

PARTIE II : Musique & Mathématiques

ÂGE : 16-18 ans

OUTIL 20: L'ÉTUDE DU BATTEMENT

LogoPsyCom



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : L'étude du battement

Âge : 16-18 ans

Durée : 1 heure

Concepts mathématiques : la théorie du battement, Identité trigonométrique, ondes sinusoïdales

Concepts artistiques : Notes, ondes sonores, hauteur, fréquence

Objectifs généraux : Découvrir les concepts mathématiques cachés dans les compositions musicales et acquérir une vision plus pratique de l'utilisation des mathématiques.

Instructions et Méthodologies : Les élèves exploreront les deux domaines dans leur ensemble, en écoutant la musique ou en la jouant et en regardant des vidéos qui analysent les compositions musicales. Ils découvriront les bases des concepts mathématiques mentionnés.

Ressources : Cet outil fournit des vidéos et des ressources en ligne que vous pouvez utiliser dans votre classe. Les thèmes abordés dans l'outil vous aideront à trouver d'autres ressources pour personnaliser et nuancer votre leçon.

Conseils pour l'éducateur : L'apprentissage par la pratique est très efficace, en particulier pour les apprenants ayant des difficultés d'apprentissage. Expliquez toujours en quoi chaque concept mathématique est utile dans la pratique.

Résultats et Compétences ciblés : A l'issue de cet outil, l'élève sera capable de :

- Comprendre le processus logique derrière la composition musicale ;
- Comprendre l'identité trigonométrique ;
- Comprendre et utiliser l'étude du battement.

Compte-rendu et évaluation :

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 éléments que vous avez appris :	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Introduction

La musique et les mathématiques ne montrent pas de lien évident pour ceux qui n'ont jamais composé ou lu une partition. Cependant, il apparaît clairement que le rythme des compositions musicales et la structuration de la partition en mesures évoquent un mode de pensée mathématique.

De nombreux chercheurs ont étudié l'implication des mathématiques dans les arts. La musique a été l'un des points centraux de leurs études et il s'est avéré que, tout au long de l'histoire, de nombreux mathématiciens avaient exploré cette question. Pythagore, Leonardo Bonacci (également connu sous le nom de Fibonacci), et bien d'autres ont contribué à ces recherches. Différents aspects des mathématiques, allant de la géométrie de base et des suites de nombres à la trigonométrie, ont montré leur utilité dans les compositions musicales.

Dans le cadre de cet outil, nous nous concentrerons sur l'applicabilité des mathématiques dans la musique en observant les apports de la physique et de l'identité trigonométriques dans la composition musicale.

Comment fonctionne la musique ?

Lorsque nous jouons de la musique, les vibrations produites et le mouvement des particules d'air passent par nos oreilles et nous permettent d'entendre les sons à la bonne fréquence. Si l'on observe une corde de guitare, on peut voir qu'elle se déplace d'une certaine manière et à un certain rythme. Lorsque nous étirons une corde, sa hauteur augmente et sa fréquence s'accélère. Ce qui est produit s'appelle une onde sonore et va directement dans nos oreilles, déplaçant le fluide de notre cochlée, dans la partie interne de notre oreille.

Bien sûr, Pythagore, un philosophe grec ayant vécu vers 570 - c. 495 avant J.-C., n'était pas au courant de tout ce que nous savons aujourd'hui sur le corps humain et la composition musicale. Il a cependant élaboré une théorie sur la façon de calculer les rapports dans les intervalles, ce que nous allons aborder dans cette leçon. La légende raconte qu'il a entendu différents sons provenant des marteaux d'une forge et qu'il a découvert que lorsqu'un marteau était deux fois plus gros ou plus lourd qu'un autre, il produisait la même note une octave plus haut.

