

# ΜΕΡΟΣ Ι: ΕΙΚΑΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 13-15

---

## ΕΡΓΑΛΕΙΟ 5: ΟΡΙΓΚΑΜΙ ΚΑΙ ΧΩΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

---

LogoPsyCom



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



## Οδηγός Εκπαιδευτικού

**Τίτλος:** Οριγκάμι και χωρικές σχέσεις

**Ηλικιακό Εύρος:** 13-15 χρονών

**Διάρκεια:** 2 ώρες

**Μαθηματικές Έννοιες:** διαστάσεις στον χώρο, συμμετρία, γεωμετρικές σχέσεις, θεώρημα του Θαλή, Πυθαγόρειο θεώρημα, αξιώματα

**Καλλιτεχνικές Έννοιες:** Zhezhi, Οριγκάμι, τεχνικές διπλώματος χαρτιού, τρισδιάστατα βιβλία

**Γενικοί Σκοποί:** Οι μαθητές να ανακαλύψουν πως το οριγκάμι μπορεί να απεικονίσει μαθηματικές έννοιες και διάσημα θεωρήματα και να αποκτήσουν μια πιο πρακτική άποψη για τη χρήση των μαθηματικών.

**Οδηγίες και Μεθοδολογία:** Οι μαθητές θα διερευνήσουν και τα δύο πεδία ως σύνολο, εφαρμόζοντας τεχνικές οριγκάμι. Αυτή είναι η βάση για να ανακαλύψουν τις εν λόγω έννοιες.

**Πηγές:** Αυτό το εργαλείο παρέχει εικόνες και βίντεο που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε. Τα θέματα που εξετάζονται θα σας βοηθήσουν να βρείτε άλλα υλικά για να εξατομικεύσετε και να δώσετε μια άλλη διάσταση στο μάθημά σας.

**Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό:** Η μάθηση μέσα από την πράξη είναι πολύ αποτελεσματική, ειδικά όταν πρόκειται για νεαρούς μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Πάντα να εξηγείτε την πρακτική χρήση κάθε μαθηματικής έννοιας. Οι δραστηριότητες με οριγκάμι μπορούν να γίνουν σε ζευγάρια, ειδικά για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και δυσπραξία που θα έχουν περισσότερες δυσκολίες με τους χειρισμούς.

**Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες:** Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- ο γνωρίζει ποια ήταν τα Ευκλείδια αξιώματα
- ο κατανοεί και να χρησιμοποιεί το θεώρημα του Θαλή
- ο κατανοεί και να χρησιμοποιεί το Πυθαγόρειο θεώρημα.

**Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:**

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

## Εισαγωγή

Το οριγκάμι είναι ιαπωνική λέξη που αναφέρεται στο δίπλωμα χαρτιού. Αυτή η τεχνική συνδέεται σαφώς με τα μαθηματικά καθώς χρησιμοποιεί τις χωρικές σχέσεις για να δημιουργήσει σχήματα τα οποία μπορούν να μετασχηματιστούν με το δίπλωμα και το ξεδίπλωμα του χαρτιού με συγκεκριμένους τρόπους.

Η γεωμετρική γνώση θα μπορούσε να θεωρηθεί σίγουρα ως θεωρητικό μέσο στις εικαστικές τέχνες. Κάθε χειρισμός μας στον τρισδιάστατο χώρο είναι μια χρήση των μαθηματικών. Χωρίς να το σκεφτόμαστε, υπολογίζουμε τις αποστάσεις και εντοπίζουμε ειδικές σχέσεις.

Πολλοί μελετητές έχουν υπογραμμίσει την αξία της χρήσης του οριγκάμι στην εκπαίδευση, ειδικά για τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Οι τεχνικές διπλώματος χαρτιού μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τις γεωμετρικές σχέσεις και τους μετασχηματισμούς, μέσω της εμπειρίας και της ανάλυσης που παρατηρούν χάρη σε αυτή τη δημιουργική μέθοδο. Η προστιθέμενη αξία είναι ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις έννοιες που μαθαίνουν για να δημιουργήσουν νέες καλλιτεχνικές συνθέσεις και να έχουν ένα ουσιαστικό αποτέλεσμα στις δραστηριότητές τους.

