons un exemple : si la fréquence d'une harmonique est 1, alors les ondes émises ressembleront à ceci :

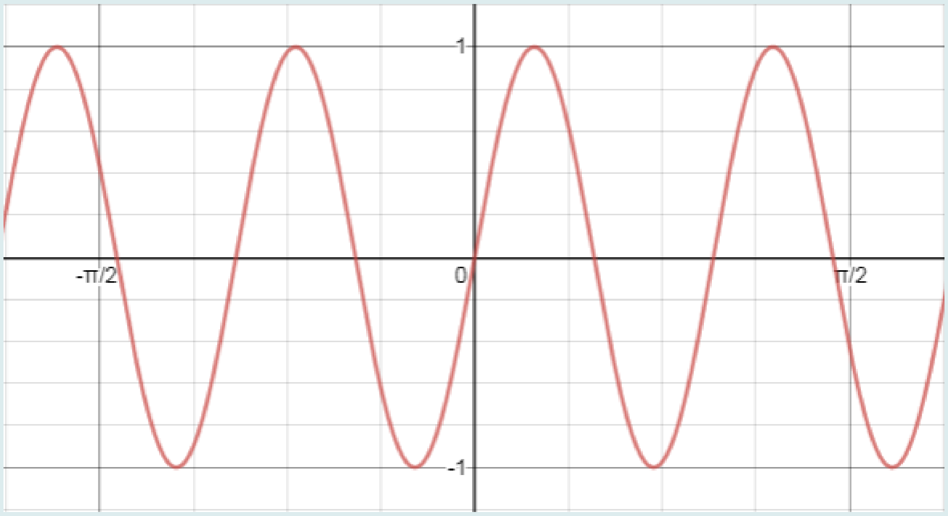

Fig. 7 – Onde sinusoïdale de la fonction $f(x) = \sin(f_i . 2\pi x)$ where $f_i = 1$.
(Source: Auteur sur Desmos)

Penchons-nous sur la trigonométrie et les fonctions trigonométriques pour mieux comprendre les ondes sinusoïdales.

1. Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques comme fonctions réelles de variable réelle

Si à tout nombre réel $\mathbf{x}$ correspond un et un seul nombre réel $\mathbf{y}$ de sorte que $\mathbf{y = \sin x}$ et $\mathbf{y = \cos x}$, alors $\mathbf{y = \sin x}$, $\mathbf{y = \cos x}$ et $\mathbf{y = \tan x}$ ($\mathbf{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$) sont désormais considérées comme des fonctions réelles de variable réelle.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Domaine, codomaine, extremum et zéros des fonctions trigonométriques

Dans une fonction $\mathbf{f(x)}$, la valeur x est un nombre réel quelconque et est généralement appelée **domaine.** Quant à l'ensemble d'arrivée de la fonction, Y, il est également appelé **codomaine**. En d'autres termes, toute valeur qui entre dans une fonction est le domaine et la valeur qui en ressort est le codomaine.

En modélisant une fonction f(x), on remarque qu'elle a une valeur plus grande et une valeur plus petite. Ces valeurs sont appelées l'**extremum** et correspondent au point maximum et minimum d'une fonction. En outre, une fonction peut comporter des **zéros**. Ce sont les intersections sur l'axe des x, c'est-à-dire que le zéro d'une fonction est une valeur d'entrée qui produit une sortie de 0.

Considérons les graphiques des fonctions : $\mathbf{y = \sin x}$, $\mathbf{y = \cos x}$ et $\mathbf{y = \tan x}$ dans l'intervalle $[\mathbf{-2\pi, 2\pi}]$.

