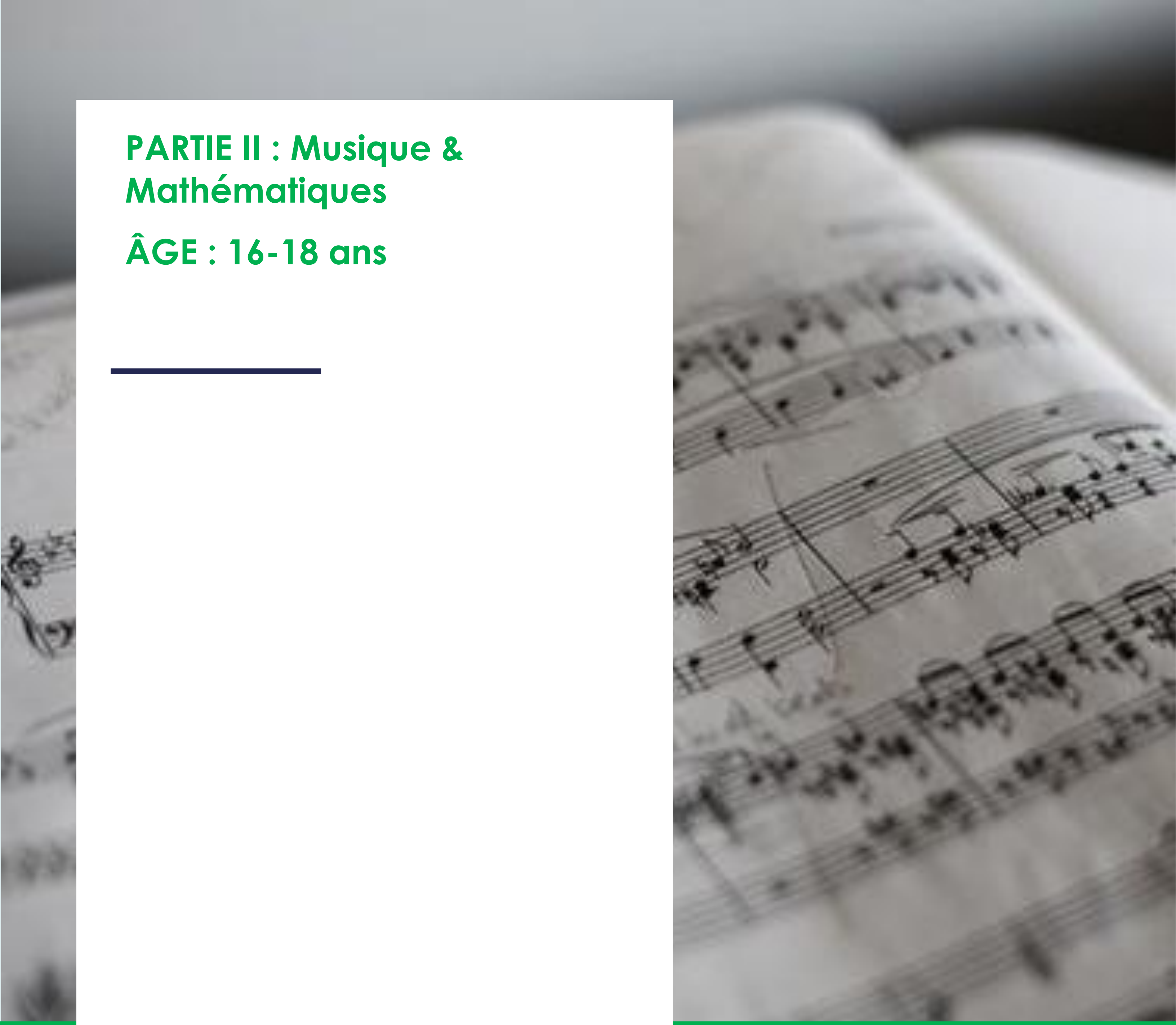


PARTIE II : Musique & Mathématiques

ÂGE : 16-18 ans

OUTIL 19 : RAPPORTS DE FRÉQUENCES DES NOTES DE MUSIQUE

C.I.P. Citizens In Power

TheArtOfMaths

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : Rapports de fréquences des notes de musique

Âge : 16-18 ans

Durée : 2 heures

Concepts mathématiques : Intervalles, fréquences, rapports, logarithmes.

