DEL I: Bildkonst & matematik

ÅLDER: 16-18

UPPGIFT 11: FRAKTALER OCH DIMENSIONER

Sandgårdskolan

TheArtOfMaths

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Lärarguide

Titel: Fraktaler och dimensioner

Ålder: 16-18 år

Längd: 2 timmar

Matematiskt begrepp: Skalning

Konstnärligt koncept: Fraktaler

Allmänna mål: Fraktaler är några av de vackraste och mest bisarra geometriska formerna. Målen är att lära sig och att se något av matematiken bakom dessa fantastiska mönster. Formerna på fraktaler ser desamma ut i olika skalor - du kan ta ett litet utdrag av formen och det ser lika ut i hela formen. Denna underliga egenskap kallas självlikhet. I det matematiska konceptet för detta verktyg kommer vi att titta på polygoner som är inskrivna i en cirkel.

Instruktioner: Läs texten och lös uppgifterna samt förundras över de vackra fraktalerna

Resurser: Det här verktyget ger dig begrepp för att undervisa om fraktaler och matematiken bakom dem.

Tips till läraren: Börja med konstinnehållet och gå mot matematiken.

Lärandemål och kunskaper: I slutet av detta verktyg kommer eleven kunna:

- Förstå skalning bättre
- Känna till idén om fraktaler

Sammanfattning och utvärdering:

Skriv tre saker som du tyckte om i den här aktiviteten:	1. 2. 3.
Skriv två saker som du har lärt dig:	1. 2.
Skriv en sak som kan förbättras:	1.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Introduktion

Fraktaler är några av de vackraste och mest bisarra geometriska formerna. De ser lika ut i olika skalor - du kan ta ett litet utdrag av formen och det ser lika ut i hela formen. Denna underliga egenskap kallas självlikhet.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Fraktaler

För att skapa en fraktal kan du börja med ett enkelt mönster och upprepa det med mindre skalor, om och om igen, för alltid. I verkligheten är det naturligtvis omöjligt att rita fraktaler med "oändligt små" mönster. Men vi kan rita former som ser ut som fraktaler. Med matematik kan vi tänka på egenskaperna som en riktig fraktal skulle ha - och dessa är mycket överraskande.

Fraktaler är mycket populära inom matematisk visualisering, eftersom de ser väldigt vackra ut trots att de skapas med enkla mönster. Du kan zooma in i en fraktal, och mönstren och formerna kommer att fortsätta att upprepas, i evighet.

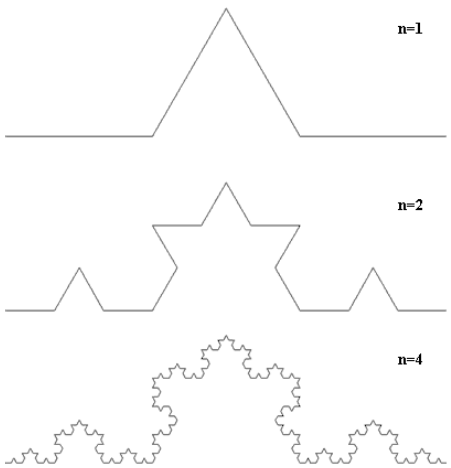


Bild 1 Simple Koch Curves display strict self-similarity: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fractal_koch.png

Fraktalgenererande programvara är alla typer av grafisk programvara som genererar bilder av fraktaler. Det finns många fraktalgenererande program tillgängliga, både gratis och kommersiella. Det finns också mobilappar tillgängliga för fraktaler. Vissa programmerare skapar mjukvara för fraktaler för sig själva på grund av nyfikenhet och på grund av utmaningen att förstå den relaterade matematiken.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Fraktalgenererande programvara skapar matematisk skönhet. Moderna datorer kan göra en fraktalbild med hög upplösning på några sekunder. Bilder genereras för såväl simulering (modellering) som slumpmässiga fraktaler för konst. Fraktalgenerering som används för modellering tillämpas i datorgrafik. Du kan också använda den för att återge naturliga landskap med fraktala landskap. Fraktaler genereras även i musikvisualiseringsprogramvara.

Ordlista

Liksidig månghörning:

En månghörning är regelbunden när alla vinklar är lika och alla sidor är lika (annars är den "oregelbunden").

n:

Står för alla naturliga tal.