Αυτό το εργαλείο θα εστιάσει συνεπώς στην εφαρμογή των μαθηματικών στις τεχνικές διπλώματος του οριγκάμι και θα περιλαμβάνει μερικές δραστηριότητες μη-τυπικής μάθησης, ώστε οι μαθητές να βιώσουν μια πρακτική και δημιουργική μαθηματική εμπειρία.

## Η τέχνη του οριγκάμι

Πριν γίνει μέρος της ιαπωνικής τέχνης, το δίπλωμα χαρτιού εμφανίστηκε στην Κίνα και ονομαζόταν Zhezhi (Ζε-ζι). Ήταν τον 6<sup>ο</sup> αιώνα όταν οι βουδιστές μοναχοί έφεραν αυτή την τέχνη στην Ιαπωνία. Στα ιαπωνικά, το οριγκάμι (origami) προέρχεται από το «ori», δίπλωμα, και το «gami», χαρτί. Χρησιμοποιήθηκε ως ψυχαγωγική δραστηριότητα για παιδιά, μέχρι τη στιγμή που ένας δάσκαλος γεωμετρίας, ο Akira Yoshizawa, ο οποίος είχε απολαύσει το οριγκάμι ως παιδί, αποφάσισε να το χρησιμοποιήσει για να διδάξει γωνίες, γραμμές και σχήματα στους μαθητές του. Ανέπτυξε τις νέες τεχνικές του και πολύ γρήγορα, το χόμπυ του μετατράπηκε σε μια μορφή τέχνης στην οποία πολλοί δάσκαλοι μαθηματικών βρήκαν μεγάλο ενδιαφέρον.

### Πού μπορούμε να δούμε και να χρησιμοποιήσουμε το οριγκάμι;

Το Οριγκάμι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πολλούς διαφορετικούς σκοπούς. Μερικοί δάσκαλοι μαθηματικών το χρησιμοποιούν για να διδάξουν γεωμετρία, αλλά μπορείτε να το εφαρμόσετε και αλλού! Μπορείτε επίσης να το παρατηρήσετε στη φύση!

Γνωρίζατε ότι κάποια φύλλα δέντρου ξεδιπλώνονται με έναν πολύ παρόμοιο τρόπο με μια τεχνική οριγκάμι που ονομάζεται Μίυρα; Λοιπόν, οι ερευνητές του Κέντρου




**Εικόνα 1: Ο τρόπος που ξεδιπλώνονται τα φύλλα οξιάς**


Βιοϊατρικής, στο Πανεπιστήμιο του Ρέντινγκ, διαπίστωσαν ότι τα φύλλα οξιάς και χαρουπιού ξεδιπλώνονται πολύ παρόμοια με την τεχνική οριγκάμι.

Ανάμεσα στις ανθρώπινες χρήσεις του οριγκάμι, η αναδίπλωση Μίυρα χρησιμοποιείται επίσης στους χάρτες. Είναι διπλωμένοι κατά τέτοιο τρόπο που να διευκολύνει τη μεταφορά τους και τον τρόπο με τον οποίο ξεδιπλώνονται.

Εδώ είναι ένα GIF που δείχνει πώς φαίνεται:

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Miura-ori.gif>

 Αυτή η τεχνική είναι πολύ χρήσιμη όταν πρέπει να μεταφέρετε ένα μεγάλο κομμάτι χαρτιού ή μια επίπεδη επιφάνεια. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιήθηκε επίσης για τον σχεδιασμό ηλιακών συλλεκτών (πάνελς) έτσι ώστε να ξεδιπλώνονται ευκολότερα όταν τοποθετούνται στον τελικό προορισμό τους.

 Εδώ είναι ένα βίντεο από το BYU (Brigham Young University) που εξηγεί πώς το οριγκάμι χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό των ηλιακών συλλεκτών:


<https://www.youtube.com/watch?v=3E12uju1vgQ>.

