PARTIE II : Musique & Mathématiques

ÂGE : 13-15 ans

"Sheet Music"
(Source: https://www.pexels.com/photo/black-and-white-keys-music-note-534283/)

OUTIL 16 : SUITES NUMÉRIQUES DANS LES SÉRIES HARMONIQUES

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

TheArtOf Maths

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : Suites numériques dans les séries harmoniques

Âge : 13-15 ans

Durée : 3 heures

Concepts mathématiques : Séries Numériques

Concepts artistiques : Séries harmoniques en musique, notes de musique et fréquences des notes de musique

Objectifs généraux : Comprendre le concept de "Suite numérique" et être capable de calculer certains de ses termes, ainsi que le $n^{\text{ième}}$ terme

Instructions et Méthodologies : Afin que les élèves puissent se faire une idée plus précise des modes de vibration, faites-leur regarder la vidéo "Modes sur une corde" (cf. "En savoir plus...") après l'explication correspondante.

Ressources : Un stylo ; la tâche 1 nécessite une boîte de papier, un élastique et deux crayons.

Conseils pour l'éducateur : Commencez par donner quelques exemples de séries numériques pour expliquer le concept, puis expliquez comment les compléter. Expliquez comment calculer les termes d'une série numérique avec un exemple.

Résultats et Compétences ciblés :

- À la fin de cet outil, l'élève sera capable de
- Identifier les séries numériques ;
- Calculer les termes des séries numériques ;
- Calculer le nième terme d'une série numérique

Compte-rendu et évaluation :

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 éléments que vous avez appris :	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Introduction

Les mathématiques et la musique ont toujours été liées. Toutefois, ce n'est qu'au sixième siècle avant J.-C. que l'on a découvert les premières preuves de cette relation. Pythagore a comparé le son produit par des marteaux de différentes longueurs, utilisés par les forgerons, au son du monocorde, dont on pense que Pythagore était l'inventeur.

Cette comparaison a permis à Pythagore de découvrir et d'améliorer les raisonnements mathématiques qui sous-tendent les sons grâce à l'étude des sons produits par le monocorde. Il a divisé la corde en deux parties égales, puis en trois parties égales, et ainsi de suite. Il a fait correspondre mathématiquement les sons en fonction des subdivisions qu'il effectuait et a créé la gamme pythagoricienne, dans laquelle chaque note entretenait une relation bien définie avec l'autre.

De nombreux peuples et cultures ont créé leurs propres gammes. Un exemple est celui du peuple chinois qui a créé la gamme pentatonique. La culture occidentale, cependant, a adopté un tempérament égal à 12 tons, connu sous le nom de gamme tempérée ou gamme chromatique.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Séries Harmoniques

Il est communément admis que les notes de musique naturelles sont les suivantes : A, B, C, D, E, F et G. Néanmoins, celles-ci sont représentées dans la plupart des pays par la convention de dénomination des solfèges Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si selon la correspondance suivante : C-Do, D-Re, E-Mi, F-Fa, G-Sol, A-La et B-Si. La définition de ces notes a été largement influencée par les Mathématiques.

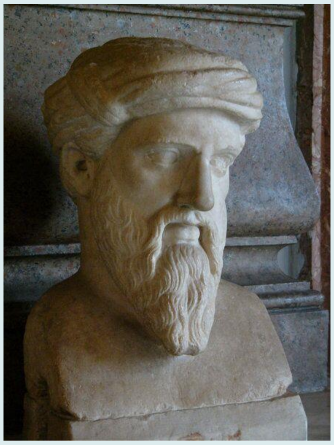


Fig. 1 – Buste de Pythagore
(Source:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg)

Au sixième siècle avant J.-C., Pythagore s'est rendu compte qu'en faisant vibrer une corde, non seulement celle-ci vibrait dans toute sa longueur, mais elle formait aussi une série de nœuds, qui se divisent en sections plus petites, les partiels, qui vibrent à des fréquences supérieures à la fondamentale.

Pour étudier la relation entre la longueur de la corde vibrante et le son musical produit par celle-ci, il a utilisé un monocorde.

La figure 2 montre les nœuds et les partiels des quatre premières fréquences d'une série. Pour faciliter la compréhension, ils sont représentés séparément, mais sur une vraie corde, tous se chevauchent, ce qui génère un dessin complexe, similaire à la forme d'onde de l'instrument.

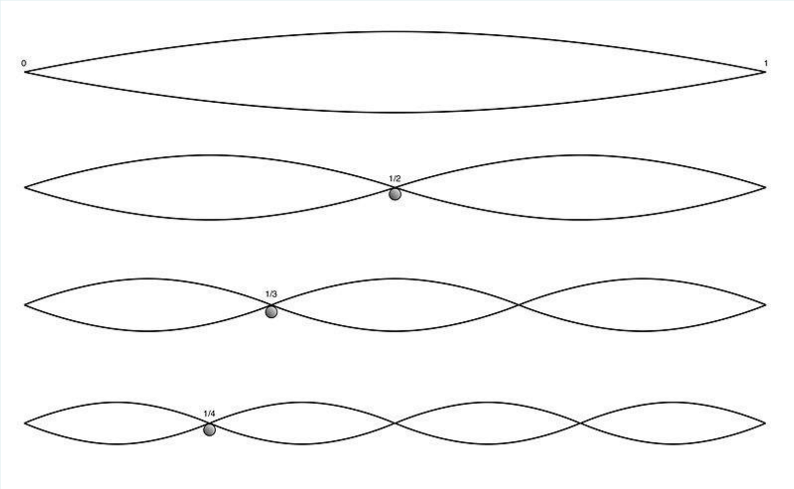


Fig. 2 – Modes de vibration des 4 premières harmoniques
((Source:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Imaginons une corde tendue, bloquée à ses extrémités. Lorsque nous touchons une extrémité de cette corde, elle vibre (figure 3) et produit une note que l'on appelle une fondamentale.

Fig. 3 – Modes de vibration d'une note fondamentale 1(f)
(Source:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Pythagore a décidé de diviser une corde en deux parties (figure 4) et de toucher l'une des parties au milieu. Le son produit était le même, mais avec une fréquence plus haute (généralement appelée "la même note, une octave plus haut"). Il a depuis été prouvé que lorsque le nombre de divisions (ou le nombre d'harmoniques) est un multiple d'un nombre antérieur, le son est répété, mais avec une fréquence plus aiguë.

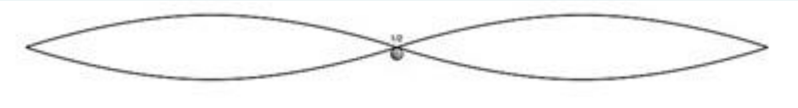


Fig. 4 – Modes de vibration d'une note fondamentale 2(f)
(Source:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Il a alors décidé d'essayer de voir à quoi ressemblerait le son de la corde divisée en trois parties (figure 5) et a remarqué qu'un nouveau son, différent du précédent, en émanait. Cette fois, ce n'était pas la "même note, une octave plus haut", mais une note complètement différente, qui méritait un autre nom - la quinte.

Fig. 5 – Modes de vibration d'une note fondamentale 3(f)
(Source:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Ce son, bien que différent, s'accordait bien avec le son précédent. Il créait une harmonie agréable à l'oreille, ce qui s'explique par le fait que les divisions effectuées avaient les relations mathématiques de 1/2 et 2/3. Avec la division de la corde en quatre parties, il obtint une note maintenant connue sous le nom de "quarte". Ces trois notes sont en consonance avec la note fondamentale.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Ainsi, il a continué à subdiviser la corde, obtenant les harmoniques de la note fondamentale, et, en combinant mathématiquement les sons, il a créé des gammes qui donnent des notes naturellement liées entre elles. Au fil du temps, les notes ont reçu les noms que nous connaissons aujourd'hui et qui ont été mentionnés précédemment.

Dans ce processus, chaque note provenant d'un objet, subit l'influence de la fréquence fondamentale qui excite les autres harmoniques, ce qui résulte en une série de fréquences - la série harmonique. Les séries harmoniques sont des séries infinies, composées d'ondes sinusoïdales avec toutes les fréquences multiples entières de la fréquence fondamentale. Il n'y a pas une seule série d'harmoniques, mais plutôt une série différente pour chaque fréquence fondamentale.

Examinons un exemple de série harmonique qui commence à A2 / La1 (110 Hz). Les 16 premières harmoniques de cette série peuvent être observées dans le tableau suivant :

Harmonique #	Note (Anglais)	Note (Néo-latin)	Fréquence (Hz)
1 (F)	A_2	$Lá_1$	110
2	A_3	$Lá_2$	220
3	E_4	Mi_3	330
4	A_5	$Lá_3$	440
5	$C\#_5$	$Do\#_4$	550
6	E_4	Mi_4	660
7	G_4	Sol_4	770
8	A_5	$Lá_4$	880
9	B_5	Si_4	990
10	$C\#_6$	$Do\#_5$	1100
11	$D\#_6$	$Ré\#_5$	1210
12	E_6	Mi_5	1320
13	$F\#_6$	$Fá\#_5$	1430
14	G_6	Sol_5	1540
15	$G\#_5$	$Sol\#_5$	1650
16	A_6	$Lá_5$	1760

Tableau 1 – Les 16 premières harmoniques

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Glossaire

Quinte : l'intervalle entre une note de musique et une autre, qui est de quatre degrés par rapport à la première, à l'intérieur d'une gamme.

Quarte : intervalle entre une note de musique et une autre, qui est de trois degrés par rapport à la première, à l'intérieur d'une gamme.

Fréquence : quantité physique indiquant le nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps donné.

Fréquence fondamentale : la fréquence composante la plus basse et la plus forte de la série harmonique d'un son.

Note fondamentale : note principale d'un accord, dont découlent les autres accords

Série Harmonique : ensemble d'ondes composé de la fréquence fondamentale et de tous les multiples entiers de cette fréquence.

Harmonique : son d'une série qui constitue une note.

Harmonie : combinaison simultanée de sons.

Monochorde : un instrument de musique ancien composé d'une caisse de résonance, sur laquelle était tendue une seule corde fixée par deux supports mobiles.

Octave : intervalle entre une note de musique et une autre avec la moitié ou le double de sa fréquence.

Gamme pentatonique : ensemble de toutes les gammes composées de cinq notes ou tons.

Hauteur : les sons à haute fréquence transmis à l'oreille humaine, généralement au-dessus de 5 KHz.

Gamme (musicale) : séquence ordonnée de sons selon la fréquence vibratoire des sons (généralement du son de plus basse fréquence au son de plus haute fréquence).

Gamme tempérée : division de l'octave en douze demi-tons égaux.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les maths dans la série des Harmoniques : La Série Numérique

Les divisions faites par Pythagore sur la corde du monocorde correspondent aux divisions de l'unité par des nombres naturels, c'est-à-dire qu'elles suivent la séquence 1, 2, 3, 4, ..., n. En d'autres termes, elles correspondent à la séquence $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$.

En termes de vibration, la correspondance serait la séquence $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}$.

Les suites numériques

Une **suite** est un ensemble d'objets de toute nature, organisés ou écrits dans un ordre précis.

Exemples :

L'ensemble janvier, février, mars, avril, ..., décembre est une suite des mois de l'année.

L'ensemble 0, 1, 2, 3, 4, ... est appelé suite de nombres naturels.

Une **Suite numérique** est une fonction qui a comme domaine l'ensemble des nombres naturels et comme codomaine (ensemble cible) l'ensemble des nombres

Les Suites numériques peuvent être finies, lorsqu'il est possible de compter leurs éléments, ou infinies, lorsqu'il n'est pas possible de compter leurs éléments. Voir ci-dessous les représentations mathématiques des deux situations :

Suite finie : $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

Suite infinie : $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Lecture des termes précédents :

$\boldsymbol{a_1}$ →$\boldsymbol{a}$ index 1 (premier terme ou terme d'ordre 1)

$\boldsymbol{a_2}$ → $\boldsymbol{a}$ index 2 (deuxième terme ou terme d'ordre 2)

$\boldsymbol{a_3}$ → $\boldsymbol{a}$ index 3 (troisième terme ou terme d'ordre 3)

$\boldsymbol{a_n}$ → $\boldsymbol{a}$ indice n (nième terme ou terme d'ordre n)

Regarde les exemples de Suites finies et infinies :

Suite finie : (5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19)

Suite infinie : (3, 5, 7, 11, 13, 17, ...)

Les suites sont le plus souvent données par une formule mathématique appelée **terme général**. C'est la loi de formation qui définit l'un des termes de la séquence.

Exemples :

1) Compte tenu de la suite définie par $a_n = 4n - 1$, with $n \in \mathbb{N}$, calcule les premier et troisième termes.

Rappelle-toi que le domaine de cette séquence est $\mathbb{N}$, donc le premier terme est $\boldsymbol{a_1}$ et est calculé en remplaçant $\mathbf{n}$ par 1.

Pour $\mathbf{n = 1}$, on a : $\boldsymbol{a_1} \mathbf{= 4 \times 1 - 1 = 3}$

Pour $\mathbf{n = 3}$, on a : $\boldsymbol{a_3} \mathbf{= 4 \times 3 - 1 = 11}$.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

2) Considérons la suite arithmétique 5, 8, 11 ...

Le premier terme de la suite est 5 et après le premier terme, tout autre terme est obtenu en ajoutant 3 au terme précédent.
Voyons, par exemple, les calculs suivants relatifs aux premiers termes :

n	calcul du n^{ième} terme	
1	5	$= 5 + 0 \times 3 = 5$
2	5 + 3	$= 5 + 1 \times 3 = 8$
3	5 + 3 + 3	$= 5 + 2 \times 3 = 11$
4	5 + 3 + 3 + 3	$= 5 + 3 \times 3 = 14$
5	5 + 3 + 3 + 3 +3	$= 5 + 4 \times 3 = 17$

Tableau 2 – Calcul de suites numériques

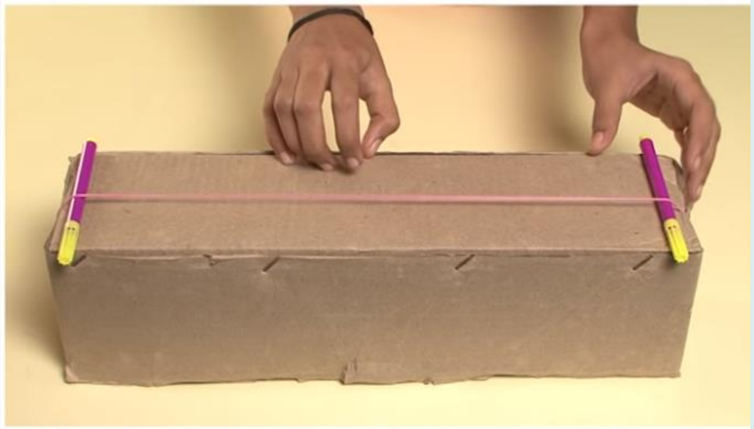
Le tableau montre que nous pouvons obtenir le terme d'ordre n (où n est tout ordre de terme) à partir du premier terme, 5, et en ajoutant le ratio 3 à plusieurs reprises jusqu'à $n-1$ fois. Cela peut s'écrire algébriquement comme $\mathbf{5+3(n-1)}$. La version simplifiée de cette expression s'écrit $\mathbf{3n+2}$.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

TÂCHES

TÂCHE 1

A l'aide d'une boîte en papier, d'un élastique et de deux crayons, reproduis l'expérience menée par Pythagore avec un monocorde.



Note qu'en changeant la position de l'un des crayons, on obtient une hauteur de ton différente. Tu trouveras des informations plus détaillées dans la vidéo suivante: https://www.youtube.com/watch?v=AQJw95-H9mM

TÂCHE 2

Écris les quatre premiers termes de la suite (u_n), en considérant que :

2.1) $u_n = 5n - 2$

2.2) $u_n = -3n + 1$

2.3) $u_n = \frac{1}{n}$

2.4) $u_n = \frac{1}{3n}$

2.5) $u_n = \frac{1}{n^3}$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

TÂCHE 3

Écris les deux termes suivants et le terme général de la suite $(\mathbf{u_n})$, où les premiers termes sont :

3.1) $3, 6, 9, 12, 15, \ldots$

3.2) $4, 9, 14, 19, 24, \ldots$

3.3) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

3.4) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

POUR EN SAVOIR PLUS…

Les mathématiques de la musique (en anglais)

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

Modes sur une corde (en anglais)

https://www.youtube.com/watch?v=cnH2ltfW48U

Les séries harmoniques (en anglais)

https://www.oberton.org/en/overtone-singing/harmonic-series/

Comprendre les intervalles musicaux, les gammes, l'accord et le timbre (en anglais)

http://in.music.sc.edu/fs/bain/atmi02/hs/hs.pdf

Pythagore et la musique (en anglais)

https://ba278b9d8106536501a2-57da1f3fe93ccf3a9828e6ce67c3d52c.ssl.cf5.rackcdn.com/07_richards.pdf

Les suites numériques (en anglais)

https://www.mathsisfun.com/numberpatterns.html

Tableau de conversion de la note musicale en fréquence (en anglais)

https://www.audiology.org/sites/default/files/ChasinConversionChart.pdf

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.