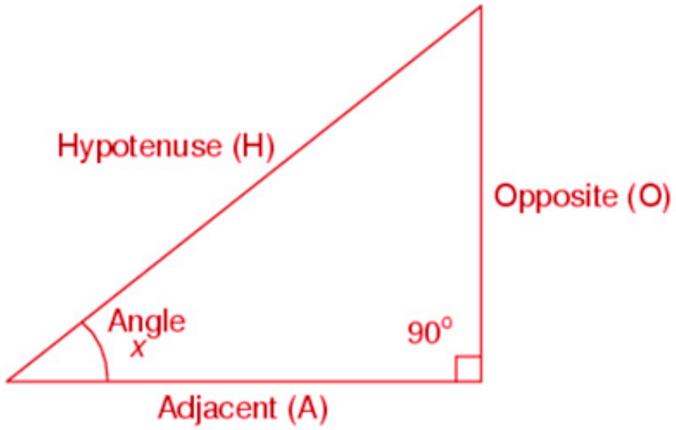
Till exempel 0, 1, 2, 3

Polyhedron:

Är en tredimensionell figur med plana polygonala ytor, raka kanter och skarpa hörn.

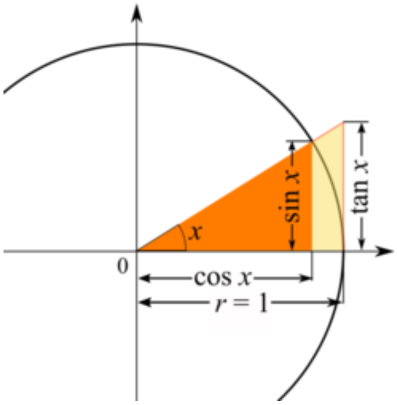
Trigonometri

Sinus, cosinus och tangent är de viktigaste termerna som används i trigonometri som baseras på en rättvinklad triangel. Innan du fastnar i termerna underlättar det att studera en rätvinklig triangel som på bilden nedan:



This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

De trigonometriska funktionerna gäller endast för vinklar mellan 0 och 90 grader (0 och π/2 radianer). Med hjälp av enhetscirkeln kan kosinus och sinus definieras som periodiska funktioner med perioden 360 grader (2π radianer).



Matematiken bakom fraktaler

Sierpinskitriangeln

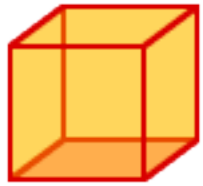
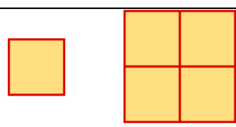
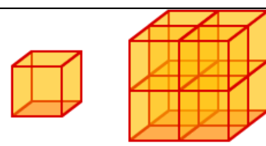
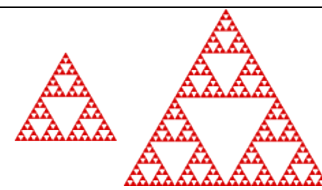
Ett av exemplen på en fraktal är Sierpinskitriangeln som består av otaliga trianglar. Vi skapade den genom att upprepade gånger skära ut en triangel i mitten av alla andra trianglar. Men det finns många andra metoder för att skapa denna form - och här är några.

Hur man gör en Sierpinskitriangel i Geogebra

https://youtu.be/tmmHEa6j-_k

Dimension 1	Dimension 2	Dimension 3	Dimension 1.585…

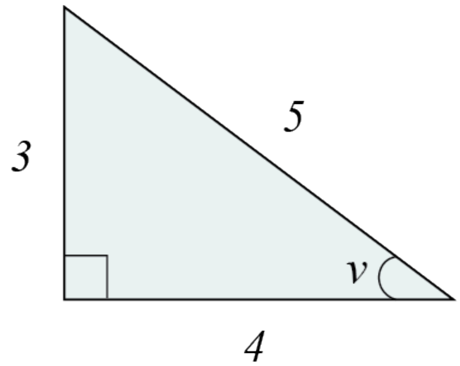
This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

×2	 ×4	 ×8	 ×3
En linje har 1 dimension. När den skalas med 2, ökar dess längd 2 gånger.	En kvadrat har 2 dimensioner. När den skalas med 2, ökar dess area 4 gånger.	En kub har 3 dimensioner. När den skalas med 2, ökar d ess volym 8gånger.	När Sierpinskitriangeln skalas med 2, ökar dess yta med en f3. Ser vi på de blå ökningsfaktorerna ovan, kan vi dra slutsatsen att den måste ha en mellan 1 och 2 dimensioner. Det finns inga heltal mellan 1 och 2, så Sierpinskitriangelns dimensionen måste vara ett bråk. Man kanberäkna det till cirka 1.585.
			

