ΜΕΡΟΣ Ι: ΕΙΚΑΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16-18

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 11: ΦΡΑΚΤΑΛ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Sandgärdskolan

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Φράκταλ και διαστάσεις

Ηλικιακό εύρος: 16-18 χρονών

Διάρκεια: 2 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Κλιμάκωση

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Φράκταλ (ελλ. μορφόκλασμα ή μορφοκλασματικό σύνολο)

Γενικοί Σκοποί: Τα φράκταλ είναι μερικά από τα πιο όμορφα και πιο παράξενα γεωμετρικά σχήματα. Στόχος είναι οι μαθητές να αναγνωρίσουν και να μελετήσουν τα μαθηματικά που βρίσκονται πίσω από αυτά τα φανταστικά μοτίβα. Τα σχήματα των φράκταλ φαίνονται το ίδιο σε διάφορες κλίμακες – έστω κι αν εστιάσετε σε ένα μικρό μέρος του σχήματος, θα διαπιστώσετε πως αυτό «μοιάζει» το ίδιο με ολόκληρο το σχήμα. Αυτή η περίεργη ιδιότητα ονομάζεται αυτο-ομοιότητα. Στη μαθηματική ενότητα αυτού του εργαλείου θα μελετήσετε πολυγώνα εγγεγραμμένα σε έναν κύκλο.

Οδηγίες και Μεθοδολογίες: Διαβάστε ολόκληρο το κείμενο και συμπληρώστε τις εργασίες. Θα μείνετε έκπληκτοι με το θαύμα και την ομορφιά των φράκταλ.

Πηγές: Αυτό το εργαλείο σας παρέχει ιδέες για να διδάξετε τα φράκταλ και τα μαθηματικά πίσω από αυτά.

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Ξεκινήστε με την περιγραφή των καλλιτεχνικών όρων και έπειτα προχωρήστε στην μαθηματική ενότητα.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες: Στο τέλος αυτού του εργαλείου, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- κατανοεί καλύτερα την κλιμάκωση
- αντιλαμβάνεται την έννοια των φράκταλ και τη σύνδεσή τους με τα μαθηματικά

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

Εισαγωγή

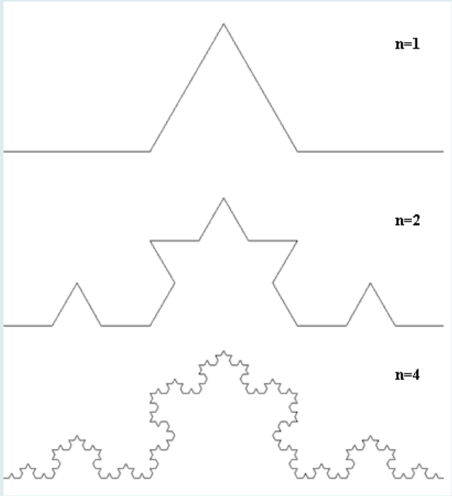
Τα φράκταλ είναι μερικά από τα πιο όμορφα και πιο παράξενα γεωμετρικά σχήματα. Τα σχήματα των φράκταλ φαίνονται το ίδιο σε διαφορετικές κλίμακες. Έστω κι αν «εστιάσετε» σε ένα μικρό μέρος του σχήματος, θα διαπιστώσετε πως αυτό «μοιάζει» το ίδιο με ολόκληρο το σχήμα. Αυτή η περίεργη ιδιότητα ονομάζεται αυτο-ομοιότητα.

Φράκταλ

Για να δημιουργήσετε ένα φράκταλ, μπορείτε να ξεκινήσετε με ένα απλό μοτίβο και να το επαναλάβετε σε μικρότερες κλίμακες, ξανά και ξανά, μέχρι το άπειρο. Στην πραγματική ζωή είναι αδύνατο να σχεδιάσουμε φράκταλ με «απείρως μικρά» μοτίβα. Ωστόσο, μπορούμε να σχεδιάσουμε σχήματα που μοιάζουν με φράκταλ. Χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά, μπορούμε να σκεφτούμε και να καταγράψουμε τις ιδιότητες που θα είχε ένα πραγματικό φράκταλ.

