

PARTIE II : Musique & Mathématiques

ÂGE : 13-15 ans

OUTIL 14 : RAPPORTS DE FRÉQUENCES DES NOTES DE MUSIQUE

C.I.P. Citizens In Power



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Educator's Guide

Titre : Rapports de fréquences des notes de musique

Âge : 13-15 ans

Durée : 60-70 minutes

Concepts mathématiques : Intervalles, fréquences, rapports, logarithmes

Concepts artistiques : Les mathématiques utilisées dans la musique.

Objectifs généraux : Montrer que l'addition d'intervalles est égale à la multiplication des fréquences.

Instructions et Méthodologies : L'outil est basé sur une introduction générale sur la relation entre les mathématiques et la musique, mais il devient ensuite un peu plus difficile dans la section sur les mathématiques. Nous avons tenté de le rendre aussi léger et compréhensible que possible à l'aide d'images, d'exemples, de photos et d'une vidéo Youtube.

Ressources : Vidéos Youtube, livres, revues, images et glossaire

Conseils pour l'éducateur : Vous pouvez commencer par poser des questions générales pour susciter leur intérêt sur le lien entre les mathématiques et la musique. Vous pouvez ensuite lire rapidement l'introduction avant de passer aux maths.

Résultats et Compétences ciblés : Prendre un concept non quantifié d'un intervalle, en dériver une valeur numérique réelle à partir du rapport des fréquences, et utiliser la formule pour calculer le rapport d'un intervalle résultant.

Compte-rendu et évaluation :

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 éléments que vous avez appris :	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Introduction

Malgré le fait que de nombreuses personnes aiment la musique tout en détestant les mathématiques, ce qu'ils ne savent pas, c'est que ces deux disciplines sont liées entre elles. On dit même que les mathématiques peuvent nous aider à expliquer l'expérience musicale. Grandin, Peterson et Shaw (1998) affirment que la musique améliore les capacités de raisonnement, qui sont cruciales pour l'apprentissage de concepts mathématiques tels que le raisonnement proportionnel et le développement des compétences en géométrie. Rauscher et al. (1997) affirment que la musique favorise le développement de ces capacités de raisonnement et surtout la reconnaissance des schémas et l'utilisation de la logique.

Pythagore, le philosophe grec de l'Antiquité, a réalisé, dès le 6^e siècle avant J.-C., que différents sons peuvent être produits avec des poids et des vibrations différents. Cela l'a conduit à découvrir que la hauteur d'une corde vibrante est proportionnelle à sa longueur et peut être contrôlée par celle-ci. Les cordes dont la longueur est réduite de moitié sont plus hautes d'une octave que l'original. Ainsi, plus la corde est courte, plus la hauteur est élevée. Pythagore a également découvert que les notes de certaines fréquences sonnent mieux avec plusieurs fréquences de cette note. Par exemple, une note de 220 Hz sonne mieux avec des notes de 440 Hz, 660 Hz, etc. Vous pouvez donc déjà voir que, des bases à la synthèse la plus compliquée, les mathématiques sont entrelacées avec la musique.

Fréquences, intervalles et rapports en musique

Certains concepts mathématiques courants liés à la musique sont notamment les fréquences, les gammes, les intervalles et les tons.

Pythagore a fait ses découvertes en "jouant" avec une corde tendue. Ci-dessous, on peut voir une corde tendue attachée à ses extrémités. Lorsqu'on la touche, elle vibre. Lorsqu'un instrument vibre, une onde de pression qui se propage dans l'air atteint notre oreille sous la forme d'un son.



Pythagore a décidé de diviser cette corde en deux parties et a touché chaque extrémité à nouveau. Le son produit était le même, mais plus aigu (car c'était la même note une octave plus haut) :



Pythagore a décidé de continuer. Il a expérimenté avec la corde divisée en 3 parties :



C'est alors qu'il a réalisé qu'un son nouveau, différent, était apparu. Cette fois, ce n'était pas la même note une octave plus haut, mais une note différente, qui devait recevoir un autre nom. Ce son, en plus d'être différent, fonctionnait bien avec le précédent, créant une harmonie agréable à l'oreille, car ces divisions montraient les relations mathématiques $1/2$ et $2/3$ et apparemment notre cerveau aime les relations logiques.