Voici une vidéo de C'est pas sorcier pour en savoir plus sur la provenance des sons :

 <https://www.youtube.com/watch?v=llhJcfKNk3I>

Tu peux aussi regarder cette vidéo de ScienceEtonnante qui explique le lien entre les mathématiques et la musique :

 <https://www.youtube.com/watch?v=cTYvCpLRwao>

Glossaire

La Fréquence sonore : nous donne la vitesse d'une vibration et la hauteur d'un son.

La hauteur d'un son : montre si une note est aiguë ou grave et est mesurée en Hertz.

L'Onde sonore : représente la vibration produite par un son. Sa longueur et sa vitesse déterminent la hauteur ou la fréquence du son.

La Cochlée : la cavité en spirale située dans l'oreille interne qui réagit aux vibrations sonores.

Le Tympan : La membrane située au fond du conduit auditif qui vibre lorsqu'elle perçoit un son.

L'Intervalle : est la différence de hauteur entre deux sons.

L'Octave : est la différence de hauteur entre une note et une autre dont la fréquence est double

Les maths dans la composition musicale

L'étude du battement

Nous avons appris que la fréquence d'un son est étroitement liée aux ondes sonores que nous pouvons dessiner pour représenter visuellement les sons. Il existe un autre phénomène appelé "le battement", qui est produit par les interférences entre les deux ondes sonores jouées en même temps. Si deux ondes sonores se chevauchent, nous observerons des phénomènes différents.

- Si les deux ondes sonores créent une interférence **constructive**, c'est-à-dire qu'elles se chevauchent parfaitement, le son que nous entendrons à ce moment précis sera **plus fort**.

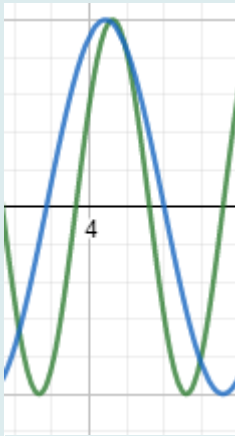


Image 1: Ondes créant une interférence constructive

- Si les ondes sonores créent une interférence **destructive**, c'est-à-dire que leurs pics sont opposés, le son que nous entendrons sera **plus léger**.

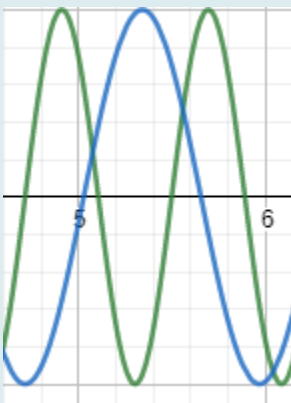


Image 2: Ondes créant une interférence destructive

- Les deux ondes étant constantes, on entend un battement régulier si on les écoute toutes les deux en même temps.



Regarde cette vidéo de SMUPhysics qui en fait la démonstration:

<https://www.youtube.com/watch?v=V8W4Djz6jnY>.

Identité Trigonométrique

Les ondes sonores peuvent être représentées graphiquement par des fonctions sinusoïdales. Pour ce faire, il faudra se familiariser avec la notion d'identité trigonométrique. Nous commencerons par les triangles car tu connais déjà le théorème de Pythagore.

Voici un triangle rectangle avec un angle θ :

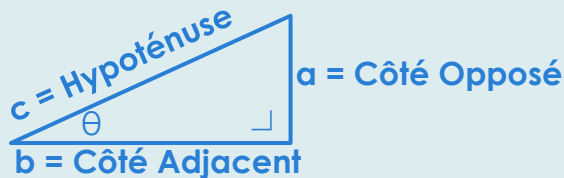


Image 3: Triangle représentant l'identité trigonométrique

Voici les fonctions trigonométriques de ce triangle :

- $\sin(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{a}{c}$
- $\cos(\theta) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{b}{c}$
- $\tan(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{a}{b}$

Grâce au théorème de Pythagore, nous pouvons utiliser cette formule pour calculer l'Hypothénuse : $a^2 + b^2 = c^2$.

Cette formule peut être simplifiée en divisant le tout par c^2 .