## Τρισδιάστατα βιβλία

Προφανώς γνωρίζετε τι είναι τα τρισδιάστατα βιβλία. Περιέχουν διπλωμένες φιγούρες που ξεδιπλώνονται όταν ανοίγετε το βιβλίο και δείχνουν την απεικόνιση της ιστορίας. Αυτά τα βιβλία χρησιμοποιούν το δίπλωμα χαρτιού με πολύ δημιουργικό τρόπο.

 Το ακόλουθο GIF θα σας δείξει τι είναι ένα τρισδιάστατο βιβλίο:

<https://en.wikipedia.org/wiki/File:PopupCinderella.gif>

 Μπορείτε να παρακολουθήσετε αυτό το βίντεο TED-Ed για να κατανοήσετε πώς να δημιουργήσετε κινούμενα σχέδια με τρισδιάστατα βιβλία:

[https://www.youtube.com/watch?v=RZR\\_b753ZJ0](https://www.youtube.com/watch?v=RZR_b753ZJ0)

## Γλωσσάρι

**Zhezhi:** η τέχνη διπλώματος χαρτιού στην Κίνα.

**Οριγκάμι:** η τέχνη διπλώματος χαρτιού στην Ιαπωνία.



**Αναδίπλωση Miura:** είναι η χρήση γραμμών, σχημάτων, μορφών και χρωμάτων που διαφέρουν από την ακριβή απεικόνιση του πραγματικού κόσμου στην εικαστική τέχνη.

**Τρισδιάστατα βιβλία:** είναι βιβλία στα οποία οι συγγραφείς χρησιμοποιούν διπλωμένο χαρτί για να δημιουργήσουν τρισδιάστατες απεικονίσεις που ξεδιπλώνουν καθώς ο αναγνώστης ανοίγει το βιβλίο.

## Τα μαθηματικά πίσω από το οριγκάμι

### Τα αξιώματα:

Το οριγκάμι μπορεί να λειτουργήσει συμπληρωματικά στους κανόνες γεωμετρίας που ήδη γνωρίζουμε. Για παράδειγμα, τα αξιώματα στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη μπορούν να αποτελέσουν καλό παράδειγμα για να δημιουργηθεί ένα άλλο σύνολο αξιωμάτων που σχετίζονται με την τέχνη διπλώματος χαρτιού.

Ας δούμε πρώτα τι ήταν τα **αξιώματα του Ευκλείδη**:

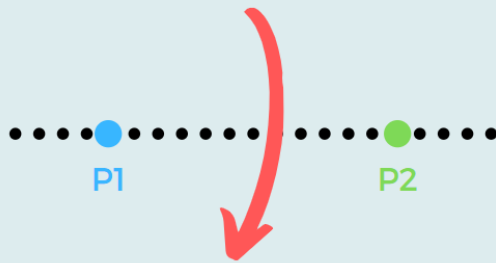
- Λαμβάνοντας υπόψη οποιαδήποτε δύο σημεία, μπορεί κανείς να σχεδιάσει μια ευθεία γραμμή μεταξύ τους.
- Οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί επ 'αόριστον.
- Ένας κύκλος ορίζεται από ένα κέντρο και μια απόσταση (ακτίνα)
- Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.
- Έστω δύο ευθείες που τέμνονται με μια Τρίτη. Οι ευθείες αυτές θα έχουν ένα σημείο τομής από τη μεριά που οι εσωτερικές γωνίες που σχηματίζονται με την Τρίτη ευθεία έχουν άθροισμα μικρότερο από δυο ορθές γωνίες

Αν και αυτά τα αξιώματα μπορούν να βοηθήσουν στην απόδειξη πιο περίπλοκων θεωρημάτων, η γεωμετρία του οριγκάμι μπορεί επίσης να θεωρηθεί πολύ χρήσιμη.



