

ΜΕΡΟΣ Ι: ΕΙΚΑΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16 – 18

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 9: ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Καλλιτεχνική απεικόνιση μέσω της χρήσης των συναρτήσεων

Ηλικιακό Εύρος: 16 –18 χρονών

Διάρκεια: 2 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Οριζόντιες και κάθετες γραμμές, απόλυτη τιμή, γραμμική συνάρτηση, κύκλος

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Καλλιτεχνική απεικόνιση, γραφική τέχνη

Γενικοί σκοποί: Να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια των εξισώσεων και να είναι σε θέση να προβλέψουν τη γραφική αναπαράστασή τους πειραματικά σε ένα διαδικτυακό καρτεσιανό επίπεδο.

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Σε αυτό το εργαλείο θα χρησιμοποιηθεί η δωρεάν ηλεκτρονική αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων Desmos, η οποία θα επιτρέψει στους μαθητές να δημιουργήσουν σχήματα χρησιμοποιώντας μερικές βασικές συναρτήσεις και εξισώσεις.

Πηγές: Ηλεκτρονικός υπολογιστής με σύνδεση στο διαδίκτυο, πρόσβαση στην ιστοσελίδα: <https://www.desmos.com/>

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Οι μαθητές να παρακολουθήσουν τη γραφική αναπαράσταση οριζόντιων και κάθετων γραμμών, γραμμικών συναρτήσεων, απόλυτων τιμών και περιφερειών, εξηγώντας τις έννοιες τους και δείχνοντας παραδείγματα στο Desmos. Επιπλέον, οι μαθητές πρέπει να δουν πώς αυτές οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να επεκταθούν ή να συρρικνωθούν, να μετακινηθούν αριστερά / δεξιά / προς τα κάτω / προς τα πάνω, αλλάζοντας τις τιμές τους και διανέμοντας τις συναρτήσεις και τις εξισώσεις για τα αλφαβητικά γράμματα, για να τους καθοδηγήσουν στην τελική εργασία αυτού του εργαλείου

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες: Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- ο σχεδιάζει εξισώσεις και μετατροπές εξισώσεων στο καρτεσιανό επίπεδο,
- ο αναγνωρίζει τον τύπο συναρτήσεων και επομένως το πιθανόν αποτέλεσμα τους,
- ο κάνει καλλιτεχνική απεικόνιση μέσα από τη χρήση συναρτήσεων.

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Εισαγωγή

Όταν οι άνθρωποι συζητάνε για την κατασκευή ενός γραφήματος, συνήθως αναφέρονται στο καρτεσιανό γράφημα. Το καρτεσιανό γράφημα, γνωστό και ως καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, είναι ένα επίπεδο που χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό μιας συντεταγμένης σε ένα επίπεδο μέσω της χρήσης δύο αριθμών: της συντεταγμένης x και της συντεταγμένης y .

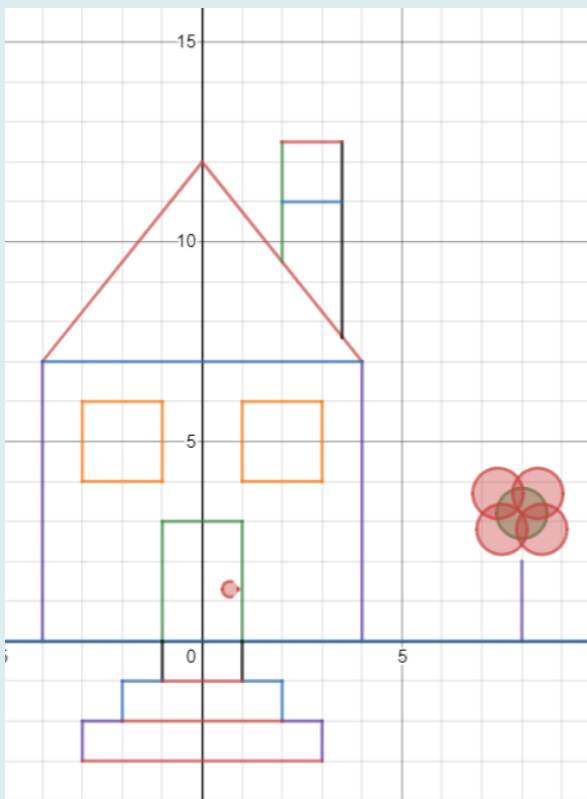
Όταν χρησιμοποιούμε εξισώσεις σε καρτεσιανό γράφημα, μπορούμε να σχεδιάσουμε εικόνες που κάνουν τη σχέση μεταξύ εικαστικών τεχνών και μαθηματικών να φτάνουν σε υψηλότερο επίπεδο. Σε αυτό το πλαίσιο, και θέτοντας ως στόχο οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια των συναρτήσεων και την οπτικοποίησή τους απλά κοιτάζοντας τες, η εφαρμογή Desmos θα χρησιμοποιηθεί ως καμβάς.

Μέσω αυτής της εφαρμογής, οι μαθητές θα μπορούν να παίξουν με τη γραφική παράσταση των εξισώσεων, χρησιμοποιώντας τη δημιουργικότητά τους. Επομένως, τα μαθηματικά θα είναι πιο προσωπικά και οι μαθητές θα μπορούν να σχετιστούν με αυτά.