Concepts artistiques : Les mathématiques utilisées dans la musique.

Objectifs généraux : Montrer que l'addition d'intervalles est égale à la multiplication des fréquences et proposer une méthode pour décrire tout intervalle ou son rapport en termes d'octave, de quinte parfaite et de tierce majeure, une valeur numérique concrète pour les rapports des accords (une définition des Cents).

Instructions et Méthodologies : L'outil est basé sur une introduction générale sur la relation entre les mathématiques et la musique, mais il devient ensuite un peu plus difficile dans la section sur les mathématiques. Nous avons tenté de le rendre aussi léger et compréhensible que possible à l'aide d'images, d'exemples, de photos et d'une vidéo Youtube.

Ressources : Vidéos Youtube, livres, revues, images et glossaire

Conseils pour l'éducateur : Vous pouvez commencer par poser des questions générales pour susciter leur intérêt sur le lien entre les mathématiques et la musique. Vous pouvez ensuite lire rapidement l'introduction avant de passer aux maths.

Résultats et Compétences ciblés : Réaliser que les intervalles et les relations entre les notes peuvent être réduits à des combinaisons des trois premières harmoniques

Compte-rendu et évaluation :

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 éléments que vous avez appris :	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Introduction

La musique et les mathématiques sont liées l'une à l'autre. On dit même que les mathématiques peuvent nous aider à expliquer l'expérience musicale. Grandin, Peterson et Shaw (1998) affirment que la musique améliore les capacités de raisonnement, qui sont cruciales pour l'apprentissage de concepts mathématiques tels que le raisonnement proportionnel et le développement des compétences en géométrie. Rauscher et al. (1997) affirment que la musique favorise le développement de ces capacités de raisonnement et surtout la reconnaissance des schémas et l'utilisation de la logique.

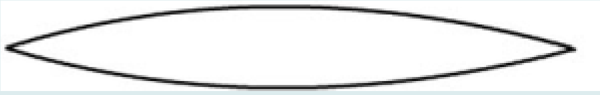
Pythagore, le philosophe grec de l'Antiquité, a réalisé, dès le 6e siècle avant J.-C., que différents sons peuvent être produits avec des poids et des vibrations différents. Cela l'a conduit à découvrir que la hauteur d'une corde vibrante est proportionnelle à sa longueur et peut être contrôlée par celle-ci. Les cordes dont la longueur est réduite de moitié sont plus hautes d'une octave que l'original. Ainsi, plus la corde est courte, plus la hauteur est élevée. Pythagore a également découvert que les notes de certaines fréquences sonnent mieux avec plusieurs fréquences de cette note. Par exemple, une note de 220 Hz sonne mieux avec des notes de 440 Hz, 660 Hz, etc. Vous pouvez donc déjà voir que, des bases à la synthèse la plus compliquée, les mathématiques sont entrelacées avec la musique.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Fréquences, intervalles et rapports en musique

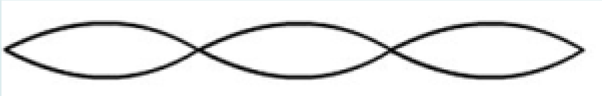
Certains concepts mathématiques courants liés à la musique sont notamment les fréquences, les gammes, les intervalles et les tons.

Pythagore a fait ses découvertes en "jouant" avec une corde tendue. Ci-dessous, on peut voir une corde tendue attachée à ses extrémités. Lorsqu'on la touche, elle vibre. Lorsqu'un instrument vibre, une onde de pression qui se propage dans l'air atteint notre oreille sous la forme d'un son.



Pythagore a décidé de diviser cette corde en deux parties et a touché chaque extrémité à nouveau. Le son produit était le même, mais plus aigu (car c'était la même note une octave plus haut) :

Pythagore a décidé de continuer. Il a expérimenté avec la corde divisée en 3 parties :



C'est alors qu'il a réalisé qu'un son nouveau, différent, était apparu. Cette fois, ce n'était pas la même note une octave plus haut, mais une note différente, qui devait recevoir un autre nom. Ce son, en plus d'être différent, fonctionnait bien avec le précédent, créant une harmonie agréable à l'oreille, car ces divisions montraient les relations mathématiques **1/2** et **2/3** et apparemment notre cerveau aime les relations logiques.