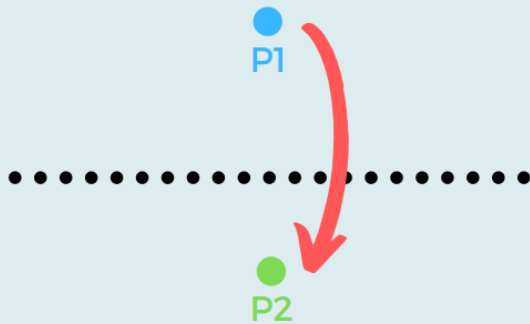
Εδώ είναι τα **αξιώματα των Huzita-Hatori**:

Η **αναδίπλωση** και η **κίνηση** υπογραμμίζονται σε κάθε εικόνα.



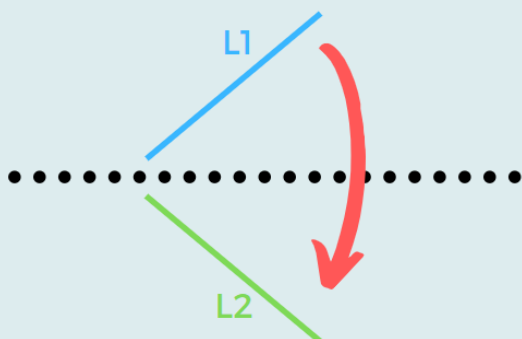
1. Λαμβάνοντας υπόψη δύο σημεία **P1** και **P2**, υπάρχει μια μοναδική αναδίπλωση που διέρχεται και από τα δύο.

Εικόνα 2: Πρώτο αξίωμα Huzita-Hatori



2. Λαμβάνοντας υπόψη δύο σημεία **P1** και **P2**, υπάρχει μια μοναδική αναδίπλωση που τοποθετεί το P1 στο P2.

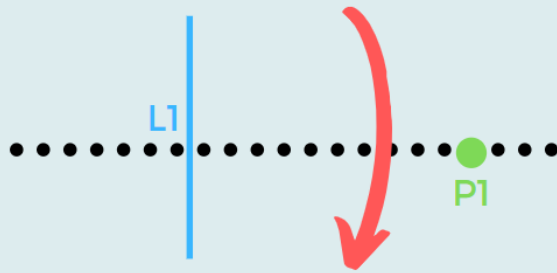
Εικόνα 3: Δεύτερο αξίωμα Huzita-Hatori



3. Λαμβάνοντας υπόψη δύο γραμμές **L1** και **L2**, υπάρχει μια αναδίπλωση που τοποθετεί την L1 στην L2.

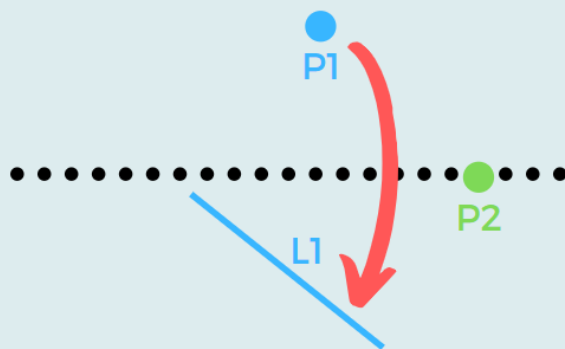
Εικόνα 4: Τρίτο αξίωμα Huzita-Hatori





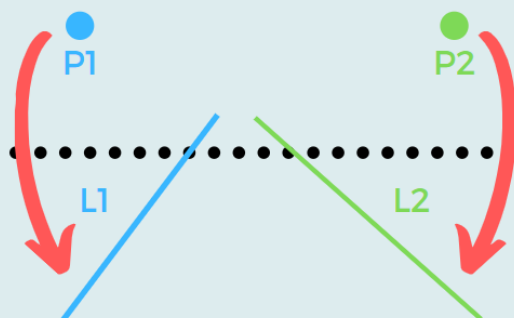
4. Λαμβάνοντας υπόψη ένα σημείο  $P1$  και μια γραμμή  $L1$ , υπάρχει μια μοναδική αναδίπλωση κάθετη προς την  $L1$  που διέρχεται από το  $P1$ .

Εικόνα 5: Τέταρτο αξίωμα Huzita-Hatori



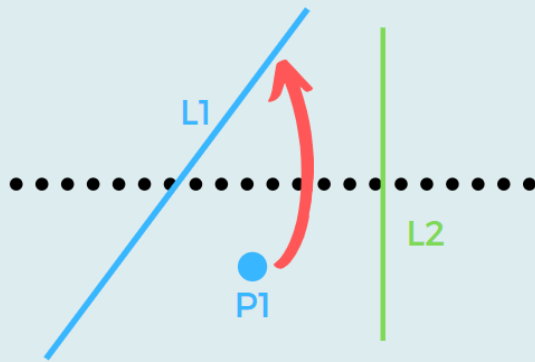
5. Λαμβάνοντας υπόψη δύο σημεία  $P1$  και  $P2$  και μια γραμμή  $L1$ , υπάρχει μια αναδίπλωση που τοποθετεί το  $P1$  στην  $L1$  και περνάει από το  $P2$ .

Εικόνα 6: Πέμπτο αξίωμα Huzita-Hatori



6. Λαμβάνοντας υπόψη δύο σημεία  $P1$  και  $P2$  και δυο γραμμές  $L1$  και  $L2$ , υπάρχει μια αναδίπλωση που τοποθετεί το  $P1$  στην  $L1$  και το  $P2$  στην  $L2$ .

Εικόνα 7: Έκτο αξίωμα Huzita-Hatori



7. Λαμβάνοντας ένα σημείο **P1** και δύο γραμμές **L1** και **L2**, υπάρχει μια αναδίπλωση που τοποθετεί το P1 στην L1 και είναι κάθετη στην L2.

Εικόνα 8: Έβδομο αξίωμα Huzita-Hatori

## Το θεώρημα του Θαλή

Ο Θαλής ήταν Έλληνας μαθηματικός από την αρχαιότητα. Το θεώρημα του αναφέρεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

Εάν τα A, B και C είναι διακριτά σημεία σε έναν κύκλο όπου η ευθεία AC είναι μια διάμετρος, τότε η γωνία  $\angle ABC$  είναι μια ορθή γωνία.

10

Για να το αποδείξει, ο Θαλής το εξήγησε ως εξής:

- Δεδομένου ότι  $OA = OB = OC$ , τα τρίγωνα OBA και OBC είναι ισοσκελή τρίγωνα και από την ισότητα των γωνιών της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου,
- $\angle OBC = \angle OCB$  and  $\angle OBA = \angle OAB$ .

Ας πούμε  $\alpha = \angle BAO$  και  $\beta = \angle OBC$ .

- Οι τρεις εσωτερικές γωνίες του τριγώνου ABC είναι  $\alpha$ ,  $(\alpha + \beta)$  και  $\beta$ .
- Δεδομένου ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με  $180^\circ$ , έχουμε:

$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

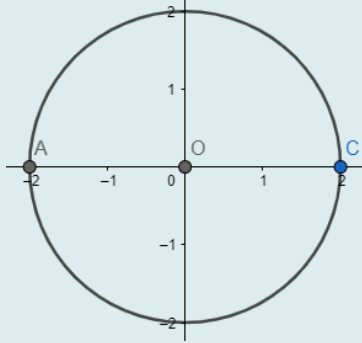
$$2(\alpha + \beta) = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

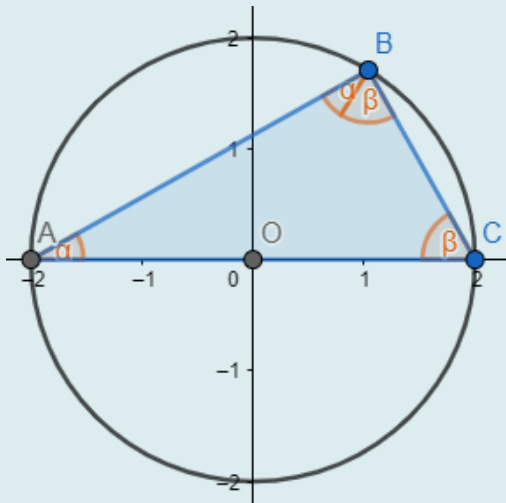
‘Ο.΄Ε.Δ (μένει να αποδειχθεί)

 Ας σχεδιάσουμε τη γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος:

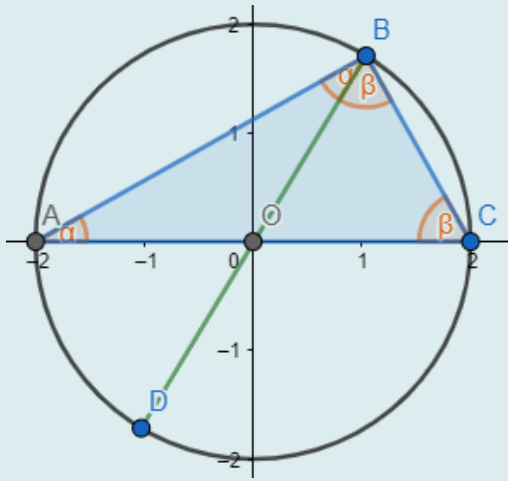
1. Με ένα χάρακα και έναν διαβήτη, σχεδιάστε έναν κύκλο σε ένα φύλλο χαρτί.



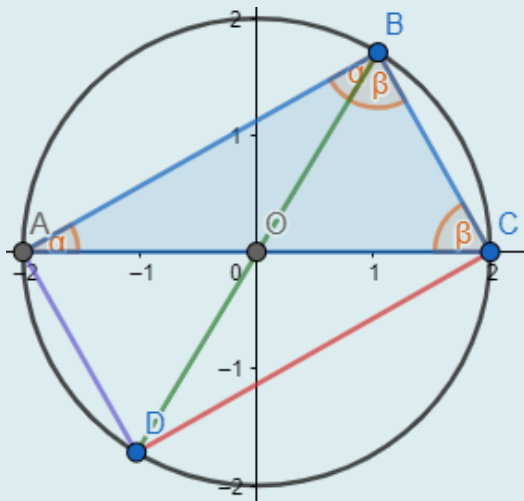
2. Σχεδιάστε ένα τρίγωνο ABC όπου το **τμήμα AC** είναι η **διάμετρος** του κύκλου.



3. Από το σημείο **B**, σχεδιάστε ένα **τμήμα** που πηγαίνει **κατευθείαν στο κέντρο O** και τελειώνει στη **τομή D** του κύκλου.



4. Τώρα μπορείτε να σχεδιάσετε ένα παραλληλόγραμμο με όλα τα σημεία (ABCD).



α) Είναι αυτό το παραλληλόγραμμο ορθογώνιο;

---

β) Είναι όλες οι γωνίες του ορθές γωνίες;

---

γ) Τι σημαίνει αυτό;

---

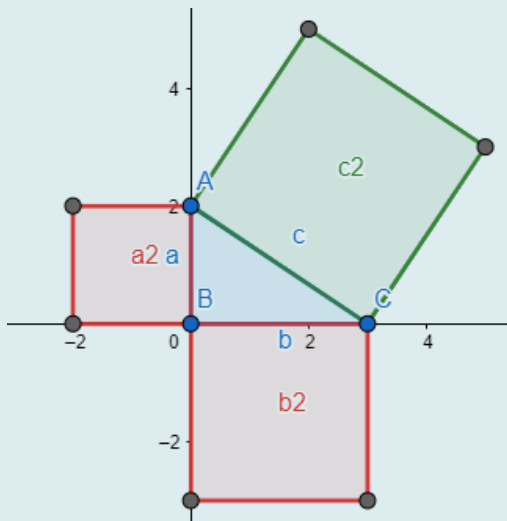
δ) Πώς νομίζετε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το οριγκάμι εδώ;

## Πυθαγόρειο Θεώρημα

Ο Πυθαγόρας ήταν επίσης Έλληνας φιλόσοφος και μαθηματικός της κλασικής αρχαιότητας. Είναι πιο διάσημος για το θεώρημά του που λέει ότι:

το τετράγωνο της **υποτεινούςας** (η πλευρά **απέναντι** από την ορθή γωνία) είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών.

Το γράφουμε:  $a^2 + b^2 = c^2$



Σε αυτό το παράδειγμα:

- $a$  = τμήμα AB
- $b$  = τμήμα BC
- $c$  = τμήμα CA

→ Τα κόκκινα τετράγωνα αναπαριστούν  $a^2$  και  $b^2$

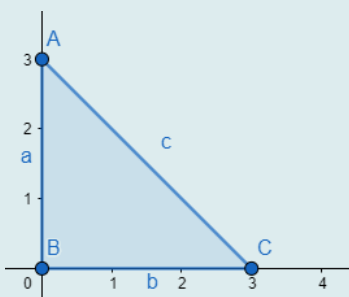
→ Το πράσινο τετράγωνο αναπαριστά  $c^2$

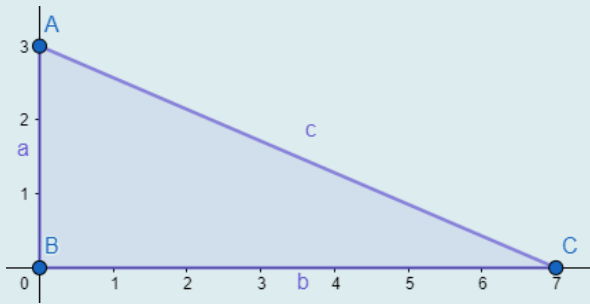
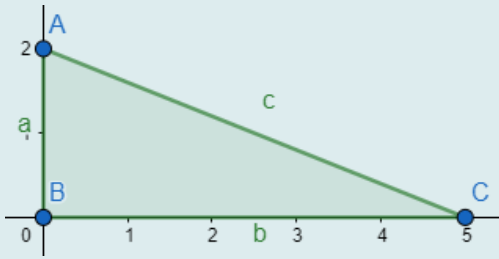
→ Το τμήμα AC είναι η **υποτεινούσα**

Ας κάνουμε κάποιες ασκήσεις χρησιμοποιώντας τον τύπο:

**Για κάθε τρίγωνο:**

1. Ονομάστε τα τμήματα  $a$ ,  $b$  και  $c$  στην εικόνα.
2. Χρησιμοποιήστε την Πυθαγόρεια εξίσωση.
3. Υπολογίστε το μήκος της υποτεινούςας.





## ΕΡΓΑΣΙΑ

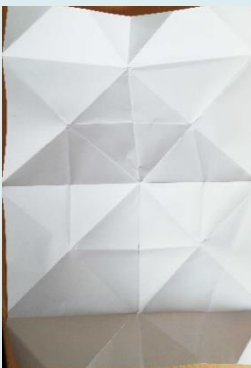
Αυτή η εργασία θα σας επιτρέψει να κατανοήσετε τους τρόπους με τους οποίους το οριγκάμι μπορεί να αναπαριστά τις μαθηματικές έννοιες και τεχνικές.

### Σχεδιάζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα με μια τεχνική οριγκάμι: η βάρκα!



Παρακολουθήστε το παρακάτω βίντεο για να μάθετε πώς να το κάνετε:

<https://www.youtube.com/watch?v=Cjx3My0kDtY&feature=youtu.be>

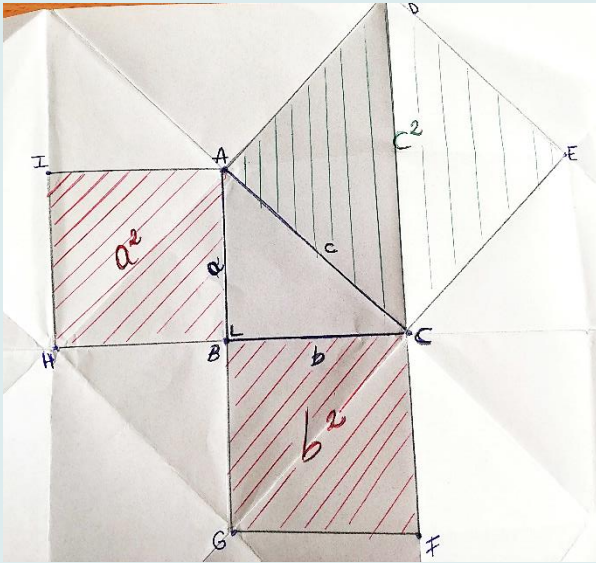


Τώρα που έχετε τη βάρκα σας, ξεδιπλώστε την κάνοντας τα πάντα ανάποδα.