Καλλιτεχνική απεικόνιση μέσω των συναρτήσεων

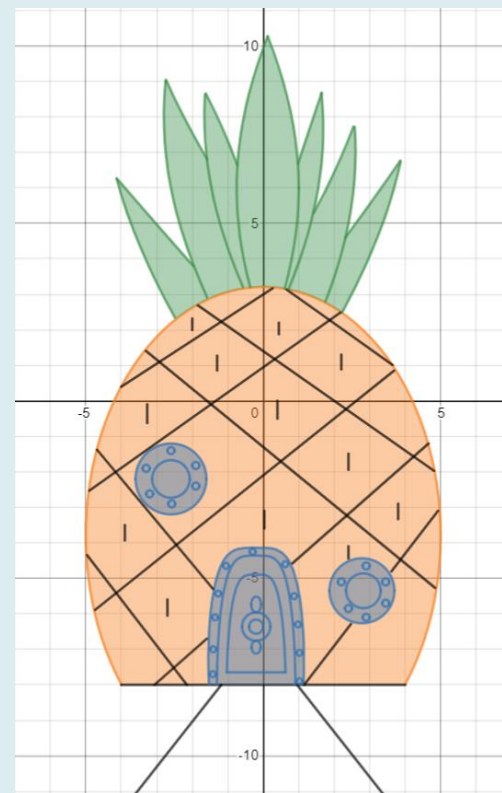
Έχετε σίγουρα παρατηρήσει από το μάθημα των μαθηματικών ότι οι γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν σχήματα που μερικές φορές μοιάζουν με εικόνες και αριθμούς. Διαφορετικές συναρτήσεις παράγουν διαφορετικά σχήματα, πράγμα που σημαίνει ότι για να μοντελοποιήσουμε εικόνες μέσω γραφημάτων, είναι απαραίτητο να κατανοήσουμε τις τιμές μιας συνάρτησης και τις κλίσεις και τις καμπύλες που προκύπτουν από αυτήν.

Από απλούστερες σε σύνθετες γραφικές παραστάσεις, και μέσω του καλού χειρισμού του μήκους τέτοιων σχημάτων και καμπυλών, αυτό που είναι γνωστό ως γραφική τέχνη μπορεί να απεικονιστεί σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.



Εικ. 1 – Σπίτι και λουλούδι

(Πηγή: <https://www.desmos.com/calculator/9fahdexfkl>)



Εικ. 2 – Το σπίτι του Μπομπ Σφουγγαράκι

(Πηγή: Jordan Keckler;
<https://www.desmos.com/calculator/z7d2cvdayo>)

Χρησιμοποιώντας την ηλεκτρονική αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων Desmos ως καμβά, το εργαλείο αυτό θα εστιάσει στην αναπαράσταση απλών σχημάτων, όπως κύκλους και οριζόντιες ευθείες, κάθετες και πλάγιες γραμμές, ό,τι δηλαδή

χρειάζεται για την παραγωγή δημιουργημάτων τα οποία εμπίπτουν στις γραφικές τέχνες.

Γλωσσάρι

Desmos: ένα διαδικτυακό λογισμικό επιστημονικής αριθμομηχανής.

Γραφική τέχνη: ένα είδος οπτικής καλλιτεχνικής έκφρασης που εστιάζει περισσότερο στη γραμμή και τον τόνο παρά στο χρώμα.

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων: ένα σύστημα που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό οποιωνδήποτε δύο σημείων μέσω αριθμητικών συντεταγμένων. Συχνά χρησιμοποιείται για γραφική παράσταση. Επίσης αναφέρεται ως καρτεσιανό γράφημα.

Τα μαθηματικά πίσω από την καλλιτεχνική απεικόνιση

1. Οριζόντιες και κάθετες γραμμές

Όπως υποδηλώνει το όνομα, αυτές είναι ευθείες γραμμές σε ένα καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων.

Μια οριζόντια γραμμή πηγαίνει από αριστερά προς τα δεξιά, πάντα παράλληλη προς τον άξονα x , πράγμα που σημαίνει ότι όλα τα σημεία σε αυτήν έχουν την ίδια y -συντεταγμένη. Από την άλλη, μια κάθετη γραμμή πηγαίνει από κάτω προς τα πάνω, πάντα παράλληλη με τον άξονα y και πάντα με την ίδια x -συντεταγμένη.

Οι εξισώσεις που σχηματίζουν οριζόντιες και κάθετες γραμμές είναι:

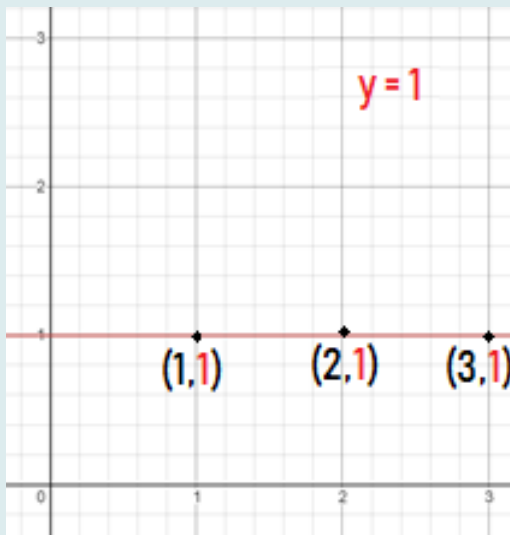
$$\begin{array}{c} \text{Οριζόντια γραμμή} \\ y = b \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Κάθετη γραμμή} \\ x = b \end{array}$$

Όπου:

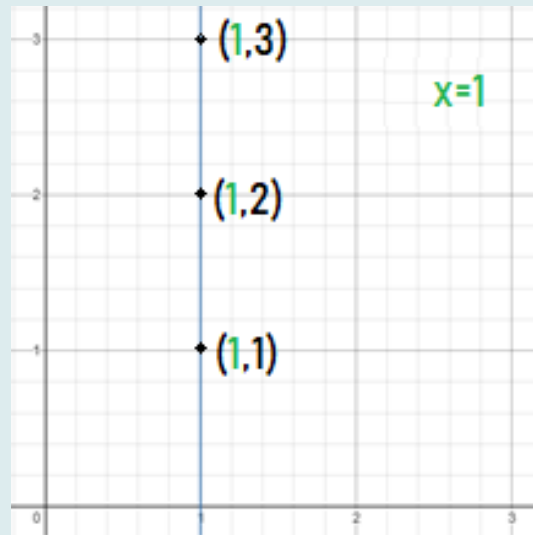
b είναι το σημείο στο οποίο η γραμμή τέμνει τον άξονα των y (για τις οριζόντιες γραμμές) ή τον άξονα των x (για τις κάθετες γραμμές).