Ainsi, il a continué à faire des subdivisions et des combinaisons de sons en créant mathématiquement des gammes qui, par la suite, ont stimulé la création d'instruments de musique capables de jouer ces gammes. De nos jours, les notes ont

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

reçu les noms que nous connaissons aujourd'hui. Les cultures ont créé leurs propres gammes. Par exemple, les Chinois ont créé la gamme pentatonique, tandis que la culture occidentale a adopté un tempérament égal à 12 tons, connu sous le nom de gamme tempérée ou gamme chromatique.

Sources: http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/ and http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html

Glossaire

Pythagore : Pythagore de Samos[a] (c. 570 - c. 495 av. J.-C.) était un philosophe grec de l'Antiquité ionienne et le fondateur éponyme du pythagorisme. Ses enseignements politiques et religieux étaient bien connus dans la Grande-Grèce et ont influencé les philosophies de Platon, d'Aristote et, à travers elles, la philosophie occidentale. La connaissance de sa vie est obscurcie par la légende, mais il semble qu'il soit le fils de Mnesarchus, un graveur de sceaux de l'île de Samos. Les érudits modernes ne sont pas d'accord sur l'éducation et les influences de Pythagore, mais ils s'accordent à dire que, vers 530 avant J.-C., il s'est rendu à Croton, où il a fondé une école dans laquelle les initiés juraient de garder le secret et menaient une vie communautaire et ascétique. Ce mode de vie comportait un certain nombre d'interdictions alimentaires, dont le végétarisme, selon la tradition, mais les spécialistes modernes doutent qu'il ait jamais préconisé un végétarisme complet.

Traduit de l'anglais : https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras

Rapport : En mathématiques, un rapport est une relation entre deux nombres indiquant combien de fois le premier nombre contient le second[1]. Par exemple, si un bol de fruits contient huit oranges et six citrons, alors le rapport entre les oranges et les citrons est de huit à six (soit 8:6, ce qui équivaut au rapport 4:3). De même, le rapport citrons/oranges est de 6:8 (ou 3:4) et le rapport oranges/nombre total de fruits est de 8:14 (ou 4:7).

Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Ratio

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Fréquence : La fréquence est le nombre d'occurrences d'un événement qui se répète par unité de temps. La période est la durée d'un cycle dans un événement répétitif, donc la période est la réciproque de la fréquence[2]. Par exemple : si le cœur d'un nouveau-né bat à une fréquence de 120 fois par minute, sa période - l'intervalle de temps entre les battements - est d'une demi-seconde (60 secondes divisées par 120 battements). La fréquence est un paramètre important utilisé en science et en ingénierie pour spécifier le rythme des phénomènes oscillatoires et vibratoires, tels que les vibrations mécaniques, les signaux audio (son), les ondes radio et la lumière.

Traduit de l'anglais : https://en.wikipedia.org/wiki/Frequency

Glossaire

Octave : En musique, l'octave est l'intervalle qui sépare deux notes de même nom. Divisée en plusieurs sous-intervalles, elle forme les limites des gammes.

L'octave ascendante correspond à la division par deux de la longueur d'une corde vibrante. La fréquence fondamentale du son le plus aigu est le double de celle du plus grave : longueur de corde et fréquence sont inversement proportionnelles.

L'octave est l'intervalle le plus consonant. Son renversement est l'unisson.

On utilise l'octave en électroacoustique comme unité logarithmique d'intervalle de fréquences.

Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Octave_(musique)

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Intervalle (music): En théorie musicale, un intervalle est la différence de hauteur entre deux sons. Un intervalle peut être décrit comme horizontal, linéaire ou mélodique s'il se rapporte à des sons qui se succèdent, comme deux hauteurs adjacentes dans une mélodie, et vertical ou harmonique s'il se rapporte à des sons qui se succèdent, comme dans un accord. Dans la musique occidentale, les intervalles sont le plus souvent des différences entre des notes d'une gamme diatonique. Le plus petit de ces intervalles est un demi-ton. Les intervalles plus petits qu'un demi-ton sont appelés micro-tons. Ils peuvent être formés en utilisant les notes de divers types de gammes non diatoniques. Certains des plus petits sont appelés commas et décrivent de petits écarts, observés dans certains systèmes d'accord, entre des notes équivalentes du point de vue enharmonique, comme C♯ et D♭. Les intervalles peuvent être arbitrairement petits, et même imperceptibles pour l'oreille humaine.