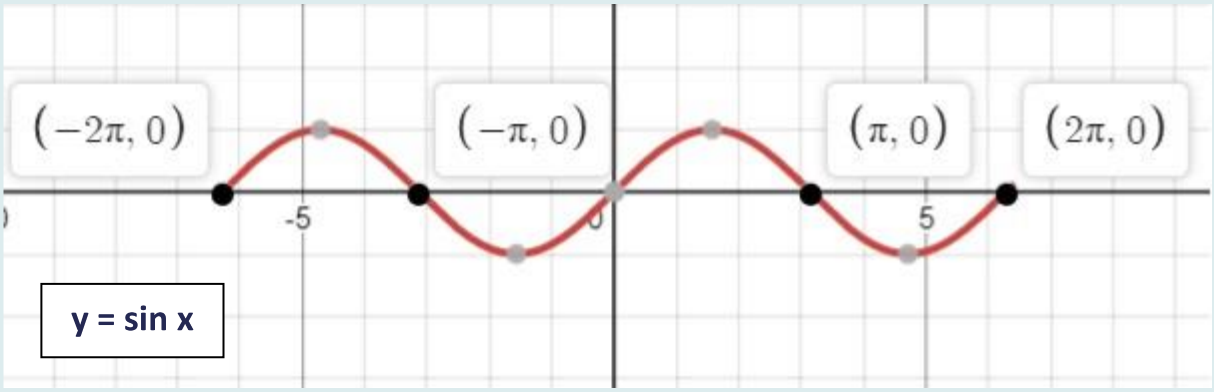

Fig. 8 – Fonction graphique de y=sin x
(Source: Auteur sur Desmos.com)

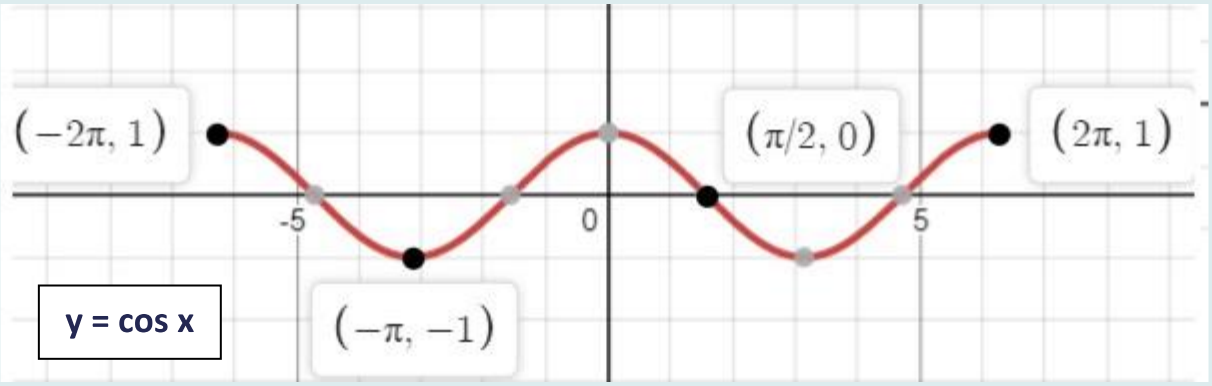

Fig. 9 – Fonction graphique de y=cos x
(Source: Auteur sur Desmos.com)

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

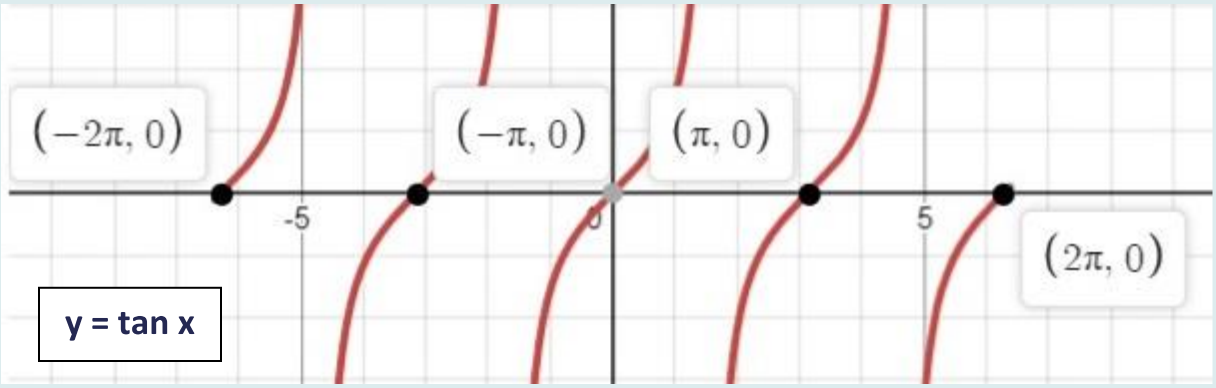

Fig. 10 – Fonction graphique de y=tan x
(Source: Auteur sur Desmos.com)