Οριζόντια γραμμή



Εικ. 3 – Οριζόντια γραμμή ($y = 1$)
(Πηγή: Desmos.com)

Κάθετη γραμμή



Εικ. 4 – Οριζόντια γραμμή ($x = 1$)
(Πηγή: Desmos.com)

Όπως φαίνεται, σε οριζόντιες γραμμές, ανεξάρτητα από την τιμή του x , η y -τομή είναι πάντα 1. Ομοίως, δεν είναι σημαντική η τιμή y σε κάθετες γραμμές, καθώς η x -τομή είναι πάντα 1.

2. Γραμμικές συναρτήσεις

Ακριβώς όπως οι οριζόντιες και κάθετες γραμμές, οι γραμμικές συναρτήσεις είναι εκείνες των οποίων η γραφική παράσταση σχηματίζει μια ευθεία γραμμή σε ένα επίπεδο. Ωστόσο, δεν είναι πάντα σταθερές. Μπορούν επίσης να έχουν ένα αυξανόμενο ή συρρικνόμενο σχήμα.

Σχηματίζονται με την ακόλουθη εξίσωση:

$$y = mx + b$$

Όπου:

m είναι μια σταθερά και αναπαριστά την κλίση μιας γραμμής.

b, γνωστή ως y -τομή, καθορίζει το σημείο στο οποίο η γραμμή τέμνει τον άξονα y .

Όταν:

$m > 0$ η κλίση της γραμμής θα αναπαριστά αύξηση (θετική κλίση).

$m = 0$ η κλίση της γραμμής είναι σταθερή (γίνεται μια οριζόντια γραμμή).

$m < 0$ η κλίση της γραμμής θα αναπαριστά μείωση (αρνητική κλίση).

Γραμμικές συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απεικόνιση και την πρόβλεψη πολλών εφαρμογών και καταστάσεων στη ζωή στις οποίες υπάρχει άγνωστη τιμή / ποσότητα.

Παράδειγμα: σκοπεύετε να κάνετε πάρτυ για τα γενέθλιά σας σε ένα μπαρ. Παρόλο που γνωρίζετε ότι η υπηρεσία κοστίζει € 9 και το κόστος γεύματος ανά άτομο είναι € 8,15, εξακολουθείτε να μην είστε σίγουροι για το πόσοι από τους φίλους σας θα έρθουν.

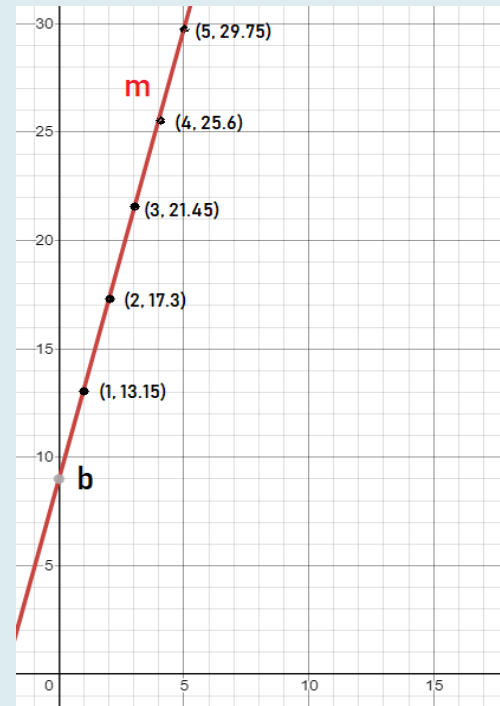
Σε αυτή την περίπτωση, η γραμμική σας συνάρτηση θα είναι

$$y = 8.15x + 9$$

Κλίση: $m = 8.15$

Τομή με άξονα των y : $b = 9$

Από αυτή τη στιγμή, όταν αντικαθίσταται το x για τον αριθμό των συμμετεχόντων, το αποτέλεσμα θα είναι το συνολικό κόστος. Για παράδειγμα, εάν έρθουν 4 άτομα (δηλ. όταν $x = 4$), το y (δηλαδή το συνολικό κόστος) είναι € 25,60.



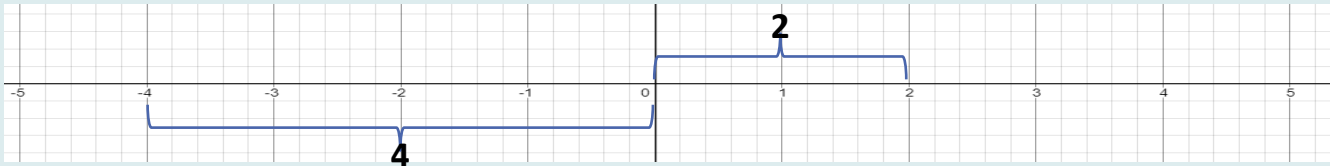
Εικ. 5 – Γραμμική συνάρτηση ($y = 8.15x + 9$)
(Πηγή: Desmos.com)

3. Απόλυτη τιμή

Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού μπορεί να θεωρηθεί ως η απόσταση από την αρχή των αξόνων, 0, που συνεπώς σημαίνει ότι οποιοσδήποτε αριθμός, αρνητικός ή θετικός, θα έχει πάντοτε θετική τιμή.