Ainsi, il a continué à faire des subdivisions et des combinaisons de sons en créant mathématiquement des gammes qui, par la suite, ont stimulé la création d'instruments de musique capables de jouer ces gammes. De nos jours, les notes ont reçu les noms que nous connaissons aujourd'hui. Les cultures ont créé leurs propres

gammes. Par exemple, les Chinois ont créé la gamme pentatonique, tandis que la culture occidentale a adopté un tempérament égal à 12 tons, connu sous le nom de gamme tempérée ou gamme chromatique.

Sources: <http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/> and <http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html>

Glossaire A

Pythagore : Pythagore de Samos[a] (c. 570 - c. 495 av. J.-C.) était un philosophe grec de l'Antiquité ionienne et le fondateur éponyme du pythagorisme. Ses enseignements politiques et religieux étaient bien connus dans la Grande-Grèce et ont influencé les philosophies de Platon, d'Aristote et, à travers elles, la philosophie occidentale. La connaissance de sa vie est obscurcie par la légende, mais il semble qu'il soit le fils de Mnesarchus, un graveur de sceaux de l'île de Samos. Les érudits modernes ne sont pas d'accord sur l'éducation et les influences de Pythagore, mais ils s'accordent à dire que, vers 530 avant J.-C., il s'est rendu à Croton, où il a fondé une école dans laquelle les initiés juraient de garder le secret et menaient une vie communautaire et ascétique. Ce mode de vie comportait un certain nombre d'interdictions alimentaires, dont le végétarisme, selon la tradition, mais les spécialistes modernes doutent qu'il ait jamais préconisé un végétarisme complet. Traduit de l'anglais : <https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras>

Rapport : En mathématiques, un rapport est une relation entre deux nombres indiquant combien de fois le premier nombre contient le second[1]. Par exemple, si un bol de fruits contient huit oranges et six citrons, alors le rapport entre les oranges et les citrons est de huit à six (soit 8:6, ce qui équivaut au rapport 4:3). De même, le rapport citrons/oranges est de 6:8 (ou 3:4) et le rapport oranges/nombre total de fruits est de 8:14 (ou 4:7).

Source : <https://en.wikipedia.org/wiki/Ratio>

Fréquence : La fréquence est le nombre d'occurrences d'un événement qui se répète par unité de temps. La période est la durée d'un cycle dans un événement répétitif, donc la période est la réciproque de la fréquence[2]. Par exemple : si le cœur d'un nouveau-né bat à une fréquence de 120 fois par minute, sa période - l'intervalle de temps entre les battements - est d'une demi-seconde (60 secondes divisées par 120 battements). La fréquence est un paramètre important utilisé en science et en ingénierie pour spécifier le rythme des phénomènes oscillatoires et vibratoires, tels que les vibrations mécaniques, les signaux audio (son), les ondes radio et la lumière.

Traduit de l'anglais : <https://en.wikipedia.org/wiki/Frequency>

Glossaire B

Octave : En musique, l'octave est l'intervalle qui sépare deux notes de même nom. Divisée en plusieurs sous-intervalles, elle forme les limites des gammes.

L'octave ascendante correspond à la division par deux de la longueur d'une corde vibrante. La fréquence fondamentale du son le plus aigu est le double de celle du plus grave : longueur de corde et fréquence sont inversement proportionnelles.

L'octave est l'intervalle le plus consonant. Son renversement est l'unisson.

On utilise l'octave en électroacoustique comme unité logarithmique d'intervalle de fréquences.

Source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Octave_\(musique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Octave_(musique))

Intervalle (music): En théorie musicale, un intervalle est la différence de hauteur entre deux sons. Un intervalle peut être décrit comme horizontal, linéaire ou mélodique s'il se rapporte à des sons qui se succèdent, comme deux hauteurs adjacentes dans une mélodie, et vertical ou harmonique s'il se rapporte à des sons qui se succèdent, comme dans un accord. Dans la musique occidentale, les intervalles sont le plus souvent des différences entre des notes d'une gamme diatonique. Le plus petit de ces intervalles est un demi-ton. Les intervalles plus petits qu'un demi-ton sont appelés micro-tons. Ils peuvent être formés en utilisant les notes

de divers types de gammes non diatoniques. Certains des plus petits sont appelés commas et décrivent de petits écarts, observés dans certains systèmes d'accord, entre des notes équivalentes du point de vue enharmonique, comme $C\sharp$ et $D\flat$. Les intervalles peuvent être arbitrairement petits, et même imperceptibles pour l'oreille humaine.