En observant les graphes, il est possible de conclure que :

Fonction	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
Domaine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \epsilon \mathbb{Z} \right\}$
Codomaine	[-1 , 1]	[-1 , 1]	$\mathbb{R}$
Élément maximum	1 to: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \epsilon \mathbb{Z}$	1 to: $x = 2k\pi, k \epsilon \mathbb{Z}$	------
Élément minimum	-1 to: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	-1 to: $x = \pi + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	------
Zéros	$x = k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	$x = k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

2. Monotonie des fonctions trigonométriques

En examinant les graphes précédents dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$, il est possible de conclure que :

- $\sin(x)$ est croissante sur $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$;
- $\cos(x)$ est croissante sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, et décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$;

En ce qui concerne la fonction $y = \tan x$, il est possible de conclure que la fonction est croissante sur tous les intervalles dans lesquels elle est définie.

3. Symétrie et parité des fonctions trigonométriques

Fonction paire

- Une fonction f est paire si, et seulement si $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.
- Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des y.

La fonction $y = \cos x$ est une **fonction paire**, c'est-à-dire, $\cos(-x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Fonction impaire

- Une function f est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.
- Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées.

La fonction $y = \sin x$ est une **fonction impaire**, c'est-à-dire, $\sin(-x) = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

La fonction $y = \tan x$ est une **fonction impaire**, c'est-à-dire, $\tan(-x) = -\tan x$, $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \epsilon \mathbb{Z}\right\}$.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

4. Période des fonctions trigonométriques

La fonction $\mathbf{f}$ est périodique de **période** $\mathbf{p}$ si $\mathbf{p}$ est la plus petite constante positive, telle que $\mathbf{f(x+p)=f(x)}$ pour tous les $\mathbf{x}$ du domaine $\mathbf{f}$.

- La période de la fonction $y = \sin x$ est 2π: $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{Z})$;
- La période de la fonction $y = \cos x$ est 2π: $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{Z})$;
- La période de la fonction $y = \tan x$ est π: $\tan(x + k\pi) = \tan x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

En général, pour $\mathbf{k \neq 0}$:

Fonction	$\mathbf{y = A + B\sin(kx + C)}$	$\mathbf{y = A + B\cos(kx + C)}$	$\mathbf{y = A + B\tan(kx + C)}$
Période	$\mathbf{\frac{2\pi}{\lvert k\rvert}}$	$\mathbf{\frac{2\pi}{\lvert k\rvert}}$	$\mathbf{\frac{\pi}{\lvert k\rvert}}$

5. Résoudre des équations du type $\mathbf{\sin x = a}$

En général, pour résoudre, dans $\mathbb{R}$, une équation du type $\mathbf{\sin x = a}$ il faut considérer les informations suivantes :

- L'équation du type $\sin x = a$ n'a de solution que si $a \in [-1,1]$.
- Dans l'intervalle $[0,2\pi]$ il y a deux valeurs qui ont la même valeur de sinus : α et $\pi - \alpha$.
- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \lor x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple de résolution d'une équation du type $\mathbf{\sin x = a}$:

Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $\mathbf{\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

➔ 1ère étape :

Trouvee une solution à l'équation $\mathbf{\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

On sait que $\mathbf{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ et que $\mathbf{\sin(-x) = -\sin x}$. Donc, $\mathbf{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Une solution de l'équation est $-\frac{\pi}{4}$.

➔ 2ième étape :

Calculer $\mathbf{\pi - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}}$.

➔ 3ième étape :

Écrire la solution générale de l'équation : $\mathbf{x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee\ x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$.