Att beräkna en okänd vinkel:

Beräkna vinkeln mellan hypotenusan och sidan som är fyra längdenheter i följande rätvinkliga triangel:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Vi börjar med att identifiera den vinkel som det hänvisas till i texten: det är den akuta vinkeln till höger i triangeln. Detta betyder att den sida som är 4 längdenheter lång är den angränsande katetern och den sida som är 3 längd enheter lång är den motsatta katetern. Vi anger våra kända värden i formeln för sinus

$$\sin v = motsatta\ katetern \div hypotenusan = 3 \div 5$$

och sedan beräknar vi vinkeln v med den inverterade funktionen (arcsin):

$$\boldsymbol{v = sin^{-1}(3/5) \approx 36,87}$$

Således är vinkeln v, vars sinusvärde är 3/5, ungefär lika med 36,87 grader. Slutligen försöker vi göra samma sak med tangentfunktionen:

$$\boldsymbol{\tan v = motsatta\ katetern \div\ angränsade\ katetern = 3 \div 4}$$

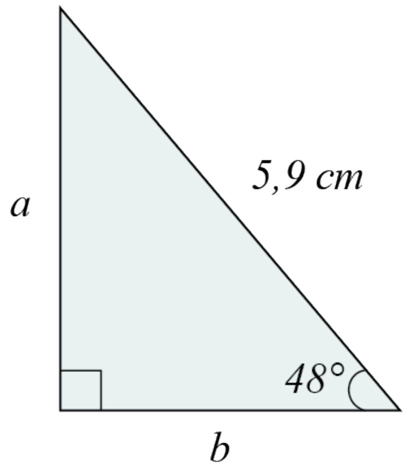
Vi beräknar vinkeln v med den inverterade funktionen (arctan) och får därmed vinkeln v, vars tangensvärde är 3/4, ungefär lika med 36,87 grader. Som vi ser får vi samma värde i vinkeln v oavsett vilken av de två trigonometriska funktionerna vi väljer att använda, vilket är helt i sin ordning.

Beräkna den okända längden på en sida:

Säg att vi har en rätvinklig triangel med en känd vinkel på 48 °, en hypotenusa med en längd på 5,9 cm och att vi vill beräkna längden på katetrarna.

Till att börja med bör vi rita en figur så att vi får en översikt över triangelns sidor och vinklar och därmed minskar risken för att vi tänka fel:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Från den kända vinkeln är sidan b den angränsande katetern. Eftersom vi vet längden på hypotenusan använder vi kosinusfunktionen för att bestämma längden på sida b:

$$\boldsymbol{cos48° = b \div 5,9}$$
$$\boldsymbol{5,9 * cos48° =}$$

$$\boldsymbol{b \approx 3,948}$$

I vår figur kan vi se att sidan a är motsatt sida, så vi använder sinusfunktionen för att beräkna längden på sidan a (i denna situation kunde vi också ha använt grundfunktionen, eftersom vi nu vet längden på den närliggande katetern):

$$\boldsymbol{sin48° = a \div 5,9}$$
$$\boldsymbol{5,9 * sin48° = a \div 5,9 * 5,9}$$
$$\boldsymbol{5,9 * sin48° = a}$$
$$\boldsymbol{a \approx 4,385}$$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

UPPGIFTER

Den grekiska matematikern och fysikern Arkimedes från Syracusa (287-212 f.Kr.) använde månghörningar för att bestämma ett ungefärligt värde på π.

UPPGIFT 1

För stora värden på n, det vill säga för månghörningar med ett stort antal sidor, kommer både en inskriven och en omkretsande regelbunden månghörning att ansluta nära cirkelns omkrets. Detta ger följande approximationer till π ≈ n sin (180o/n) och π ≈ n tan (180o / n).

UPPGIFT 2

Välj n = 96 och jämför med de värden som Arkimedes fick på den geometriska banan.

UPPGIFT 3

Undersök genom att välja större och större värden på n hur nära värdet på π du kan komma med din miniräknare.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

LÄR DIG MER…

Rita fraktaler på mindre än 5 minuter:

https://youtu.be/sFEYQMrWNHU

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.