Τα φράκταλ είναι πολύ δημοφιλή στη μαθηματική απεικόνιση, επειδή φαίνονται πολύ όμορφα ακόμα κι αν μπορούν να δημιουργηθούν χρησιμοποιώντας απλά μοτίβα, όπως αυτά πιο κάτω. Μπορείτε να κάνετε ζουμ σε ένα φράκταλ προκειμένου να διαπιστώσετε ότι τα μοτίβα και τα σχήματά τους θα συνεχίσουν να επαναλαμβάνονται για πάντα, μέχρι το άπειρο.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.



Εικόνα 1: Απλές καμπύλες του Koch μας βοηθούν να κατανοήσουμε την ακριβή ιδιότητα των φράκταλ, η οποία ονομάζεται «αυτο-ομοιότητα» (Ανακτήθηκε από: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fractal_koch.png)

«Λογισμικό δημιουργίας φράκταλ» ονομάζουμε οποιοδήποτε είδος λογισμικού γραφικών που δημιουργεί εικόνες των φράκταλ. Υπάρχουν πολλά διαθέσιμα προγράμματα δημιουργίας φράκταλ, τόσο δωρεάν όσο και επί πληρωμή. Οι εφαρμογές για κινητά είναι διαθέσιμες για παιχνίδι ή κατασκευή φράκταλ. Μερικοί προγραμματιστές δημιουργούν φράκταλ λογισμικό για τον εαυτό τους, καθώς τα φράκταλ θεωρούνται μια καινοτόμα πρόκληση που προσφέρεται για την απεικόνιση και πληρη κατανόηση των σχετικών μαθηματικών εννοιών.

Το Λογισμικό δημιουργίας φράκταλ δημιουργεί μαθηματική ομορφιά. Οι σύγχρονοι υπολογιστές μπορεί να χρειαστούν δευτερόλεπτα ή λεπτά για να ολοκληρώσουν μια ενιαία υψηλή ανάλυση εικόνας φράκταλ. Οι εικόνες δημιουργούνται για προσομοίωση (μοντελοποίηση) καθώς και για τυχαία φράκταλ που ενσωματώνονται σε εικαστικά έργα. Η παραγωγή φράκταλ που χρησιμοποιείται για μοντελοποίηση, χρησιμοποιείται εξίσου για τα γραφικά του υπολογιστή. Μπορείτε επίσης να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό για να «μιμηθείτε» φυσικά τοπία με τη βοήθεια «φράκταλ τοπίων». Επιπλέον, τα φράκταλ παράγονται στο λογισμικό οπτικοποίησης της μουσικής.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Γλωσσάρι

n:

Υποκαθιστά οποιοδήποτε φυσικό αριθμό.

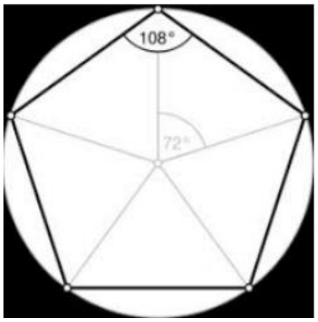
Π.χ. Οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί 1, 2, 3 κ.ο.κ

Πολύεδρο:

Είναι ένα στερεό σε τρεις διαστάσεις με επίπεδες πολυγωνικές έδρες, ευθείες ακμές και αιχμηρές γωνίες ή κορυφές.

Κανονικό πολύγωνο:

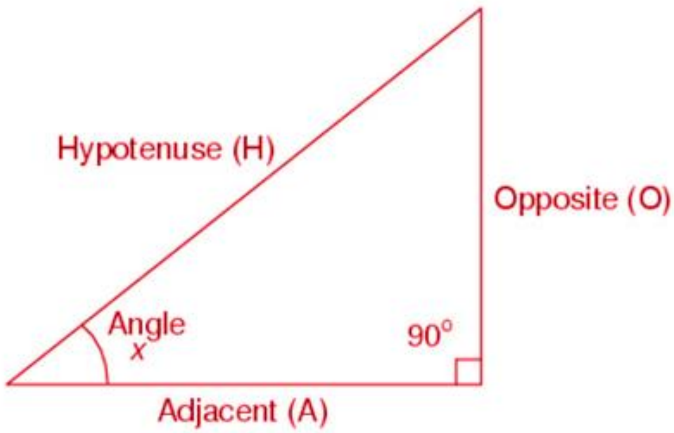
Ένα πολύγωνο είναι κανονικό όταν όλες οι γωνίες είναι ίσες και όλες οι πλευρές είναι ίσες (διαφορετικά είναι "μη-κανονικό"). Αυτό είναι ένα κανονικό πεντάγωνο (ένα πολύγωνο 5 πλευρών).



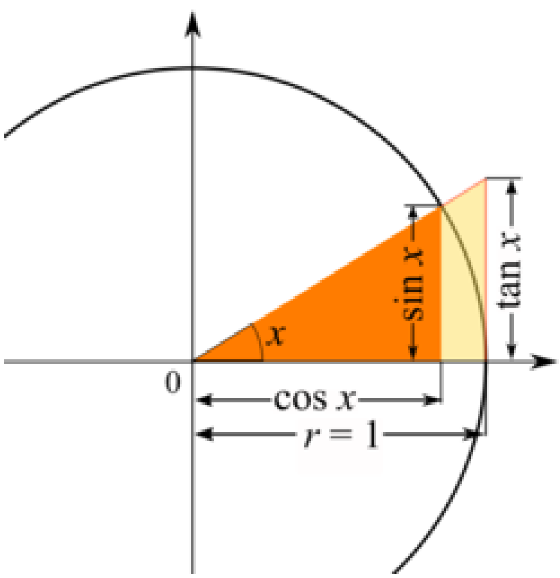
Τριγωνομετρία

Το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη είναι οι κύριες συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στην τριγωνομετρία και υπολογίζονται βάση ενός ορθογωνίου τριγώνου. Προκειμένου να μην «κολλήσετε» στις συναρτήσεις, βοηθά να δώσετε ένα όνομα σε κάθε πλευρά ενός ορθογώνιου τριγώνου όπως στην παρακάτω εικόνα:

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.



Με τον παραπάνω ορισμό, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται μόνο για γωνίες μεταξύ 0 και 90 μοιρών (0 και π / 2 ακτίνια). Χρησιμοποιώντας τον μοναδιαίο κύκλο, το συνημίτονο και το ημίτονο μπορούν να οριστούν ως περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο 360^{o} (2π ακτίνια).



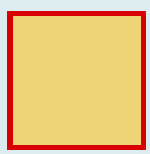
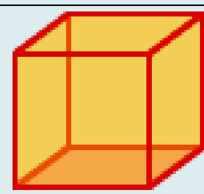
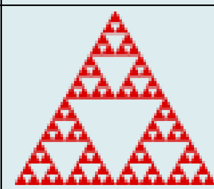
Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Τα μαθηματικά πίσω από τα φράκταλ

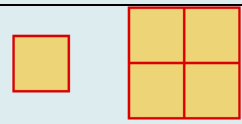
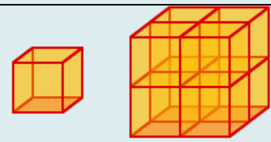
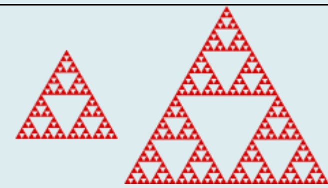
Το τρίγωνο Σιερπίνσκι

Ένα από τα παραδείγματα είναι το τρίγωνο Σιερπίνσκι που αποτελείται από αμέτρητα μικρότερα τρίγωνα. Το δημιουργήσαμε παραλείποντας επανειλημμένα ένα τρίγωνο στο κέντρο όλων των άλλων τρίγωνων. Ωστόσο, υπάρχουν πολλές άλλες μέθοδοι για τη δημιουργία αυτού του σχήματος - και εδώ βρίσκονται μερικές.