- $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$
- $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

En utilisant les fonctions trigonométriques, nous pouvons déduire que:

- $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
- $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$
- $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$

Voici une formule de l'identité trigonométrique tu devras retenir :

La notion d'identité trigonométrique est complexe et plusieurs formules ont été démontrées, comme celle qui suit, qui est utilisée pour représenter la fréquence de battement:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{a + b}{2} \right) * \cos \left(\frac{a - b}{2} \right)$$

Commençons par un exemple simple.

Si nous décidons que $a = 5x$ et $b = 4x$, voici à quoi cela ressemble en utilisant une calculatrice graphique:

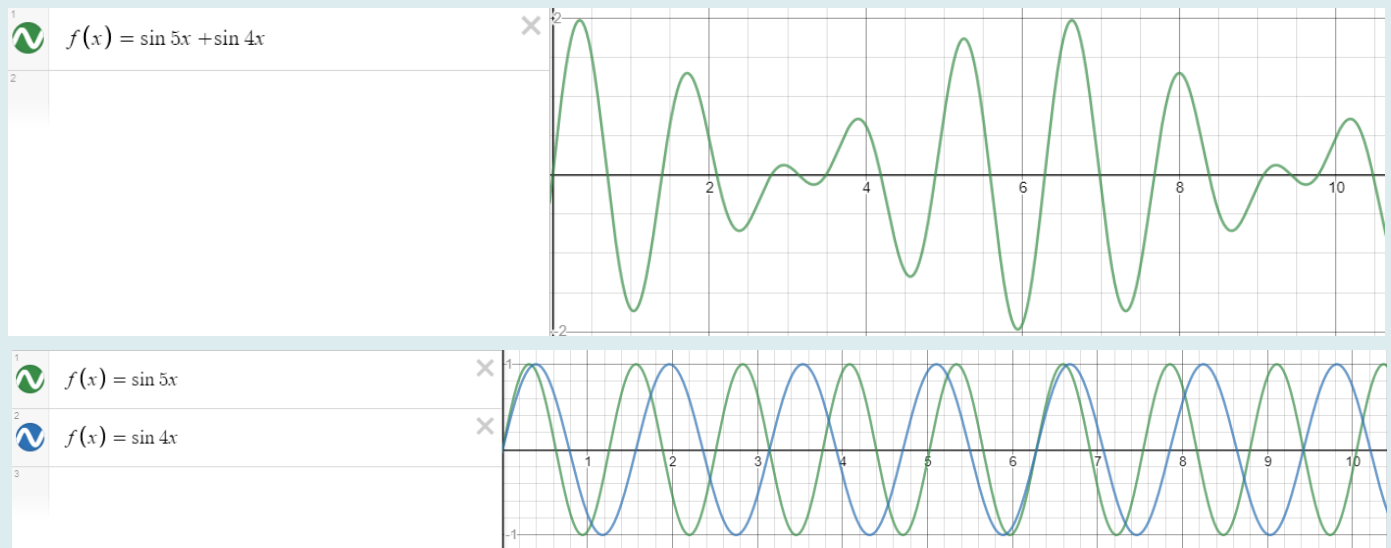


Image 4: Représentation graphique de l'identité trigonométrique

Voici ce que nous voyons :

- Il existe un cycle constant
- Lorsque deux pics sont proches l'un de l'autre, le son devient plus aigu
- Lorsqu'un sommet et un creux sont opposés, le son se rapproche de 0

Voyons cela avec une note de musique. La note La, ou A, a une fréquence de 440 Hz. Son équation trigonométrique est:

$$\sin(440 * 2\pi * x)$$

Nous avons donc :

- $a = (450 * 2\pi * x)$ afin d'avoir une note proche de A (La)
- $b = (440 * 2\pi * x)$, A (La).