Traduit de l'anglais : [https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_(music))

Tierce mineure : Dans la théorie musicale de la culture occidentale, une tierce mineure est un intervalle musical qui comprend trois demi-tons.

Tierce majeure : Dans la musique classique de la culture occidentale, une tierce est un intervalle musical entre deux notes séparées par trois degrés, et la tierce majeure est une tierce s'étendant sur quatre demi-tons. Avec la tierce mineure, la tierce majeure est l'une des deux tierces les plus courantes. Elle est qualifiée de majeure parce qu'elle est la plus grande des deux : la tierce majeure s'étend sur quatre demi-tons, la tierce mineure sur trois.

Quarte : l'intervalle entre une note de musique et une autre, qui est de quatre degrés par rapport à la première, à l'intérieur d'une gamme.

Quinte parfaite : l'intervalle entre une note de musique et une autre, qui est de cinq degrés par rapport à la première, à l'intérieur d'une gamme.

Fréquence : quantité physique indiquant le nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps donné.

Hauteur : les sons à haute fréquence transmis à l'oreille humaine, généralement au-dessus de 5 KHz.

Les maths dans les notes de musique

Commençons étape par étape :

- ✓ Le son est produit par une vibration continue de l'air.
- ✓ Le nombre de vibrations par seconde est appelé fréquence qui se mesure en Hertz et la fréquence du son détermine sa hauteur (voir glossaire) <plus la fréquence est élevée, plus la hauteur est élevée>.
- ✓ Les notes de musique sont des sons de certaines fréquences jouant un ordre croissant de fréquences qui produiront une gamme musicale.
- ✓ Voici l'explication de la différence entre deux hauteurs de son. Considérons deux hauteurs (fréquences) qui sont séparées par une distance arbitraire, i . Par conséquent, si nous avons nos deux fréquences, f_1 et f_2 , elles sont séparées par la distance d'intervalle i_1 . (L'intervalle est la combinaison de deux de ces sons).
- ✓ Maintenant, le rapport des deux fréquences (f_2 / f_1) peut être défini comme r_1 et peut être exprimé comme :

$$f_2 \div f_1 = r_1$$

- ✓ Si nous avons un deuxième ensemble de fréquences, f_3 et f_4 , l'intervalle entre elles peut être défini comme i_2 . Le rapport entre f_3 et f_4 (étant f_4/f_3) serait défini comme r_2 . Si i_1 et i_2 sont le même intervalle, ce qui signifie que la même distance de fréquence existe entre f_1 et f_2 ainsi que f_3 et f_4 , alors les rapports seront égaux. Cela ne nous apprend rien sur le registre des fréquences, seulement que les intervalles sont similaires (nous ne savons pas s'ils sont dans le même registre). Nous exprimerions cela comme suit:

$$f_2 \div f_1 = r_1$$

$$f_4 \div f_3 = r_2$$

$$i_1 \cong i_2 \text{ if and only if } r_1 = r_2$$

- ✓ Si nous avons trois fréquences f_1 , f_2 et f_3 . L'intervalle entre f_1 et f_2 est i_1 , l'intervalle entre f_2 et f_3 est i_2 et le plus grand intervalle entre f_1 et f_3 est i_3 . En appliquant les mêmes concepts de rapports calculés dans les exemples précédents, nous obtenons :

$$f_2 \div f_1 = r_1$$

$$f_3 \div f_2 = r_2$$

$$f_3 \div f_1 = r_3$$

$$\therefore f_2 = r_1 \cdot f_1 \text{ and } f_3 = r_2 \cdot f_2$$

Substituting in for f_2

$$f_3 = r_2 \cdot (r_1 \cdot f_1)$$

$$f_3 \div f_1 = r_2 \cdot r_1$$

substituting r_3 for $f_3 \div f_1$

$$r_3 = r_2 \cdot r_1 \text{ and } i_3 = i_1 + i_2$$

- ✓ Nous montrons donc que l'addition d'intervalles est égale à la multiplication des rapports de fréquence.