Traduit de l'anglais : https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_(music)

Tierce mineure : Dans la théorie musicale de la culture occidentale, une tierce mineure est un intervalle musical qui comprend trois demi-tons.

Tierce majeure : Dans la musique classique de la culture occidentale, une tierce est un intervalle musical entre deux notes séparées par trois degrés, et la tierce majeure est une tierce s'étendant sur quatre demi-tons. Avec la tierce mineure, la tierce majeure est l'une des deux tierces les plus courantes. Elle est qualifiée de majeure parce qu'elle est la plus grande des deux : la tierce majeure s'étend sur quatre demi-tons, la tierce mineure sur trois.

Quarte : l'intervalle entre une note de musique et une autre, qui est de quatre degrés par rapport à la première, à l'intérieur d'une gamme.

Quinte parfaite : l'intervalle entre une note de musique et une autre, qui est de cinq degrés par rapport à la première, à l'intérieur d'une gamme.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Fréquence : quantité physique indiquant le nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps donné.

Hauteur : les sons à haute fréquence transmis à l'oreille humaine, généralement au-dessus de 5 KHz.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les maths dans les notes de musique

- ✓ Le son est produit par une vibration continue de l'air.
- ✓ Le nombre de vibrations par seconde est appelé fréquence qui se mesure en Hertz et la fréquence du son détermine sa hauteur (voir glossaire) <plus la fréquence est élevée, plus la hauteur est élevée>.
- ✓ Les notes de musique sont des sons de certaines fréquences jouant un ordre croissant de fréquences qui produiront une gamme musicale.
- ✓ Voici l'explication de la différence entre deux hauteurs de son. Considérons deux hauteurs (fréquences) qui sont séparées par une distance arbitraire, i. Par conséquent, si nous avons nos deux fréquences, f1 et f2, elles sont séparées par la distance d'intervalle i1. (L'intervalle est la combinaison de deux de ces sons).
- ✓ Maintenant, le rapport des deux fréquences (f2 / f1) peut être défini comme r1 et peut être exprimé comme :

$$f2 \div f1 = r1$$

- ✓ Si nous avons un deuxième ensemble de fréquences, f3 et f4, l'intervalle entre elles peut être défini comme i2. Le rapport entre f3 et f4 (étant f4/f3) serait défini comme r2. Si i1 et i2 sont le même intervalle, ce qui signifie que la même distance de fréquence existe entre f1 et f2 ainsi que f3 et f4, alors les rapports seront égaux. Cela ne nous apprend rien sur le registre des fréquences, seulement que les intervalles sont similaires (nous ne savons pas s'ils sont dans le même registre). Nous exprimerions cela comme suit:

$$f2 \div f1 = r1$$

$$f4 \div f3 = r2$$

$$i1 \cong i2 \; if \; and \; only \; if \; r1 = r2$$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

- Si nous avons trois fréquences f1, f2 et f3. L'intervalle entre f1 et f2 est i1, l'intervalle entre f2 et f3 est i2 et le plus grand intervalle entre f1 et f3 est i3. En appliquant les mêmes concepts de rapports calculés dans les exemples précédents, nous obtenons :

$$f2 \div f1 = r1$$

$$f3 \div f2 = r2$$

$$f3 \div f1 = r3$$

$$\therefore f2 = r1 \cdot f1 \text{ and } f3 = r2 \cdot f2$$

$$Substituting\ in\ for\ f2$$

$$f3 = r2 \cdot (r1 \cdot f1)$$

$$f3 \div f1 = r2 \cdot r1$$

$$substituting\ r3\ for\ f3 \div f1$$

$$r3 = r2 \cdot r1 \text{ and } i3 = i1 + i2$$

- Nous montrons donc que l'addition d'intervalles est égale à la multiplication des rapports de fréquence.