Μια απόλυτη τιμή ενός αριθμού παρουσιάζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

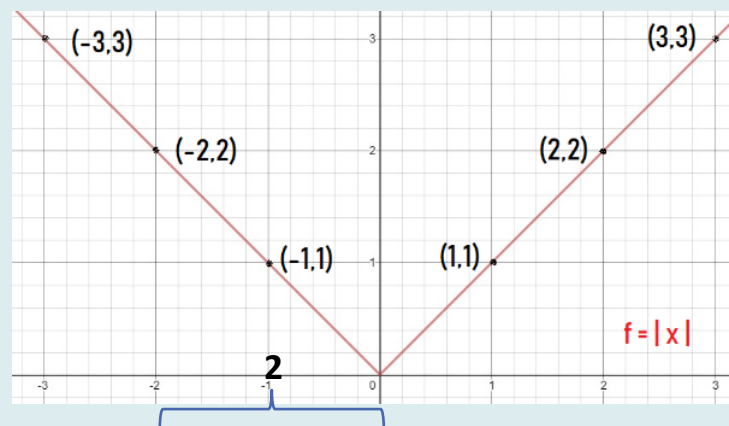
$$|x|$$



Εικ. 6 – Γραφική παράσταση απόλυτης τιμής
(Πηγή:Desmos.com)

Με αυτόν τον τρόπο, αντί να γράψουμε «η απόλυτη τιμή του -4 είναι 4», μπορούμε απλά να γράψουμε « $|-4| = 4$ ».

Αυτό το γράφημα δείχνει τη συνάρτηση απόλυτης τιμής για πραγματικούς αριθμούς. Ουσιαστικά, δηλώνει ότι $|x|$ αντιστοιχεί στον αριθμό του άξονα y , δηλαδή, για παράδειγμα, $|-2|$ (η απόλυτη τιμή του -2) είναι 2.



Εικ. 7 – Απόλυτη τιμή ($f = |x|$)
(Πηγή: Desmos.com)

4. Κύκλοι

Όταν γνωρίζετε την ακτίνα του κύκλου και τις συντεταγμένες του κέντρου του, είναι δυνατό να σχεδιάσετε έναν κύκλο σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Η εξίσωση κύκλου είναι:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Όπου:

x και y είναι οποιαδήποτε σημεία στον κύκλο.

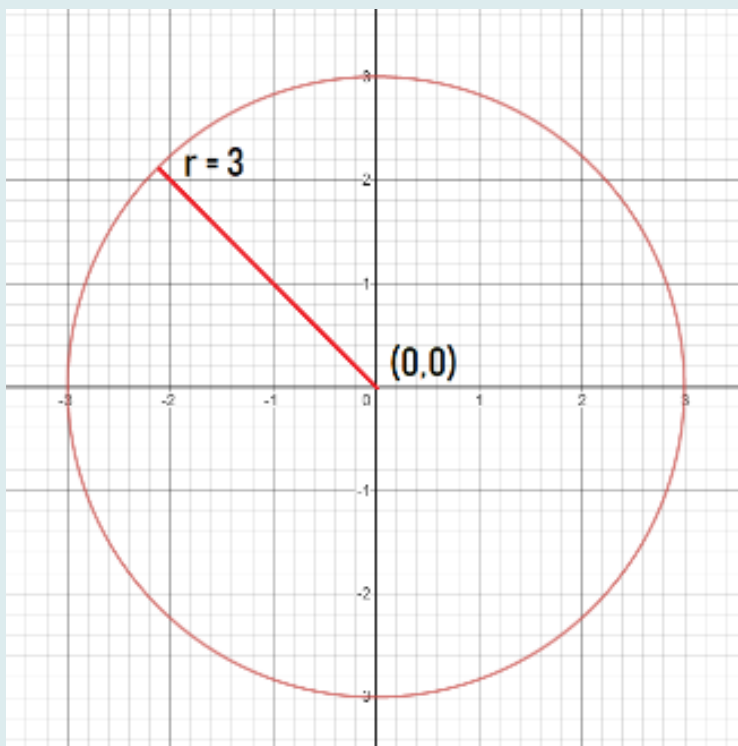
x_c και y_c είναι τα σημεία στο κέντρο του κύκλου, που αντιστοιχούν σε κάθε άξονα.

r είναι η ακτίνα.

Ας υποθέσουμε ότι θέλετε να σχεδιάσετε έναν κύκλο με ακτίνα 3, δεδομένου ότι οι συντεταγμένες του κέντρου είναι 0 και για τους δύο άξονες x και y .

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$$

Στο παράδειγμα, το αποτέλεσμα θα είναι το ακόλουθο γράφημα:

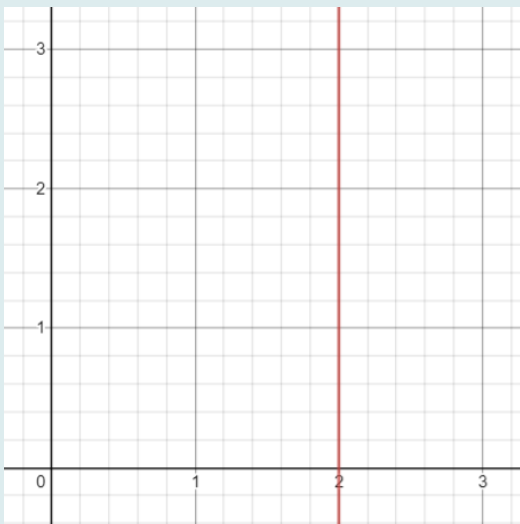


Εικ. 8 – Κύκλος $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$
(Πηγή: Desmos.com)

Χρησιμοποιώντας το Desmos

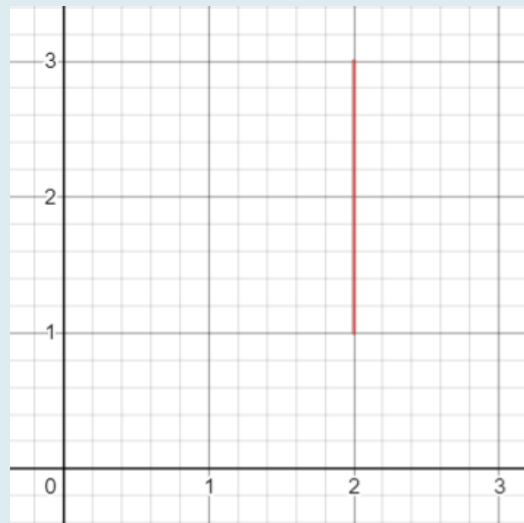
Όταν χρησιμοποιείτε το Desmos, εάν θέλετε να παραλείψετε ένα μέρος ενός γραφήματος, θα χρειαστεί να ορίσετε όρια στη συνάρτηση - αυτό γίνεται με τον καθορισμό των τιμών σας μεταξύ παρενθέσεων. Εξετάστε τα ακόλουθα παραδείγματα:

$x = 2$ σχηματίζει μια κάθετη γραμμή που θα μεταβεί από $-\infty$ σε $+\infty$ ενώ τέμνει το 2 στη συντεταγμένη x .

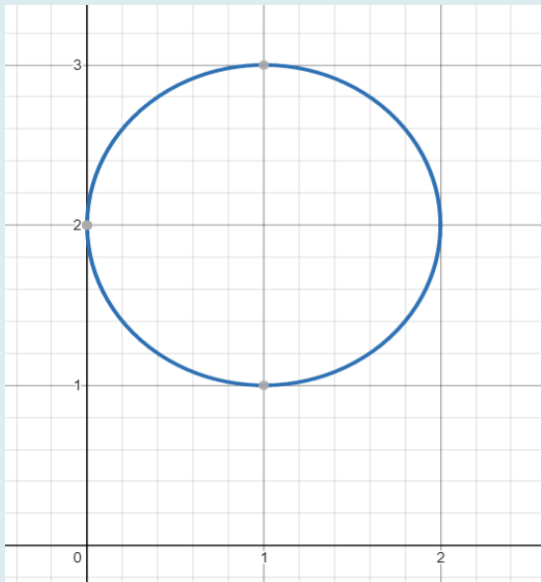


$x = 2 \{ 1 < y < 3 \}$

Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση, η κάθετη γραμμή είχε ρυθμιστεί να δείχνει μόνο εκεί όπου $y > 1$ και $y < 3$.

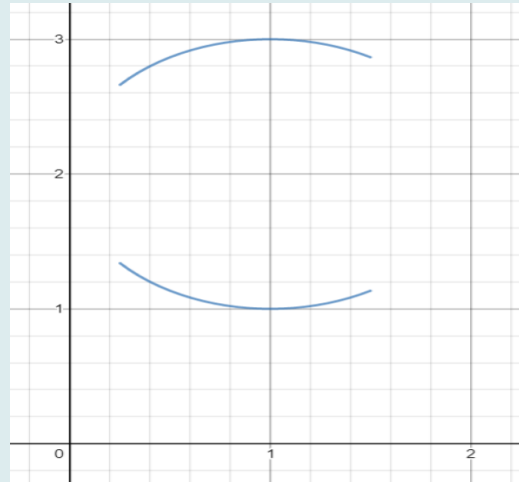


$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1^2$ σχηματίζει το σχήμα ενός κύκλου όπου το κέντρο του ορίστηκε ως $x = 1$ και $y = 2$, με ακτίνα 1^2 .



$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1^2 \{ 0.25 < x < 1.5 \}$

Χρησιμοποιώντας την ίδια εξίσωση κύκλου, αλλά ρυθμίζοντάς την να δείχνει μόνο όπου $x > 0,25$ και $x < 1,5$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:



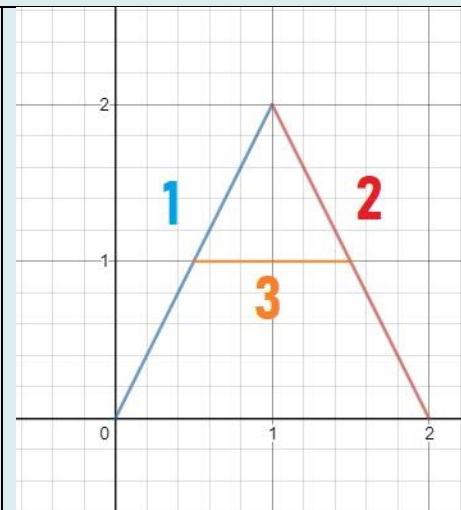
Αναλύστε τις συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία του αλφαβήτου και στη συνέχεια προχωρήστε στην τελική εργασία.

