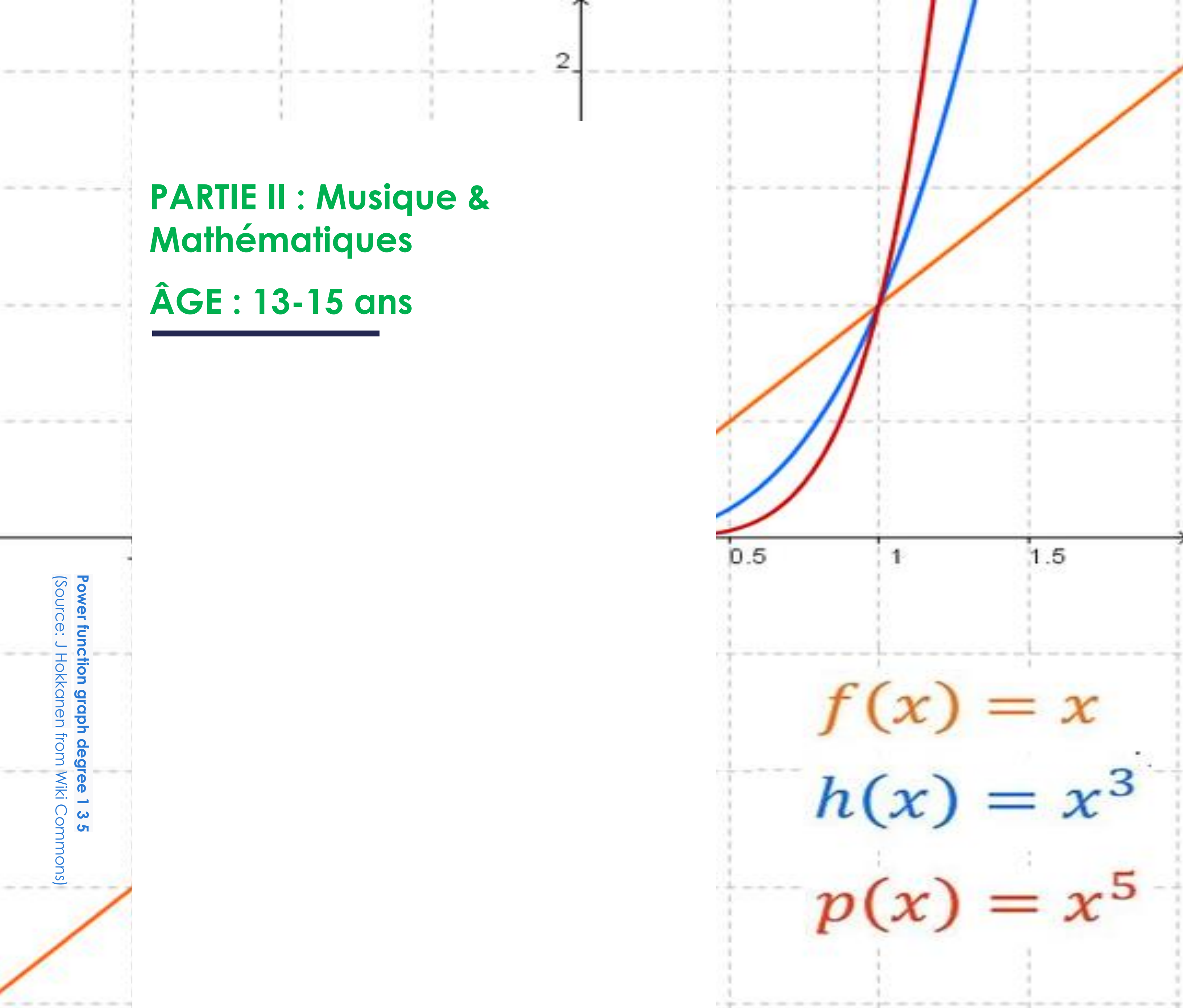
PARTIE II : Musique & Mathématiques

ÂGE : 13-15 ans



Power function graph degree 1 3 5
(Source: J Hokkanen from Wiki Commons)

OUTIL 18: PUISSANCES DANS LA GAMME TEMPÉRÉE

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : Puissances dans la gamme tempérée

Âge : 13 – 15 ans

Durée : 3 heures

Concepts mathématiques : Puissances : propriétés et opérations

Concepts artistiques : gamme tempérée à 12 intervalles, notes de musique et fréquences des notes de musique

Objectifs généraux : Comprendre le concept des puissances, leurs propriétés, et effectuer des opérations impliquant des puissances

Instructions et Méthodologies : Il sera utile d'utiliser une calculatrice scientifique (il peut s'agir de la calculatrice graphique en ligne Desmos), afin que l'élève puisse apprendre à calculer les exposants dans une calculatrice et soit capable de vérifier les solutions des tâches.

Ressources : Ordinateur avec une connexion internet ; Accès au site web : https://www.desmos.com/.

Conseils pour l'éducateur : Commencez par donner un ou deux exemples de chaque règle opérationnelle avec une difficulté croissante pour montrer comment procéder, afin que les élèves puissent ensuite résoudre les tâches par eux-mêmes.

Résultats et Compétences ciblés :

A l'issue de cet outil, l'élève sera capable de:

- Maîtriser les règles des puissances;
- Calculer la valeur d'expressions numériques en utilisant les règles de puissances.

Compte-rendu et évaluation :

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 éléments que vous avez appris :	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Introduction

Les mathématiques et la musique ont toujours été liées. Toutefois, ce n'est qu'au sixième siècle avant J.-C. que l'on a découvert les premières preuves de cette relation. Pythagore a comparé le son produit par des marteaux de différentes tailles, utilisés par les forgerons, au son du monocorde, dont on pense que Pythagore était l'inventeur.

Cette comparaison a permis à Pythagore de découvrir et d'améliorer les raisonnements mathématiques derrière la production de ces sons grâce à l'étude des sons produits par le monocorde. Il a divisé la corde en deux parties égales, puis en trois parties égales, et ainsi de suite. Il a fait correspondre mathématiquement les sons en fonction de ces subdivisions et a créé la gamme pythagoricienne, dans laquelle chaque note entretient une relation bien définie avec les autres.

La gamme pythagoricienne est la base de la gamme diatonique, composée de sept notes, qui est elle-même le fondement des autres gammes utilisées dans la musique occidentale. L'une des gammes qui a émergé dans la culture occidentale est la gamme à 12 intervalles de tempérament égal, connue sous le nom de gamme tempérée ou échelle chromatique, dans laquelle il y a une plus grande consonance entre les notes.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les puissances dans la gamme tempérée

Au sixième siècle avant J.-C., Pythagore a utilisé la monocorde pour étudier la relation entre la longueur de la corde vibrante et le son musical qu'elle produit. Imaginons une corde tendue et fixée aux deux extrémités. Lorsqu'une extrémité de cette corde est touchée, elle vibre et produit une note que l'on appelle une note fondamentale. Pythagore a alors divisé la corde en deux parties égales, puis en trois et ainsi de suite. En continuant à subdiviser la corde, il obtient les harmoniques de la note fondamentale et, en combinant mathématiquement les sons, il crée des gammes qui donnent des notes naturellement liées les unes aux autres.

En conservant les mêmes intervalles (rapport numérique de 3:2) entre les notes et en partant de l'intervalle d'octave donné par les fréquences $\mathbf{f_0}$et $\mathbf{2f_0}$, la gamme diatonique pythagoricienne peut être formée. Les notes obtenues, communément appelées Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La et Si, forment la gamme dite diatonique de sept notes qui a été pendant des siècles la base d'autres gammes.

À partir du Moyen Âge, on a remarqué que certaines notes étaient trop proches les unes des autres, par exemple, les notes B (Si) et C (Do). Il a donc été décidé de créer une échelle dans laquelle l'intervalle de fréquence entre toutes les notes aurait le même rapport. La valeur de ce rapport est égale à l'intervalle entre les notes C (Do) et B (Si), un demi-ton. C'est ainsi que la gamme tempérée à 12 intervalles fut formée et améliorée par J. S. Bach.

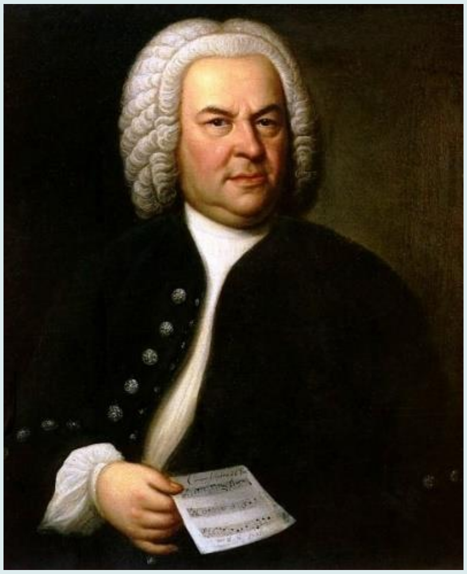


Image 1 - Johann Sebastian Bach
(Source:https://commons.wikimedia.org/wiki/Johann_Sebastian_Bach)

Contrairement à Pythagore qui avait formé la gamme diatonique en obtenant 7 notes par une division qui peut être représentée par des

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

fractions, cette nouvelle gamme peut être représentée par des puissances de 2 et résulter en 12 notes : C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A# et B.

Note	Demi-ton	Gamme tempérée
C (Do)	0	$2^0 = 1$
C#	1	$2^{1/12}$
D (Ré)	2	$2^{2/12}$
D#	3	$2^{3/12}$
E (Mi)	4	$2^{4/12}$
F (Fa)	5	$2^{5/12}$
F#	6	$2^{6/12}$
G (Sol)	7	$2^{7/12}$
G#	8	$2^{8/12}$
A (La)	9	$2^{9/12}$
A#	10	$2^{10/12}$
B (Si)	11	$2^{11/12}$
C (octave)	12	$2^1 = 2$

Table 1: Octave division in equal temperament

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Glossaire

 # : Symbole appelé "dièse" qui indique l'élévation d'un demi-ton dans une note.

Échelle diatonique : une division de l'octave en sept hauteurs.

Fréquence : une valeur physique indiquant le nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps donné.

Fréquence fondamentale : la fréquence la plus basse et la plus haute de la série harmonique d'un son.

Note Fondamentale : la note principale d'un accord, dont découlent les autres accords.

Harmonique : le son d'une série qui constitue une note.

Monochorde : un instrument de musique ancien composé d'une seule corde sur une caisse de résonance.

Octave: l'intervalle entre les notes de musique avec la moitié ou le double de sa fréquence.

Gamme: une séquence de tonalités ordonnée par la fréquence vibratoire des sons (généralement du son de la fréquence la plus basse au son de la fréquence la plus haute).

Demi-ton: intervalle qui est d'un demi-ton et qui constitue la distance minimale dans le système musical occidental traditionnel.

Gamme tempérée: division de l'octave en douze demi-tons égaux ; également appelée échelle chromatique.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les Maths dans la gamme tempérée

Comme nous l'avons vu précédemment, la gamme tempérée a été divisée en 12 notes. La hauteur de la note suivante est obtenue en multipliant la valeur de la hauteur de la note précédente par des puissances de 2, c'est-à-dire : $\mathbf{2^{1/12}}$.

Exemple: $\mathbf{accord\ tempéré\ de\ la\ note\ D} = \mathbf{2^{1/12}} \times \mathbf{accord\ tempéré\ de\ la\ note\ c\#} = \mathbf{2^{1/12}} \times \mathbf{2^{1/12}} = \mathbf{2^{2/12}}$

Pour mieux comprendre les puissances, examinons ce concept et ses propriétés.

Puissances:

Dans une multiplication, lorsque les facteurs sont égaux, on peut les représenter sous forme de puissances.

Par exemple : $\mathbf{2 \times 2 \times 2 = 2^3}$

Base : 2 (le facteur répété);

Exposant : 3 (le nombre de répétitions de ce facteur).

Propriétés des puissances

Le **produit de puissances ayant la même base** donne une puissance ayant la même base et un exposant égal à la somme des exposants.

$$\mathbf{a^m \times a^n = a^{m+n}; a \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{Z} \text{ and } n \in \mathbb{Z}}$$

Exemples : $\mathbf{3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6}$ and $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

Le **produit de puissances avec le même exposant** donne une puissance avec le même exposant et une base égale à la multiplication des bases.

$$\mathbf{a^m \times b^m = (a \text{ x } b)^m; a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R} \text{ and } m \in \mathbb{Z}}$$

Exemples : $\mathbf{3^2 \times 4^2 = (3 \times 4)^2 = 12^2}$ and $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5} \times \frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{12}{25}\right)^2$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Le **quotient de puissances ayant la même base** donne une puissance ayant la même base et dont l'exposant est égal à la différence entre les exposants.

$$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}; a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; m \in \mathbb{Z}} \text{ and } \mathbf{n \in \mathbb{Z}}$$

Exemples : $\mathbf{3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2}$ and $\left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

Le **quotient de puissances avec le même exposant** donne une puissance avec le même exposant et avec une base égale à la division des bases.

$$\boldsymbol{a^m : b^m = (a : b)^m; a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}} \text{ and } \boldsymbol{m \in \mathbb{Z}}$$

Exemples : $\mathbf{3^2 : 4^2 = (3 : 4)^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ and $\left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5} : \frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{15}{20}\right)^2$

La puissance d'une puissance est une puissance ayant la même base dont l'exposant est égal au produit des exposants.