Appliquons l'équation pour calculer le battement:

- $\sin(450 * 2\pi * x) + \sin(440 * 2\pi * x) = 2\sin(445x * 2\pi) + \cos(5x * 2\pi)$

Voici ce à quoi ça ressemble lorsqu'on utilise une [calculatrice graphique](#):

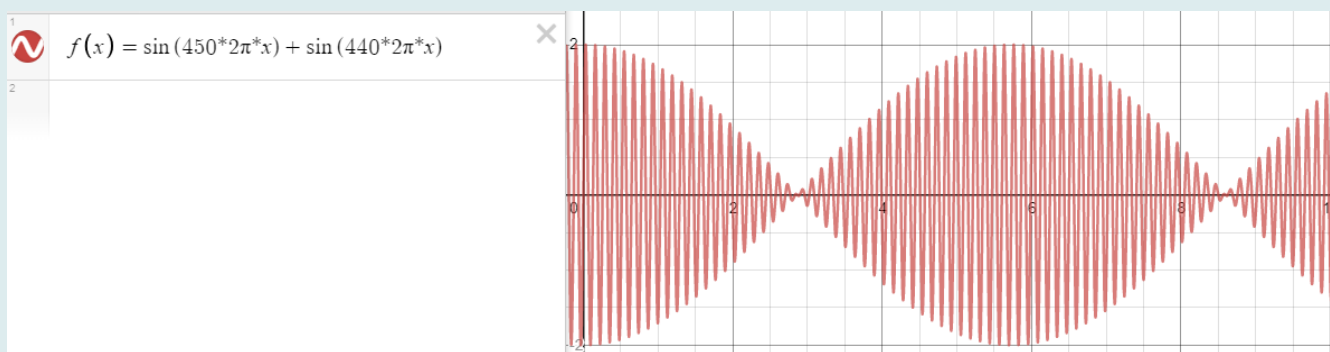


Image 5: Représentation graphique de l'équation pour calculer le battement

On constate que, une fois réunies, les ondes qui apparaissent sur l'outil montrent un battement comme celui entendu lors de l'expérience avec deux diapasons.

TÂCHE

Fais l'expérience !

Voici un tableau avec les différentes fréquences de certaines notes de musique:

C	D	E	F	G	A	B
261.63 Hz	293.66 Hz	329.63 Hz	349.23	392 Hz	440 Hz	493.88 Hz

Exercice 1 : D (Ré) et C (Do)

- Quelle est l'équation si nous jouons D et C ensemble ?
- Prends une capture d'écran du graphe sur Desmos ou GeoGebra

Exercice 2: A and G

- Quelle est l'équation si nous jouons A et G ensemble ?
- Prends une capture d'écran du graphe sur Desmos ou GeoGebra

Prends deux diapasons et fais-en l'expérience en classe pour comparer les sons !

POUR EN SAVOIR PLUS...

Vidéo Ted-ED sur la musique et les maths (Sous-titrée) :

<https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY>

Vidéo sur la provenance des sons (anglais) :

https://www.youtube.com/watch?v=i_0DXxNeaQ0

Vidéo sur l'utilisation des mathématiques dans la musique (anglais) :

<https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug>

Une leçon sur la fréquence de battement (anglais) :

<https://www.youtube.com/watch?v=Ca91iOVGd9A>

Vidéo sur la physique derrière la fréquence de battement (anglais) :

<https://www.youtube.com/watch?v=lQ1q8XvOW6g>

Explication sur le lien entre la trigonométrie et la musique (anglais) :

<http://www->

[math.bgsu.edu/~zirbel/sound/Trigonometric%20functions%20and%20sound.pdf](http://www-math.bgsu.edu/~zirbel/sound/Trigonometric%20functions%20and%20sound.pdf)

Vidéo de C'est pas sorcier sur la provenance des sons (Français) :

<https://www.youtube.com/watch?v=llhJcfKNk3I>

Vidéo de ScienceEtonnante sur les mathématiques de la musique (Français) :

<https://www.youtube.com/watch?v=cTYvCpLRwao>