1) $2x + 0 \{ 0 < x < 1 \}$

2) $-2x + 4 \{ 1 < x < 2 \}$

3) $y = 1 \{ 0.5 < x < 1.5 \}$


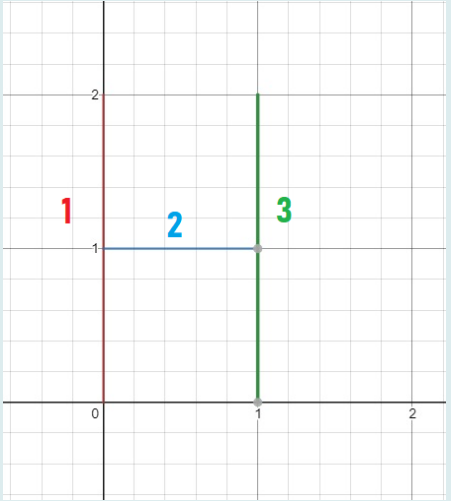

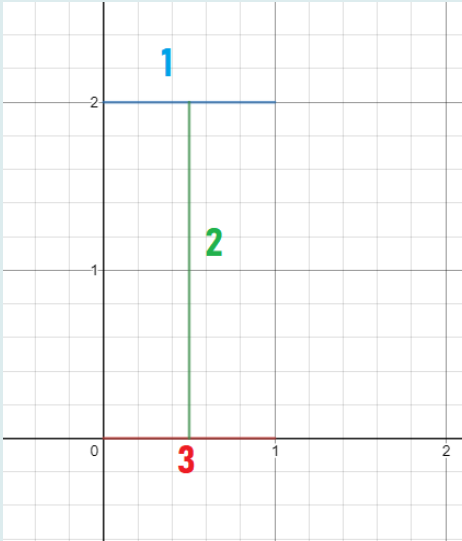

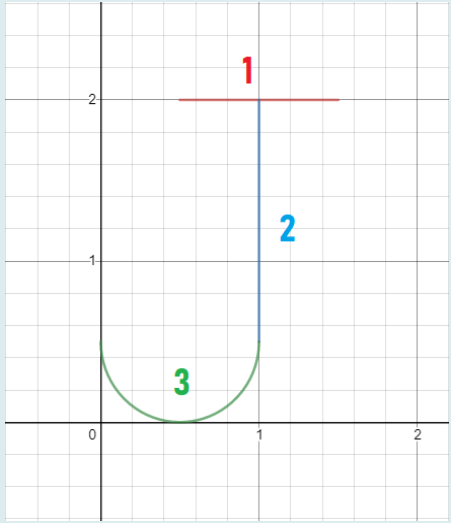
A



<p>1) $x = 0 \{0 < y < 2\}$</p> <p>2) $y = 2 \{0 < x < 0.5\}$</p> <p>3) $(x - 0.5)^2 + (y - 1.5)^2 = 0.25 \{0.5 < x < 1\}$</p> <p>4) $y = 1 \{0 < x < 0.5\}$</p> <p>5) $(x - 0.5)^2 + (y - .5)^2 = 0.25 \{0.5 < x < 1\}$</p> <p>6) $y = 0 \{0 < x < 0.5\}$</p>	<h1>B</h1>	
<p>1) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \{x < 1.75\}$</p>	<h1>C</h1>	

<p>1) $x = 0 \{0 < y < 2\}$</p> <p>2) $y = 2 \{0 < x < 0.5\}$</p> <p>3) $y = 0 \{0 < x < 0.5\}$</p> <p>4) $(x - 0.5)^2 + (y - 1)^2 = 1 \{x > 0.5\}$</p>	<h1>D</h1>	
--	------------	--

<p>1) $x = 0 \{0 < y < 2\}$</p> <p>2) $y = 2 \{0 < x < 1.5\}$</p> <p>3) $y = 1 \{0 < x < 1\}$</p> <p>4) $y = 0 \{0 < x < 1.5\}$</p>	<h1>E</h1>	
<p>1) $x = 0 \{0 < y < 2\}$</p> <p>2) $y = 2 \{0 < x < 1\}$</p> <p>3) $y = 1 \{0 < x < 0.75\}$</p>	<h1>F</h1>	
<p>1) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \{x < 1.5\}$</p> <p>2) $y = 1 \{1 < x < 1.5\}$</p> <p>3) $x = 1.5 \{0.134 < y < 1\}$</p>	<h1>G</h1>	

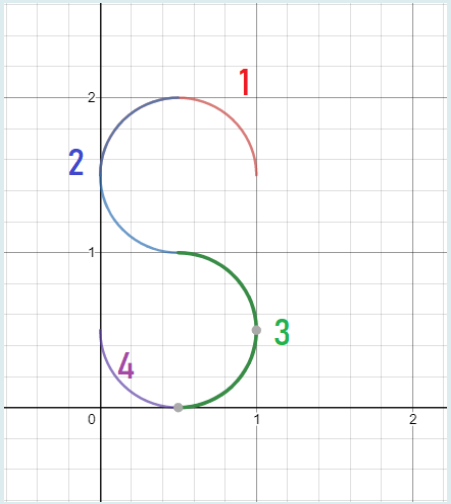
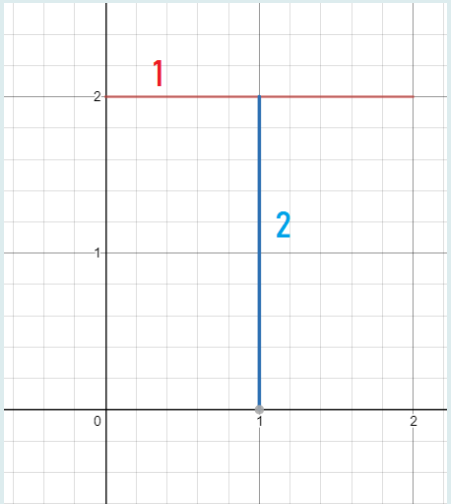
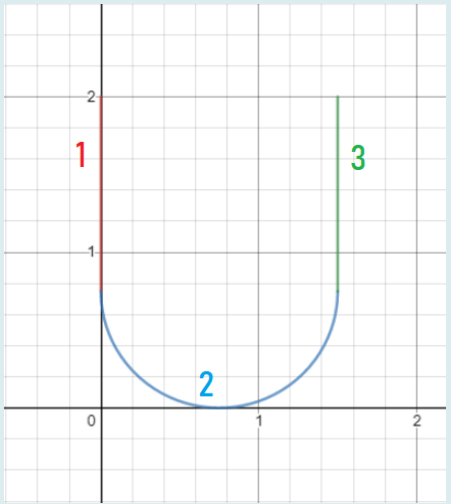
<p>1) $x = 0 \{0 < y < 2\}$</p> <p>2) $y = 1 \{0 < x < 1\}$</p> <p>3) $x = 1 \{0 < y < 2\}$</p>		
<p>1) $y = 2 \{0 < x < 1\}$</p> <p>2) $x = 0.5 \{0 < y < 2\}$</p> <p>3) $y = 0 \{0 < x < 1\}$</p>		
<p>1) $y = 2 \{0.5 < x < 1.5\}$</p> <p>2) $x = 1 \{0.5 < y < 2\}$</p> <p>3) $(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 = 0.25 \{0 < y < 0.5\}$</p>		

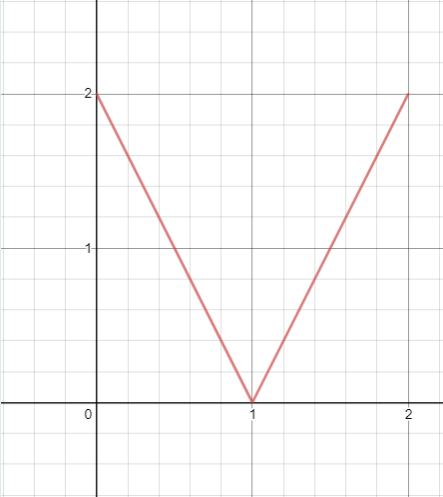
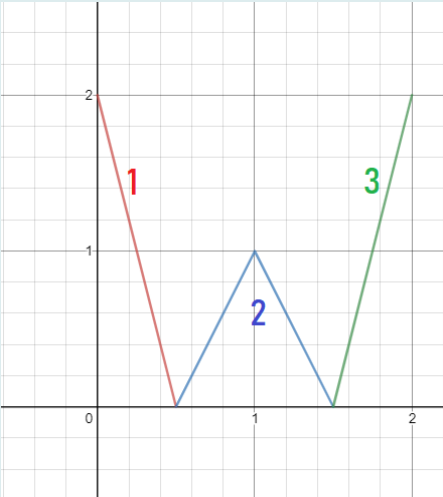
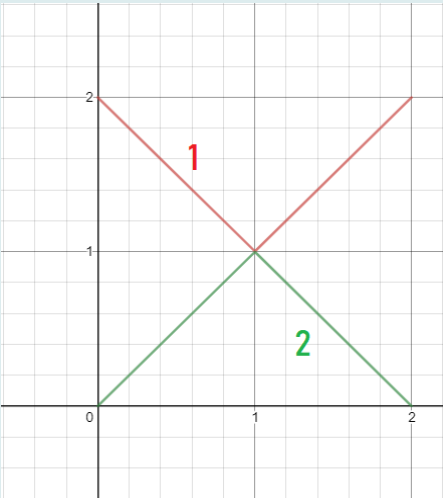
<p>1) $x = 0 \{0 < y < 2\}$</p> <p>2) $x + 1 \{0 < x < 1\}$</p>	<h1>K</h1>	
<p>1) $x = 0 \{0 < y < 2\}$</p> <p>2) $y = 0 \{0 < x < 1\}$</p>	<h1>L</h1>	

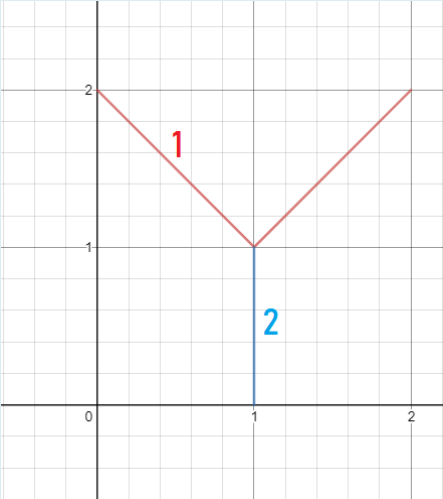
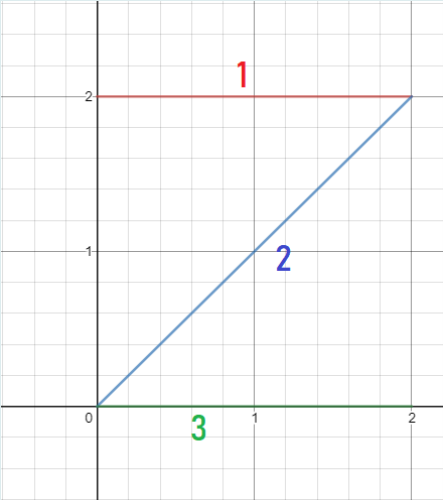
<p>1) $x = 0 \{0 < y < 2\}$</p> <p>2) $-x + 2 \{0 < x < 1\}$</p> <p>3) $x \{1 < x < 2\}$</p> <p>4) $x = 2 \{0 < y < 2\}$</p>	<h1>M</h1>	
--	------------	--

<p>1) $x = 0 \{0 < y < 2\}$</p> <p>2) $-4/3x + 2 \{0 < x < 1.5\}$</p> <p>3) $x = 1.5 \{0 < y < 2\}$</p>	<h1>N</h1>	
<p>1) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$</p>	<h1>O</h1>	

<p>1) $x = 0 \{0 < y < 2\}$</p> <p>2) $y = 2 \{0 < x < 1\}$</p> <p>3) $(x - 1)^2 + (y - 1.5)^2 = 0.25 \{1 < x < 1.5\}$</p> <p>4) $y = 1 \{0 < x < 1\}$</p>	<h1>P</h1>	
<p>1) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$</p> <p>2) $-x + 2 \{1.5 < x < 2\}$</p>	<h1>Q</h1>	
<p>1) $x = 0 \{0 < y < 2\}$</p> <p>2) $y = 2 \{0 < x < 0.5\}$</p> <p>3) $(x - 0.5)^2 + (y - 1.5)^2 = 0.25 \{x > 0.5\}$</p> <p>4) $y = 1 \{0 < x < 0.5\}$</p> <p>5) $-2x + 2 \{0.5 < x < 1\}$</p>	<h1>R</h1>	