Θα πρέπει να έχετε κάτι τέτοιο:

Μπορείτε να δείτε ότι υπάρχουν κάποια τρίγωνα και τετράγωνα παντού στη σελίδα.

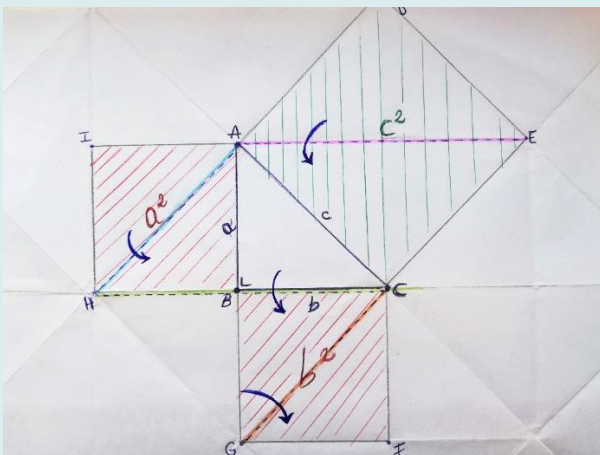
✏️ Ας σχεδιάσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο προκύπτον πρότυπο!



1. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις για να δείτε αν ακολουθούνται κάποια αξιώματα του οριγκάμι:

- Υπάρχει μια αναδίπλωση που περνά μέσα από τα σημεία A και E;
- Υπάρχει μια αναδίπλωση με κάποιο σημείο πάνω στο σημείο B;
- Υπάρχει μια αναδίπλωση που τοποθετεί το τμήμα GB στο τμήμα GF;
- Υπάρχει μια αναδίπλωση κάθετα στο τμήμα AG που περνάει από το σημείο C;

2. Επισημάνετε αυτές τις αναδιπλώσεις με διαφορετικό χρώμα στο σχέδιό σας.







## Μάθετε περισσότερα...

Ερευνητική εργασία σχετικά με τη χρήση του οριγκάμι στο σχολείο:

<http://www.fau.edu/education/centersandprograms/mathitudes/documents/20080901bMathitudesOct08revisionFinalVersionforpublicationOct242008.pdf>

TED Talk για τη συμβολή των μαθηματικών στην τέχνη του οριγκάμι:

[https://www.ted.com/talks/robert\\_lang\\_folds\\_way\\_new\\_origami#t-193336](https://www.ted.com/talks/robert_lang_folds_way_new_origami#t-193336)

TED-Ed βίντεο για να προχωρήσετε περαιτέρω με το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

<https://www.youtube.com/watch?v=YompsDIEdtc>

Άρθρο σχετικά με τα μαθηματικά στο οριγκάμι:

<https://theconversation.com/origami-mathematics-in-creasing-33968>

Άρθρο σχετικά με την ιστορία του οριγκάμι και τα αξιώματα:

<https://plus.maths.org/content/power-origami>

Άρθρο σχετικά με τα μαθηματικά στο οριγκάμι:

<https://www.tor.com/2017/06/29/the-magic-and-mathematics-of-paper-folding/>

TED-Ed βίντεο σχετικά με τα τρισδιάστατα βιβλία:

[https://www.youtube.com/watch?v=RZR\\_b753ZJ0](https://www.youtube.com/watch?v=RZR_b753ZJ0)

Πώς να διπλώσετε μια βάρκα με την τεχνική οριγκάμι (εικόνες + βίντεο):

<http://www.origami-instructions.com/origami-boat.html>