En utilisant la calculatrice graphique en ligne Desmos, nous pouvons confirmer les deux valeurs obtenues :

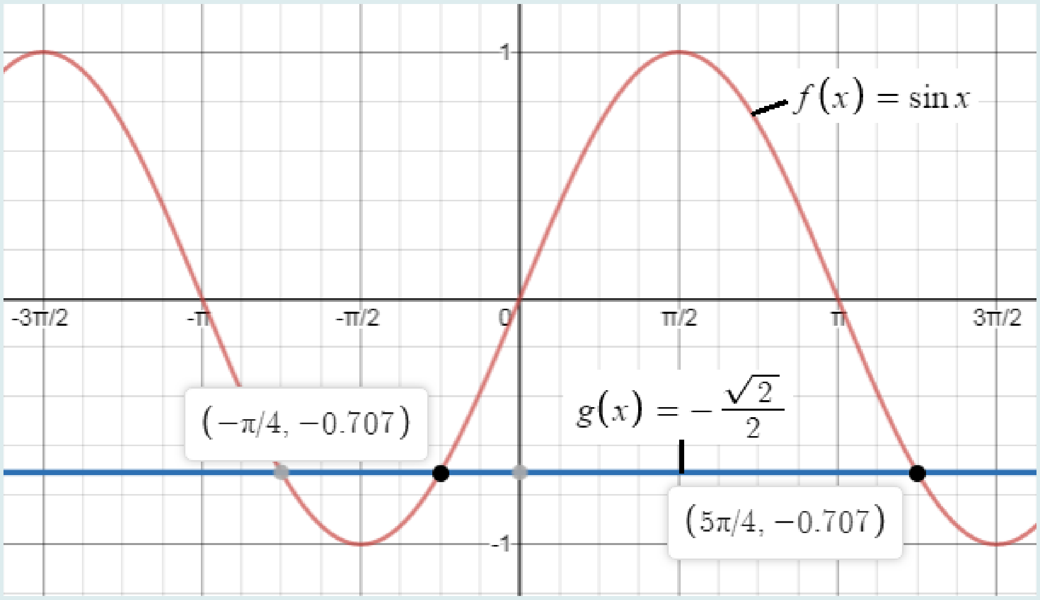

Fig. 11 – Représentation graphique de l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, in $\mathbb{R}$.

(Source: Auteur sur Desmos)

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

6. Résoudre des équations de type $\cos x = a$

Après avoir assimilé la résolution d'une équation du type $\mathbf{\sin x = a}$, il est très simple de résoudre une équation du type $\mathbf{\cos x = a}$.

La différence réside uniquement dans le fait que : $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{-\alpha}$ ont le même cosinus, c'est-à-dire, $\mathbf{\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) = a}$.

Par conséquent, pour résoudre, dans $\mathbb{R}$, une équation de type $\mathbf{\cos x = a}$ nous devons tenir compte des informations suivantes :

- L'équation de type $\cos x = a$ n'a de solution que si a $\in [-1,1]$.
- Dans l'intervalle [0, 2π] il y a deux valeurs qui ont le même sinus : α et $-\alpha$.
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple de résolution d'une équation de type $\mathbf{\cos x = a}$.

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\mathbf{1 - 2\cos x = 0}$.

Résolution : $\mathbf{1 - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow -2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}}$.

➔ 1ère étape :

Déterminer $\boldsymbol{\alpha}$, en radians, de sorte que $\mathbf{\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2}}$.

Nous savons que $\mathbf{\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$, donc, $= \mathbf{\frac{\pi}{3}}$.

➔ 2ième étape :

Si $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{\frac{\pi}{3}}$ est une solution de l'équation, $\boldsymbol{-\alpha} = \mathbf{-\frac{\pi}{3}}$ l'est aussi.