$$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{m \times n}; a \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{Z}} \text{ and } \boldsymbol{n \in \mathbb{Z}}$$

Exemples : $\mathbf{(4^3)^2 = 4^{3\times 2} = 4^6}$ and $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5\times 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Puissance de base 0: $\boldsymbol{0^n = 0}$ with $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$

Exemple : $\mathbf{0^4 = 0}$

Puissance d'exposant 0: $\boldsymbol{a^0 = 1}$ with $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}}$

Exemple : $\mathbf{5^0 = 1}$

Puissance de base 1: $\boldsymbol{1^n = 1}$ with $\boldsymbol{n \in \mathbb{Z}}$

Exemple: $\mathbf{1^4 = 1}$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Puissance d'exposant 1: $\boldsymbol{a^1 = a}$ with $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$

Exemple : $\mathbf{5^1 = 5}$

Puissance d'un exposant négatif:

$$\boldsymbol{a^{-n}} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^n}} \ \textbf{and} \ \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{-\boldsymbol{n}} = \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{n}}; \ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\} \text{ and } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Exemples: $\mathbf{3^{-4}} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^4}}$ and $\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{-\mathbf{2}} = \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{3^2}}{\mathbf{2^2}}$

Puissance d'un exposant rationnel:

$$\mathbf{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \ a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z} \ e \ n \in \mathbb{N}}$$

Exemples: $\mathbf{3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{3^5} = \sqrt{3^5}}$ and $\mathbf{5^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}}}$

Observations:

- Le signe d'une puissance avec une base positive et un exposant naturel est positif ;
- Le signe d'une puissance avec une base négative et un exposant naturel est :
  - positif si l'exposant est un nombre pair ;
  - négatif si l'exposant est un nombre impair.
- $(-a)^n = a^n$ si n est un nombre pair.
- $(-a)^n = -a^n$ si n est un nombre impair;
- $(a^m)^n$ et a^{m^n} affichent généralement des résultats différents parce que $(a^m)^n = (a^m) \times (a^m) \times \ldots \times (a^m)$ $(n$ times) and $a^{m^n} = a^{m \times m \times \ldots \times m}$ (n times)

  Exemple: $\mathbf{(5^2)^3 = 5^{2\times3} = 5^6}$ and $\mathbf{5^{2^3} = 5^8}$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

TÂCHES

TÂCHE 1

Calcule la valeur de:

1.1. $(-2)^3$ **1.2.** 1^5 **1.3.** $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ **1.4.** 0^{10} **1.5.** $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

TÂCHE 2

Complète les trous pour obtenir des déclarations correctes:

2.1. $4^3 \times 4^5 = 4^{\cdots}$;

2.2. $(-3)^{\cdots} \times (-3)^5 = (-3)^8$;

2.3. $5^7 : 5^5 = 5^{\cdots}$;

2.4. $\left(-\frac{3}{2}\right)^{\cdots} : \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$;

2.5. $\left(3^5\right)^{\cdots} = 3^{10}$;

2.6. $\left(\ldots^5\right)^3 = 3^{15}$;

2.7. $\left(\frac{27}{8}\right)^2 = \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)^6$

TASK 3

Transforme les puissances suivantes en une seule puissance avec un exposant positif:

3.1. $4^{-3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

3.2. $(3^{-2})^6 \times 5^{12}$

3.3. $\frac{5^{-8}}{5^3}$

3.4. $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-12}$

TASK 4

Calcule la valeur numérique de chacune des expressions suivantes, conformément aux règles de fonctionnement des puissances:

4.1. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-7} \times \left(2 + \frac{1}{2}\right)^7 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$;

4.2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} : 2^7 + (0,1)^{-1}$;

4.3. $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{12} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-12}}{\left(1-\frac{2}{5}\right)^{10}}$.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l’information contenue dans ce document.

POUR EN SAVOIR PLUS…

Échelle chromatique (anglais) :

https://www.youtube.com/watch?v=2gy6E3X2mKQ

Propriétés des exposants avec des produits (anglais)

https://www.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-exponents-radicals/pre-algebra-exponent-properties/v/exponent-properties-involving-products

Propriétés des exposants (anglais)

https://www.mathplanet.com/education/algebra-1/exponents-and-exponential-functions/properties-of-exponents

Les lois des exposants - NCERT Classe 7e solutions mathématiques (anglais)

https://www.youtube.com/watch?v=9VuLwo1FBys

La gamme tempérée à 12 intervalles (anglais)

http://www.tonalsoft.com/enc/number/12edo.aspx

Pourquoi 12 notes dans une Octave ? (anglais)

https://www.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/tuning/12.html

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.