$$since\ r3 = r2 \cdot r1$$

$$\log(r3) = \log(r2) + \log(r1)$$

$$since\ i3 = i2 + i1\ we\ can\ show\ that$$

$$i3 = \log(r3) \text{ and } i2 = \log(r2) \text{ and } i1 = \log(r1)$$

- Nous avons maintenant un nombre défini pour la valeur de i. C'est le logarithme du rapport des fréquences composant l'intervalle en question. Le rapport des fréquences pour un intervalle donné sera positif, mais il peut être

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

supérieur ou inférieur à 1. Si la valeur de r est supérieure à 1, alors nous savons que 0 < f1 < f2 et l'intervalle est ascendant (parce que f2 est supérieur à f1). De même, si la valeur de 0 < r < 1, alors 0 < f2 < f1 et nous savons que l'intervalle est décroissant. Par conséquent, le logarithme d'un intervalle ascendant (avec r > 1) sera positif tandis que le logarithme d'un intervalle descendant (avec r < 1) sera négatif.

- ✓ Au piano, jouer Do et Re ensemble est décrit comme un deuxième intervalle majeur parce que Re est la deuxième note de la gamme -> ensuite, c'est un troisième intervalle majeur parce que Mi est la troisième note de la gamme -> de Do à Fa, on appelle cela un quatrième intervalle parfait -> de Do à Sol, qui est la cinquième note, on appelle cela un cinquième intervalle parfait et ainsi de suite -> enfin, un Do et un Re joués ensemble sont appelés une octave (regarde maintenant https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug jusqu'à la minute 2:08).
- ✓ Si nous savons comment déterminer le rapport d'un intervalle formé à partir d'autres rapports, par exemple, si nous savions qu'un intervalle (r1) a un rapport de 5/4 (appelé tierce majeure) et un autre (r2) le rapport 6/5 (une tierce mineure) nous pouvons calculer le rapport de leur somme. Ainsi, une tierce majeure (5/4) plus une tierce mineure (6/5) donne :

$$r1 \cdot r2 = r3$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)$$

- ✓ Le rapport 3/2 est une quinte parfaite. Ainsi, nous avons mathématiquement prouvé à partir d'un concept simple qu'une tierce majeure plus une tierce mineure donne une quinte parfaite ! Un petit rappel sur les rapports de hauteur de ton des petits nombres entiers pour que tu puisses essayer d'autres exemples par toi-même :

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

2/1	Octave
3/2	Quinte parfaite
4/3	Quarte parfaite
5/3	Sixte majeure
5/4	Tierce majeure
6/5	Tierce mineure

- ✓ Nous avons pris le concept non quantifié d'un intervalle, en avons dérivé une valeur numérique réelle à partir du rapport des fréquences, et avons utilisé notre formule pour calculer le rapport d'un intervalle résultant. Dans les pages qui suivent, nous allons dériver des formules pour calculer les fréquences, définir ce qu'est une note, déterminer une méthode pour trouver la composition d'un intervalle, et montrer que les gammes sont des fonctions modulaires (et comment les utiliser).
- ✓ Tous les intervalles peuvent être décrits comme différentes combinaisons de l'octave, de la quinte parfaite et de la tierce majeure - les trois premières harmoniques.
- ✓ En conséquence :
  - o les rapports d'intervalles sont toujours supérieurs à 1 et inférieurs à 2 ;
  - o Un rapport de 2:1 est une octave ; tous les autres intervalles sont plus petits qu'une octave.
- ✓ En suivant la série des harmoniques, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :
  - o 1:1 est notre ton de départ, 2:1 est une octave au-dessus, 3:1 est une quinte au-dessus de l'octave, 4:1 est la deuxième octave et 5:1 est une tierce dans la deuxième octave.
- ✓ Nous allons maintenant essayer de trouver un moyen d'écrire la quinte et la tierce comme des fréquences dans la première octave. Nous pouvons

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

considérer comme acquis que le rapport doit être supérieur à 1:1 et inférieur à 2:1, ce qui correspond à la façon dont l'octave est exprimée.

- ✓ Par conséquent, nous pouvons diviser le rapport de fréquence par le nombre d'octaves nécessaires, ce qui nous permet d'atteindre la gamme de la première octave.

o Par exemple, le rapport 3:1 constitue une quinte parfaite, tombant dans la seconde octave. Par conséquent, nous ne devrions la réduire que d'une octave afin d'obtenir un rapport entre 1 et 2. Cela peut s'exprimer comme suit :

Exprimons avec la lettre q/1 un intervalle où q doit toujours être supérieur à 2 et en même temps un nombre premier. Pour obtenir une réduction d'une octave, il faut trouver un nombre n qui obéit à la formule suivante :

$$1 < \frac{q}{2^n} < 2$$

$$\Rightarrow \quad 2^n < q < 2 \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow \quad 2^n < q < 2^{n+1}$$

- ✓ Nous avons maintenant montré qu'un rapport premier peut être transposé en une seule octave.
- ✓ Les trois premiers intervalles de base résultant de l'application de la formule sont 2:1 octave, 3:2 quinte parfaite et 5:4 tierce majeure.
- ✓ Te souviens-tu que la longueur de l'intervalle est donnée par le logarithme de son rapport ? Par exemple, nous pouvons utiliser des variables pour exprimer la longueur des trois premiers intervalles de base :

$$a = \log(2)$$

$$b = \log(3/2)$$

$$c = \log(5/4)$$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

- ✓ Maintenant que nous avons exprimé les variables a, b et c comme la longueur de l'intervalle (qui peut être estimée par le logarithme du rapport des fréquences), nous allons ensuite travailler sur les tâches suivantes afin de prouver une méthode permettant de déterminer la composition de tout autre intervalle comme une combinaison de ces trois-ci.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

TÂCHE

Tâche principale : Prouver que l'intervalle éventuel pourrait être déterminé comme une combinaison des intervalles a, b et c définis dans le paragraphe précédent.

Conseil 1 : Dans un premier temps, n'oublie pas que nous avons déjà défini la longueur des trois intervalles de base comme

a= log (2)
b= log (3/2)
c=log (5/4)

Conseil 2 : Pour commencer, utilise trois nouvelles variables, à savoir m, n et s à multiplier par rapport à nos originaux (a, b et c). Considérons que la somme de ces variables correspondra à la longueur de l'intervalle inconnu que nous essayons de déterminer ;

Ainsi, la longueur du nouvel intervalle peut être exprimée comme :

ma + nb + sc

Tâches intermédiaires :

En répondant à ces questions intermédiaires, tu pourras répondre à la question principale de cette tâche ("Prouve que l'intervalle éventuel pourrait être déterminé comme une combinaison des intervalles a, b et c définis dans le paragraphe précédent")

(a) Considérant que la longueur de ce nouvel intervalle est ma+nb+sc, comment pourrait-on définir son rapport ?

(b) Sur la base de tes réponses aux questions précédentes, peux-tu estimer la somme d'une quinte parfaite et d'une tierce majeure ?

Conseil : tu peux déterminer une quinte parfaite avec la variable b et une tierce majeure avec la variable c.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

POUR EN SAVOIR PLUS...

Vidéo "Les mathématiques de la musique" (en anglais) :

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

TED TALK : Musique et mathématiques : Le génie de Beethoven

https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY

Pages web:

Math central : http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html

Kent State University : https://musicedmasters.kent.edu/the-connection-between-music-and-mathematics/

Mathématiques et musique : http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/

Leçons sur les mathématiques et la musique : https://www.notreble.com/buzz/2010/02/04/math-and-music-intervals/

Livres :

Grandin, T., Peterson, M., & Shaw, G. L. (1998). Spatial- temporal versus language-analytic reasoning: The role of music training. Arts Education Policy Review, 99(6), 11-15.

Kung, D. (2013). How Music and Mathematics Relate. The Great Courses, Virginia. Retrieved from http://www.chrysalis-foundation.org/1373_MusicandMath_8-28.pdf

Rauscher,R.H.,Shaw,G.I.,Levine,I. J.,Wright,E.L.,Dennis, W. R., & Newcomb, R. I. (1997). Music training causes long-term enhancement of preschool children's spatial-temporal reasoning. Neurological Research, 19, 2-8.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.