➔ 3ième étape :

Ecrire la solution générale de l'équation : $\mathbf{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

En utilisant la calculatrice graphique en ligne Desmos, nous pouvons confirmer les deux valeurs obtenues :

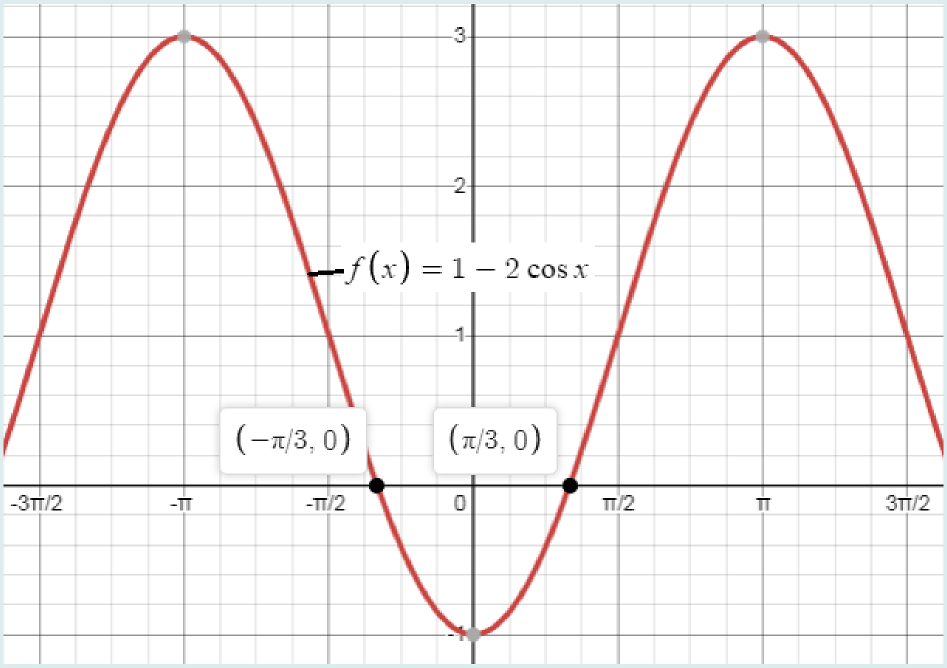

Fig. 12 – Représentation graphique de l'équation $1 - 2cos\ x = 0$
(Source: Auteur sur Desmos)

7. Résoudre des équations de type $\tan x = a$

Dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $\mathbf{\tan x = a}$ a une seule et unique solution : $\boldsymbol{\alpha}$.

Puisque la période de la fonction $\mathbf{y = \tan x}$ is $\boldsymbol{\pi}$, on conclut que si $\boldsymbol{\alpha}$ est la solution de l'équation $\mathbf{\tan x = a}$, alors $\boldsymbol{\alpha + k\pi, k} \in \mathbb{Z}$ est également une solution.

Donc, pour résoudre, dans $\mathbb{R}$ une equation de type $\mathbf{\tan x = a}$ nous devons tenir compte des informations suivantes :

- L'équation $\tan x = a$ a une solution pour toute valeur réelle de a.
- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple de résolution d'une équation de type $\mathbf{\tan x = a}$

Résolvons l'équation $\mathbf{\tan x = \sqrt{3},\ 0 \leq x \leq 2\pi\ (rad)}$.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

On sait que $\mathbf{tan}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Donc, $\mathbf{x} = \frac{\pi}{3} + \mathbf{k\pi}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbf{k = 0} \implies \mathbf{x} = \frac{\pi}{3};$$

$$\mathbf{k = 1} \implies \mathbf{x} = \frac{4\pi}{3};$$

$$\cancel{\mathbf{k}} = 2 \implies \mathbf{x} = \frac{\pi}{3} + 2\pi \ \ (\text{greater than } 2\pi);$$

$$\cancel{\mathbf{k}} = -1 \implies \mathbf{x} = \frac{\pi}{3} - 2\pi \ \ (\text{less than } 0).$$

Donc, $\mathbf{S} = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

By En utilisant la calculatrice graphique en ligne Desmos, nous pouvons confirmer les deux valeurs obtenues :

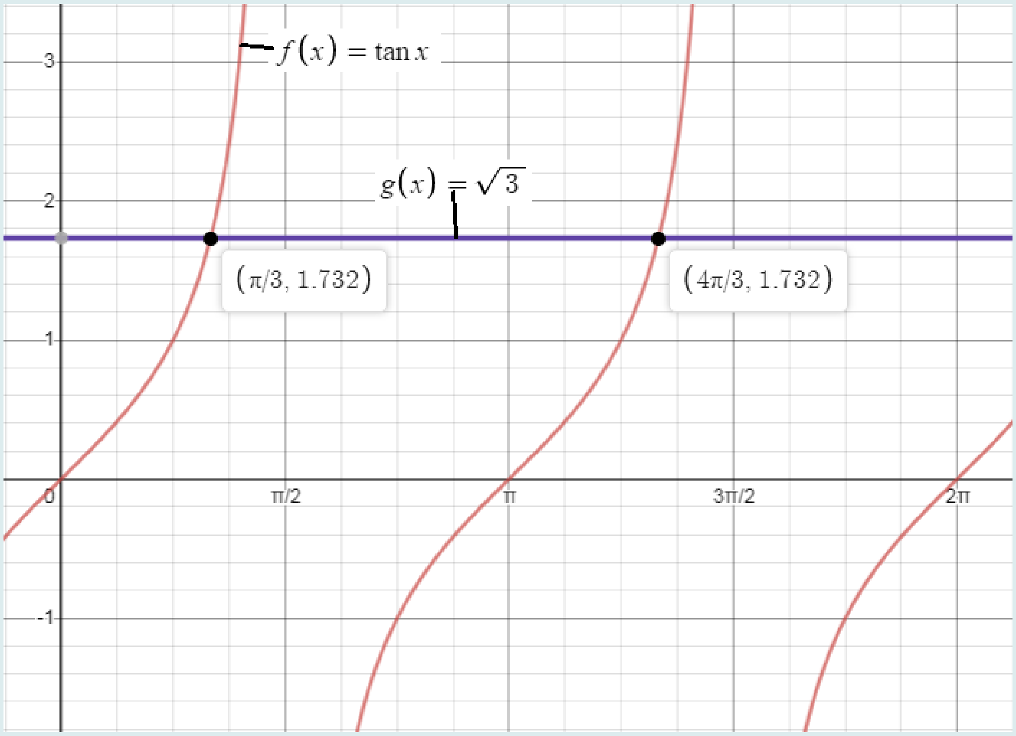

Fig. 13 – Représentation graphique de l'équation $\tan x = \sqrt{3},\ 0 \leq x \leq 2\pi$ (rad).
(Source: Auteur sur Desmos)

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

TÂCHES

TÂCHE 1

Détermine la période de chacune des fonctions trigonométriques suivantes :

1.1. $y = \sin(2x)$;

1.2. $y = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$;

1.3. $y = -2\cos(-5x)$;

1.4. $y = -20\cos(\pi x)$;

1.5. $y = -3\tan(2x)$;

1.6. $y = -3\tan\left(-\frac{\pi}{2}x\right)$.

TÂCHE 2

Résous dans $\mathbb{R}$, les équations trigonométriques suivantes :

2.1. $-2\sin(x) = \sqrt{2}$;

2.2. $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$;

2.3. $-2\sin(x) = -4$;

2.4. $2\sin(2x) - 1 = 0$.

TÂCHE 3

Résous chacune des équations suivantes dans les ensembles indiqués.

Note : Exprime les solutions en radians.

3.1. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, in $\mathbb{R}$;

3.2. $2\cos(x) + 1 = 0$, in $\mathbb{R}$;

3.3. $\cos(x) = -1$, in $[0, 3\pi]$.

TÂCHE 4

Résous chacune des équations suivantes dans les ensembles indiqués.

Note : Exprime les solutions en radians.

4.1. $3\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{3}$, in $\mathbb{R}$;

4.2. $\tan(2x) = 1$, in $[0, 2\pi]$.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

POUR EN SAVOIR PLUS…

Les mathématiques de la musique (en anglais)

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

Modes sur une corde (en anglais)

https://www.youtube.com/watch?v=cnH2ltfW48U

Les séries harmoniques (en anglais)

https://www.oberton.org/en/overtone-singing/harmonic-series/

Comprendre les intervalles musicaux, les gammes, l'accord et le timbre (en anglais)

http://in.music.sc.edu/fs/bain/atmi02/hs/hs.pdf

Fonctions trigonométriques

https://www.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-trig-functions

Explorer des graphes de fonctions trigonométriques avec l'application web Desmos

https://www.desmos.com/

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.