<p>1) $(x - 0.5)^2 + (y - 1.5)^2 = 0.25$ {$y > 1.5$}</p> <p>2) $(x - .5)^2 + (y - 1.5)^2 = .25$ {$x < .5$}</p> <p>3) $(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 = .25$ {$0.5 < x < 1$}</p> <p>4) $(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 = .25$ {$y < 0.5$}</p>	<h1>S</h1>	
<p>1) $y = 2$ {$0 < x < 2$}</p> <p>2) $x = 1$ {$0 < y < 2$}</p>	<h1>T</h1>	
<p>1) $x=0$ {$0.75 < y < 2$}</p> <p>2) $(x - 0.75)^2 + (y - 0.75)^2 = 0.75^2$ {$y < 0.75$}</p> <p>3) $x=1.5$ {$0.75 < y < 2$}</p>	<h1>U</h1>	

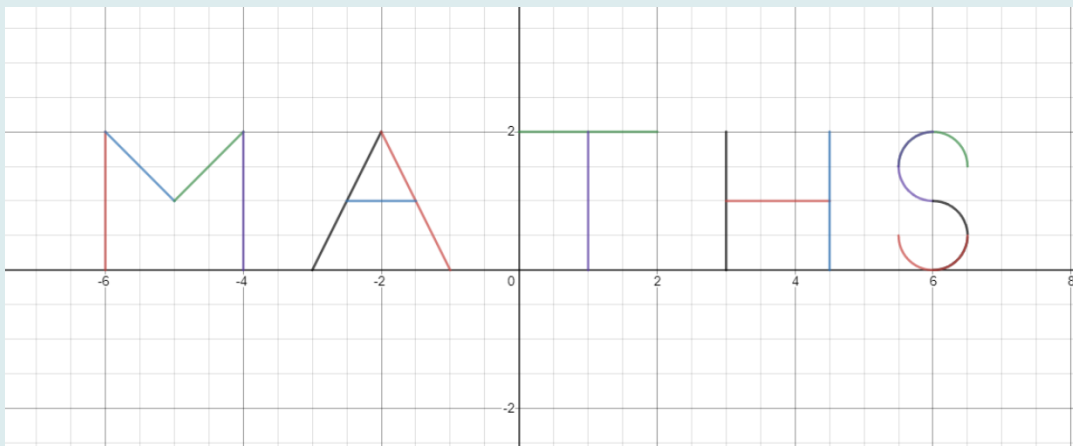
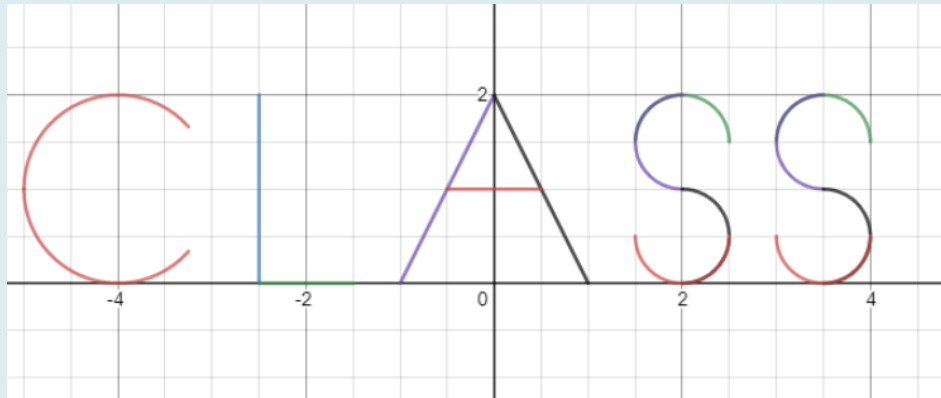
<p>1) $2 x - 1 \{0 < x < 2\}$</p>	<p>V</p>	
<p>1) $-4x + 2 \{0 < x < 0.5\}$ 2) $-2 x - 1 + 1 \{0.5 < x < 1.5\}$ 3) $4x - 6 \{1.5 < x < 2\}$</p>	<p>W</p>	
<p>1) $x - 1 + 1 \{0 < x < 2\}$ 2) $-x - 1 + 1 \{0 < x < 2\}$</p>	<p>X</p>	

<p>1) $x - 1 + 1 \{0 < x < 2\}$</p> <p>2) $x = 1 \{0 < y < 1\}$</p>	<h1>Y</h1>	
<p>1) $y = 2 \{0 < x < 2\}$</p> <p>2) $x \{0 < x < 2\}$</p> <p>3) $y = 0 \{0 < x < 2\}$</p>	<h1>Z</h1>	

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που δίνονται για να σχηματιστούν τα γράμματα του αλφαβήτου, σχηματίστε τις λέξεις “CLASS” και “MATHS”.



ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Αν είχατε επιτυχία με την ερώτηση 1, βάλτε τη δημιουργικότητά σας να δουλέψει και σχεδιάστε μια εικόνα της προτίμησής σας ή γράψτε το δικό σας όνομα.

Μάθετε περισσότερα...

Εξερευνήστε τα μαθηματικά με τη διαδικτυακή εφαρμογή Desmos

<https://www.desmos.com/>

Το αλφάβητο γραμμένο με εξισώσεις στο Desmos

<https://www.desmos.com/calculator/l8u2vigxyb>

Σχεδιάζοντας τα κλάσματα της απόλυτης τιμής

<https://www.khanacademy.org/math/algebra/absolute-value-equations-functions/graphs-of-absolute-value-functions/v/graphing-absolute-value-functions>

Παράγωγοι και ακέραιοι στην καλλιτεχνική απεικόνιση

https://ethnomath.coe.hawaii.edu/pdf/university_derivatives_integrals.pdf

Εισαγωγή στις γραμμικές συναρτήσεις

<https://courses.lumenlearning.com/boundless-algebra/chapter/introduction-to-linear-functions/>

Η γεωμετρία ενός κύκλου

<http://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/mc-ty-circles-2009-1.pdf>