Πώς να φτιάξετε το τρίγωνο Σιερπίνσκι στο Geogebra
https://youtu.be/tmmHEa6j-_k

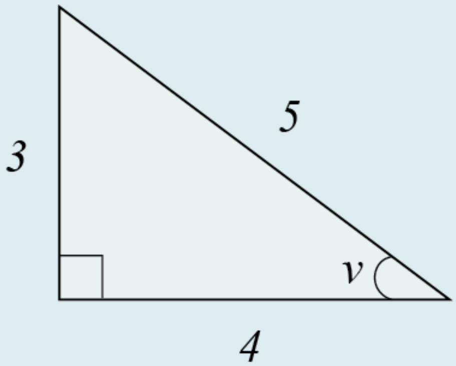
Διάσταση 1	Διάσταση 2	Διάσταση 3	Διάσταση 1.585...
×2	 ×4	 ×8	 ×3
Μια γραμμή έχει διάσταση 1 (μοναδιαία). Όταν αυξάνεται υπό την κλίμακα του συντελεστή 2, το **μήκος** της αυξάνεται κατά τον συντελεστή 2.	Ένα τετράγωνο έχει δύο διαστάσεις. Όταν αυξάνεται υπό την κλίμακα του συντελεστή 2, το **εμβαδόν** του αυξάνεται κατά τον συντελεστή 4.	Ένας κύβος έχει τρεις διαστάσεις. Όταν αυξάνεται υπό την κλίμακα του συντελεστή 2, ο **όγκος** του αυξάνεται κατά τον συντελεστή 8.	Όταν το τρίγωνο Σιερπίνσκι αυξάνεται υπό την κλίμακα του συντελεστή 2, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά τον συντελεστή 3. Κοιτώντας τους μπλε συντελεστές αύξησης παραπάνω,συμπεραίνουμε ότι πρέπει να υπάρχει μια διάσταση μεταξύ των αριθμών 1 και 2. Δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του1 και του 2, οπότε η διάσταση του τριγώνου Σιερπίνσκι πρέπει να είναι κλασματική. Στην πραγματικότητα, μπορεί

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

			κανείς να υπολογίσει ότι είναι περίπου 1.585.
			

Για να υπολογίσετε μια άγνωστη γωνία:

Υπολογίστε τη γωνία v μεταξύ της υποτείνουσας και της πλευράς που είναι 4 μονάδες μήκους στο ακόλουθο ορθογώνιο τρίγωνο:



Αρχίζουμε με τον προσδιορισμό της γωνίας v : είναι η οξεία γωνία στα δεξιά του τριγώνου. Αυτό σημαίνει ότι η πλευρά 4 μονάδων μήκους είναι η **προσκείμενη κάθετη πλευρά** του ορθογωνίου τριγώνου, ενώ η πλευρά που είναι 3 μονάδων μήκους είναι η απέναντι κάθετη πλευρά.

Εισάγουμε τις γνωστές μας τιμές στον τύπο για το ημίτονο

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(v) = \pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha} \div \upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha = 4/5}$$

και στη συνέχεια βρίσκουμε τη γωνία v από την αντίστροφη συνάρτηση:

$$\boldsymbol{v = \sigma\upsilon\nu^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)}$$
$$\boldsymbol{\approx 36,87}$$

Έτσι η γωνία v, της οποίας η συνημιτονοειδής τιμή είναι 4/5, είναι περίπου ίση με 36,87 μοίρες.

Τέλος, προσπαθούμε να κάνουμε το ίδιο πράγμα χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

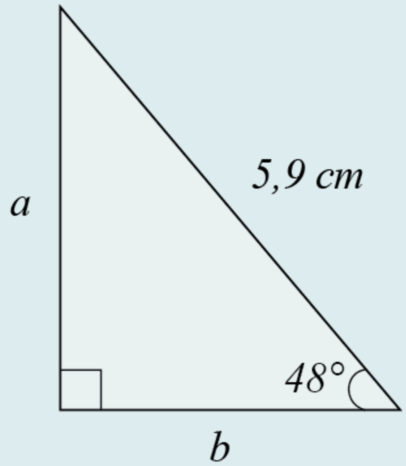
$$\boldsymbol{εφ\, v = απέναντι\ κάθετη\ πλευρά \div προσκείμενη\ κάθετη\ = 3/4}$$