$$\text{since } r_3 = r_2 \cdot r_1$$

$$\log(r_3) = \log(r_2) + \log(r_1)$$

since $i_3 = i_2 + i_1$ we can show that

$$i_3 = \log(r_3) \text{ and } i_2 = \log(r_2) \text{ and } i_1 = \log(r_1)$$

- ✓ Nous avons maintenant un nombre défini pour la valeur de i . C'est le logarithme du rapport des fréquences composant l'intervalle en question. Le rapport des fréquences pour un intervalle donné sera positif, mais il peut être supérieur ou inférieur à 1. Si la valeur de r est supérieure à 1, alors nous savons que $0 < f_1 < f_2$ et l'intervalle est ascendant (parce que f_2 est supérieur à f_1). De même, si la valeur de $0 < r < 1$, alors $0 < f_2 < f_1$ et nous savons que l'intervalle est décroissant. Par conséquent, le logarithme d'un intervalle ascendant (avec $r > 1$) sera positif tandis que le logarithme d'un intervalle descendant (avec $r < 1$) sera négatif.
- ✓ Au piano, jouer Do et Re ensemble est décrit comme un deuxième intervalle majeur parce que Re est la deuxième note de la gamme \rightarrow ensuite, c'est un troisième intervalle majeur parce que Mi est la troisième note de la gamme \rightarrow de Do à Fa, on appelle cela un quatrième intervalle parfait \rightarrow de Do à Sol, qui est la cinquième note, on appelle cela un cinquième intervalle parfait et ainsi de suite \rightarrow enfin, un Do et un Re joués ensemble sont appelés une octave (regarde maintenant <https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJJKKug> jusqu'à la minute 2:08).

Si nous savons comment déterminer le rapport d'un intervalle formé à partir d'autres rapports, par exemple, si nous savons qu'un intervalle (r_1) a un rapport de $5/4$ (appelé tierce majeure) et un autre (r_2) le rapport $6/5$ (une tierce mineure) nous pouvons calculer le rapport de leur somme. Ainsi, une tierce majeure ($5/4$) plus une tierce mineure ($6/5$) donne :

$$r1 \cdot r2 = r3$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)$$

- ✓ Le rapport 3/2 est une quinte parfaite. Ainsi, nous avons mathématiquement prouvé à partir d'un concept simple qu'une tierce majeure plus une tierce mineure donne une quinte parfaite ! Un petit rappel sur les rapports de hauteur de ton des petits nombres entiers pour que tu puisses essayer d'autres exemples par toi-même :

2/1	Octave
3/2	Quinte parfaite
4/3	Quarte parfaite
5/3	Sixte majeure
5/4	Tierce majeure
6/5	Tierce mineure

- ✓ Nous avons pris le concept non quantifié d'un intervalle, en avons dérivé une valeur numérique réelle à partir du rapport des fréquences, et avons utilisé notre formule pour calculer le rapport d'un intervalle résultant.

Leçon basée sur : <https://www.notreble.com/buzz/2010/02/18/math-and-music-equations-and-ratios/>



TÂCHE

Utilise des rapports pour estimer les fréquences :

Soit les fréquences f_0 , f_1 , f_2 et f_3 . Sachant que $f_1=5$ Hz, $r_2= 6/5$ et $r_3=3/2$, calcule f_0

POUR EN SAVOIR PLUS...

Vidéo "Les mathématiques de la musique" (en anglais) :

<https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJJKKug>

TED TALK : Musique et mathématiques : Le génie de Beethoven

<https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY>

Pages web:

Math central: <http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html>

Kent State Univeristy: <https://musicedmasters.kent.edu/the-connection-between-music-and-mathematics/>

Mathematics and Music: <http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/>

Math and Music Lessons: <https://www.notreble.com/buzz/2010/02/04/math-and-music-intervals/>

Livres :

Grandin, T., Peterson, M., & Shaw, G. L. (1998). Spatial- temporal versus language-analytic reasoning: The role of music training. *Arts Education Policy Review*, 99(6), 11-15.

Kung, D. (2013). *How Music and Mathematics Relate*. The Great Courses, Virginia. Retrieved from http://www.chrysalis-foundation.org/1373_MusicandMath_8-28.pdf

Rauscher, R.H., Shaw, G.L., Levine, I. J., Wright, E.L., Dennis, W. R., & Newcomb, R. I. (1997). Music training causes long-term enhancement of preschool children's spatial-temporal reasoning. *Neurological Research*, 19, 2-8.