Επιλύουμε τη γωνία v χρησιμοποιώντας την αντίστροφη συνάρτηση (τόξο εφαπτομένη) και βρίσκουμε έτσι τη γωνία v, της οποίας η εφαπτομένη τιμή είναι 3/4, περίπου ίση με 36,87 μοίρες. Όπως μπορούμε να δούμε, έχουμε την ίδια τιμή στη γωνία v ανεξάρτητα από ποιες από τις τρεις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε, που είναι ακριβώς όπως πρέπει.

Υπολογίστε το άγνωστο μήκος μιας πλευράς:

Πείτε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με γνωστή γωνία 48 °, μια υποτείνουσα με μήκος 5,9 εκ. και ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τα μήκη των κάθετων πλευρών.

Καταρχάς, θα πρέπει να σχεδιάσουμε μια εικόνα, ώστε να έχουμε μια επισκόπηση των πλευρών και των γωνιών του τριγώνου, μειώνοντας έτσι τον κίνδυνο να συμπαιράνουμε λάθος:



Από τη γνωστή γωνία, η πλευρά b είναι η προσκείμενη κάθετη πλευρά. Δεδομένου ότι γνωρίζουμε το μήκος της υποτείνουσας, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση του συνημιτόνου για να καθορίσουμε το μήκος της πλευράς b:

$$\boldsymbol{συν48° = b \div 5,9}$$
$$\boldsymbol{5,9 * συν48° = b}$$
$$\boldsymbol{b \approx 3,948}$$

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Από την εικόνα μας βλέπουμε ότι η πλευρά α είναι η απέναντι κάθετη πλευρά, γι 'αυτό και χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση του ημιτόνου για να βρούμε το μήκος της πλευράς α (σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τη βασική συνάρτηση, αφού γνωρίζουμε τώρα το μήκος της προσκείμενης κάθετης πλευράς):

$$\eta\mu\ 48° = a \div 5,9$$
$$5,9 * \eta\mu 48° = a \div 5,9 * 5,9$$
$$5,9 * \eta\mu 48° = a$$
$$a \approx 4,385$$

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

Ο Έλληνας μαθηματικός και φυσικός Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287-212 π.Χ.) προσπάθησε να προσδιορίσει κατά προσέγγιση την τιμή του π.

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Δείξτε ότι κατά τον υπολογισμό του εμβαδού ενός κανονικού πολυγώνου με n πλευρές, εγγεγραμμένου σε περιφέρεια κύκλου οποιασδήποτε ακτίνας, λαμβάνουμε κατά προσέγγιση τιμή **π ≈ n ημω (180 °/n)**, ενώ κατά τον υπολογισμό της περιοχής ενός κανονικού πολυγώνου με τον ίδιο αριθμό πλευρών περιγεγραμμένου σε κύκλο με την ίδια ακτίνα, λαμβάνουμε τιμή **π ≈ n εφ(180 °/n)**.

Μόλις έχετε δείξει ότι n **εφ (180 °/n) > π > n ημ(180 °/n)**

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Επιλέξτε n = 96 και συγκρίνετε με τις τιμές που κατέγραψε ο Αρχιμήδης στο γεωμετρικό μονοπάτι

ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Εξετάστε επιλέγοντας όλο και μεγαλύτερες τιμές του n πόσο καλά μπορείτε να προσεγγίσετε την τιμή του π χρησιμοποιώντας την υπολογιστική σας μηχανή.

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.

Μάθετε περισσότερα…

Πώς να σχεδιάσετε φράκταλ σε λιγότερο από πέντε λεπτά:

https://youtu.be/sFEYQMrWNHU

Το έργο αυτό χρηματοδοτήθηκε με την υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής. Η δημοσίευση αυτή αντικατοπτρίζει μόνο τις απόψεις του δημιουργού και η Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται.