

ΜΕΡΟΣ Ι: ΕΙΚΑΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΛΙΚΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ: 16 –18

ΕΡΓΑΛΕΙΟ 10: ΜΟΤΙΒΑ ΣΤΑ ΠΟΡΤΟΓΑΛΙΚΑ ΠΕΖΟΔΡΟΜΙΑ

SPEL – Sociedade Promotora de
Estabelecimentos de Ensino



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Οδηγός Εκπαιδευτικού

Τίτλος: Μοτίβα στα πορτογαλικά πεζοδρόμια

Ηλικιακό Εύρος: 16 –18 χρονών

Διάρκεια: 2 ώρες

Μαθηματικές Έννοιες: Ισομετρίες και μοτίβα

Καλλιτεχνικές Έννοιες: Πορτογαλικά πεζοδρόμια και μοτίβα

Γενικοί Σκοποί: Οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα διάφορα είδη συμμετρίας και τα μοτίβα

Οδηγίες και Μεθοδολογία: Εκτός από την επεξήγηση των θεωρητικών εννοιών, είναι σημαντικό να χρησιμοποιήσετε τα βίντεο και να επεξεργαστείτε τις συμμετρίες με το Geogebra για καλύτερη κατανόηση του περιεχομένου

Πηγές: Υπολογιστής με σύνδεση στο διαδίκτυο, προσβάση στην ιστοσελίδα <https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc>

Συμβουλές για τον εκπαιδευτικό: Ξεκινήστε εξηγώντας τις θεωρητικές έννοιες και, εάν είναι δυνατόν, χρησιμοποιήστε εικόνες και βίντεο για μια αποτελεσματική επεξήγηση. Προτείνεται στον εκπαιδευτικό να δημιουργήσει συμμετρίες ή / και μοτίβα χρησιμοποιώντας το Geogebra για καλύτερη κατανόηση του περιεχομένου από τους μαθητές.

Επιθυμητά αποτελέσματα και δεξιότητες:

Στο τέλος αυτής της ενότητας, ο μαθητής θα είναι σε θέση να:

- αναγνωρίζει και να εφαρμόζει διαφορετικά είδη συμμετριών
- αναγνωρίζει και να αναλύει διαφορετικά είδη μοτίβων

Άσκηση αξιολόγησης εργαλείου:

Γράψτε 3 πράγματα που σας άρεσαν σε αυτό το εργαλείο:	1. 2. 3.
Γράψτε δύο πράγματα που μάθατε	1. 2.
Γράψτε ένα στοιχείο που θα μπορούσε να βελτιωθεί	1.

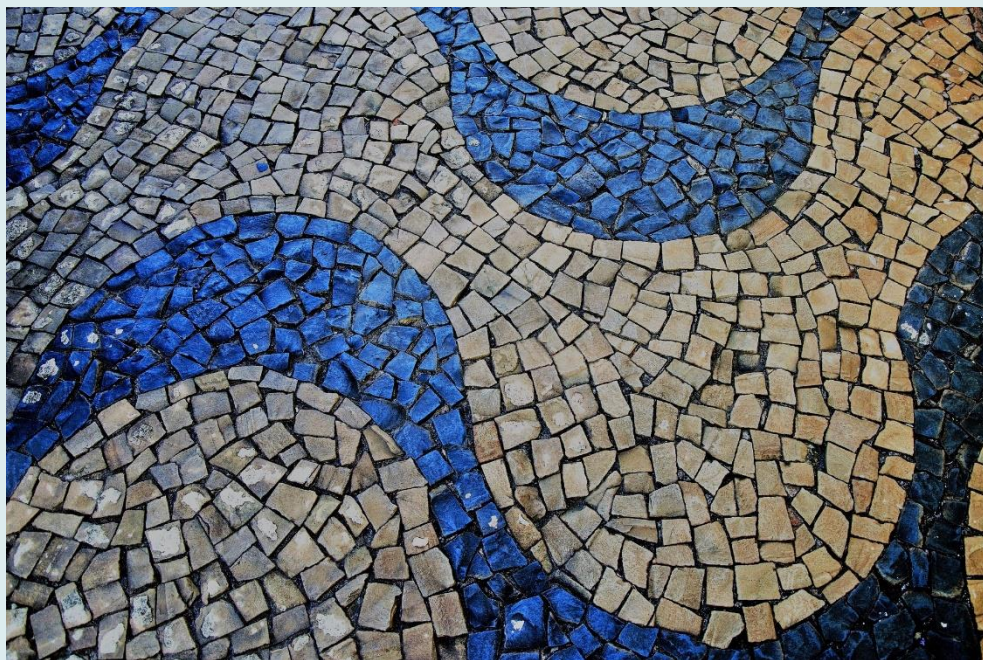
Εισαγωγή

Πολλά δημόσια και ιδιωτικά πεζοδρόμια των πορτογαλικών πόλεων καλύπτονται από ένα στρώμα από μικρές πέτρες, συνήθως άσπρους και μαύρους ασβεστόλιθους ακανόνιστου σχήματος, σχηματίζοντας διακοσμητικά μοτίβα ή ψηφιδωτά με χρωματική αντίθεση. Αυτός ο τύπος επίστρωσης ονομάζεται πορτογαλικό πεζοδρόμιο.

Ακούσια, προχωράμε στα μαθηματικά, καθώς σε αυτόν τον τύπο πεζοδρομίου μπορούμε εύκολα να βρούμε συμμετρίες, ανακλάσεις, περιστροφές και μεταφορές. Οι μαθηματικοί επικαλούνται την επανάληψη σχεδίων σε μία ή περισσότερες κατευθύνσεις, σε μπορντούρες ή σχέδια ταπετσαρίας, αντίστοιχα. Στα πορτογαλικά πεζοδρόμια υπάρχουν παραδείγματα ροζέτων και επίπεδων φιγούρων στις οποίες ο αριθμός των συμμετριών είναι περιορισμένος (περιστροφές ή ανακλάσεις). Επιπλέον, υπάρχει ένα σταθερό σημείο στο επίπεδο για όλες τις συμμετρίες στο σχήμα.

Υπάρχουν μόνο 7 διακριτοί τύποι ζωφόρων και 17 διαφορετικοί τύποι σχεδίων. Στη Λισαβόνα, η οποία είναι ενδεχομένως η πόλη όπου εμφανίστηκε το πορτογαλικό πεζοδρόμιο, είναι δυνατόν να βρεθούν όλες οι 7 ζωφόροι και 12 από τα 17 σχέδια. Στις Αζόρες υπάρχουν δύο πόλεις στις οποίες εντοπίζονται οι 7 τύποι ζωφόρων, οι οποίες είναι η Ponta Delgada και η Angra do Heroísmo, και οι οποίες έφεραν τον χαρακτηρισμό της «Πόλης των Επτά Ζωφόρων».

Μοτίβα στο πορτογαλικό πεζοδρόμιο



Εικ. 1 – Πορτογαλικό πεζοδρόμιο

(Πηγή: Photo by Silas Camargo Silão from Pixabay. Ανακτήθηκε από: Retirado de: [https://pixabay.com/pt/photos/cal%C3%A7ada-piso-ch%C3%A3o-pedra-1842527/\(11/07/2019\)\)](https://pixabay.com/pt/photos/cal%C3%A7ada-piso-ch%C3%A3o-pedra-1842527/(11/07/2019)))

4

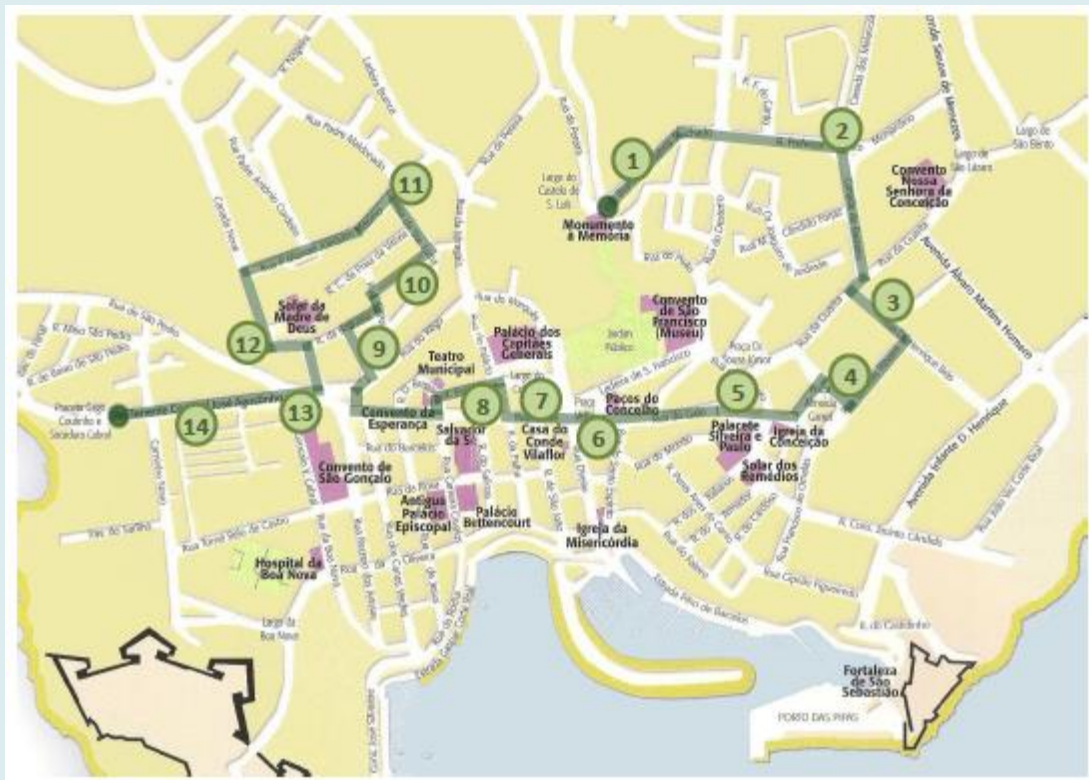
Σε πολλές πόλεις της Πορτογαλίας, οι δρόμοι και τα πεζοδρόμια εξακολουθούν να καλύπτονται από ένα στρώμα από μικρές πέτρες, συνήθως άσπρους και μαύρους ασβεστόλιθους ακανόνιστου σχήματος, που σχηματίζουν διακοσμητικά μοτίβα ή ψηφιδωτά με χρωματική αντίθεση. Αυτός ο τύπος επίστρωσης ονομάζεται πορτογαλικό πεζοδρόμιο.

Εικάζεται ότι αυτό το είδος πεζοδρομίων είχε πρωτοεμφανιστεί στην Πορτογαλία γύρω στο 1500, αλλά τα πορτογαλικά πεζοδρόμια, -με άλλα λόγια το διακοσμητικό πεζοδρόμιο έτσι όπως το συναντάμε σήμερα- είχε μάλλον εδραιωθεί στα μέσα του 19ου αιώνα.

Την εποχή εκείνη, ο αντιστράτηγος και μηχανικός Eusébio Furtado, καθοδήγησε την κατασκευή του πεζοδρομίου της στρατιωτικής συνοικίας από το Τάγμα των Κυνηγών Αρ. 5 στο Κάστρο του Saint Jorge, εκμεταλλευόμενος τη σκληρή δουλειά των φυλακισμένων από τη φυλακή του Limoeiro. Ως αποτέλεσμα της δουλειάς που έγινες

από τους φυλακισμένους, δημιουργήθηκε το πρώτο διακοσμητικό δάπεδο, το οποίο παρουσίαζε ένα ζιγκ-ζαγκ με μεγάλη οπτική επίδραση.

Μετά την επιτυχία αυτού του πεζοδρομίου, όλη η περιοχή γύρω από το Praça do Rossio (σχεδόν 9000 m²) μετατράπηκε σε πορτογαλικό πεζοδρόμιο, και ακολούθησαν πολλά άλλα πεζοδρόμια στη Λισαβόνα. Μετά από λίγα χρόνια, άλλες πορτογαλικές πόλεις μεταμόρφωσαν τα πεζοδρόμιά τους σε πορτογαλικά πεζοδρόμια και ακολούθησαν άλλες πορτογαλόφωνες χώρες, και αργότερα άλλες χώρες.



Εικ. 2 – Περιήγηση ζωφόρων της πόλης Angra do Heroísmo

(Πηγή: Teixeira, R. C. (2013). *Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo*. Ανακτήθηκε από: <https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

Οι εργάτες που εξειδικεύονται στην τοποθέτηση αυτού του τύπου πεζοδρομίου ονομάζονται αρχιτεχνίτες και, στο έργο τους, συνηθίζουν να βρίσκουν θέματα όπως το «Mar Largo» (πλατιά θάλασσα), που χρησιμοποιήθηκε στα πεζοδρόμια των Praça do Rossio και Coracabana, καθώς και δελφίνια, καραβέλλες, λουλούδια κ.λπ.

Το πορτογαλικό πεζοδρόμιο είναι πολύ πλούσιο σε μαθηματικές έννοιες, όπως συμμετρίες, ανακλάσεις, περιστροφές και μεταφορές. Συχνά υπάρχουν ροζέτες, ζωφόροι και μοτίβα σε αυτά τα πεζοδρόμια.

Γλωσσάρι

Πορτογαλικό πεζοδρόμιο: το πεζοδρόμιο που προκύπτει από την επίστρωση με πέτρες, συνήθως με άσπρους και μαύρους ασβεστόλιθους ακανόνιστου σχήματος, σχηματίζοντας διακοσμητικά σχέδια ή ψηφιδωτά με χρωματική αντίθεση.

Ασβεστόλιθος: είδος προσχωσιγενούς πετρώματος.

«Mar Largo» (Πλατιά θάλασσα): μοτίβο που μιμείται το ρυθμό των παλιρροιών και των κυμάτων.

Τα μαθηματικά πίσω από τα πορτογαλικά πεζοδρόμια

Το πορτογαλικό πεζοδρόμιο είναι πλούσιο σε ροζέτες, μοτίβα και ζωφόρους, οπότε, πριν ασχοληθούμε με αυτές τις έννοιες, είναι απαραίτητο να κάνουμε μια μικρή ανασκόπηση σχετικά με τις ισομετρίες.

Μια **ισομετρία** είναι ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός που διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων, πράγμα που σημαίνει ότι το αρχικό σχήμα και ο μετασχηματισμός του είναι όμοια.

Οι μόνες ισομετρίες του επιπέδου είναι οι **μεταφορές**, οι **περιστροφές**, οι **ανακλάσεις** και οι **ολισθαίνουσες ανακλάσεις**.

Όταν η εικόνα ενός σχήματος ταιριάζει με το αρχικό σχήμα, τότε αυτό το σχήμα έχει συμμετρία. Υπάρχει συμμετρία για κάθε μια από τις τέσσερις ισομετρίες.

Είδη συμμετρίας:

Ένα επίπεδο σχήμα μπορεί να έχει:

- **Συμμετρία ανάκλασης**, εάν υπάρχει ανάκλαση που το διατηρεί αμετάβλητο.
- **Συμμετρία περιστροφής**, εάν υπάρχει περιστροφή που το διατηρεί αμετάβλητο.
- **Συμμετρία μεταφοράς**, εάν υπάρχει μεταφορά που το διατηρεί αμετάβλητο.
- **Συμμετρία ολισθαίνουσας ανάκλασης**, εάν υπάρχει ανάκλαση που το διατηρεί αμετάβλητο.

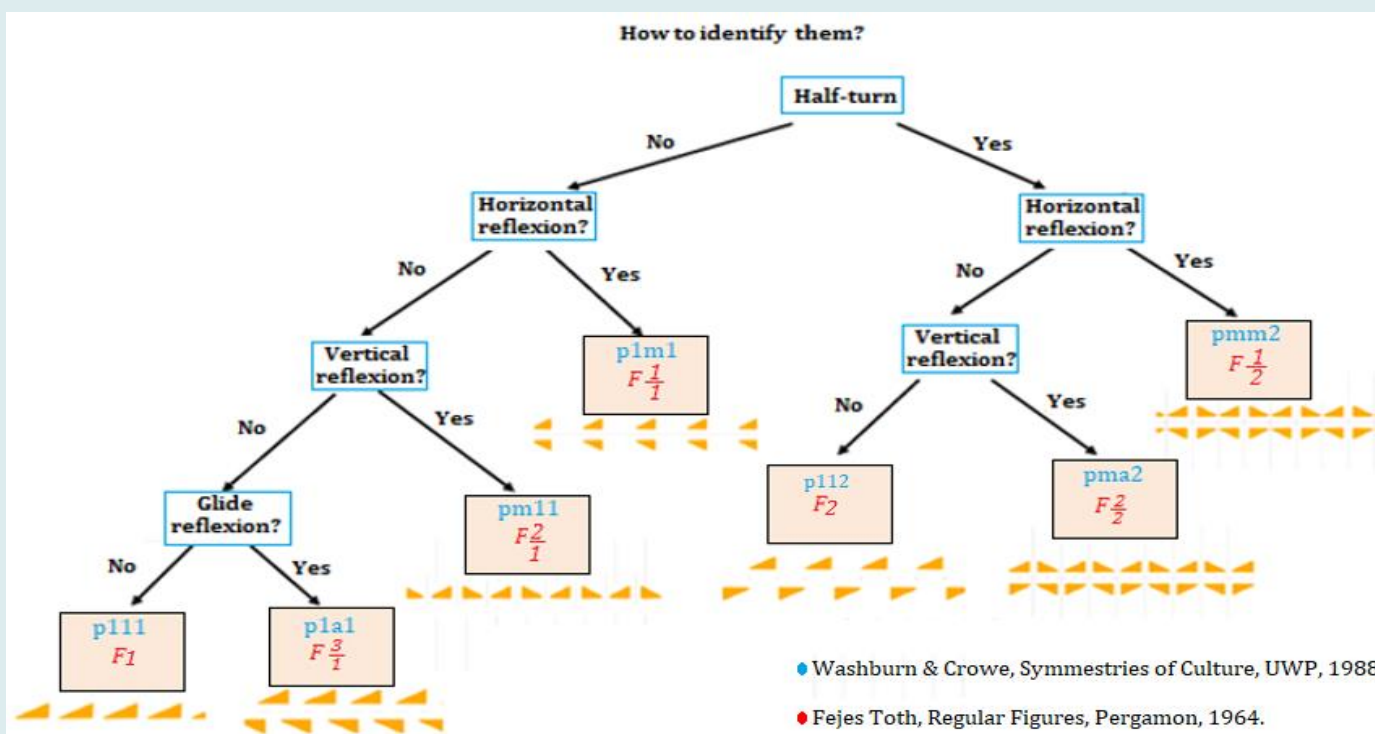
Τώρα, οι μελέτες μας θα επικεντρωθούν σε **ζωφόρους**.

Μια **ζωφόρος** είναι ένα επίπεδο σχήμα που έχει άπειρες συμμετρίες μεταφοράς. Όλα τα διανύσματα που συνδέονται με αυτές τις μεταφορές έχουν την ίδια κατεύθυνση και είναι ακέραια πολλαπλάσια ενός καθορισμένου μη μηδενικού διανύσματος \vec{u} .

Σημείωση: Οι υπόλοιπες συμμετρίες μιας ζωφόρου μπορεί να είναι περιστροφές γωνίας 180° (ημιστροφή), ανακλάσεις ή ολισθαίνουσες ανακλάσεις σε σχέση με μια παράλληλη στο \vec{u} ευθεία.

Υπάρχουν μόνο επτά διαφορετικοί τρόποι επανάληψης ενός μοτίβου σε μια ζωφόρο, καταλήγοντας στα τέσσερα είδη συμμετρίας (συμμετρία μεταφοράς, συμμετρία περιστροφής (μιας γωνίας 180°), συμμετρία ανάκλασης και συμμετρία ολισθαίνουσας ανάκλασης).

Η ταυτοποίηση της ομάδας στην οποία ανήκει η ζωφόρος μπορεί να γίνει μέσω ορισμένων ερωτήσεων. Το σχήμα 3 δείχνει έναν αλγόριθμο που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της ομάδας συμμετρίας των ζωφόρων σχετικά με τις 7 ομάδες των ζωφόρων.

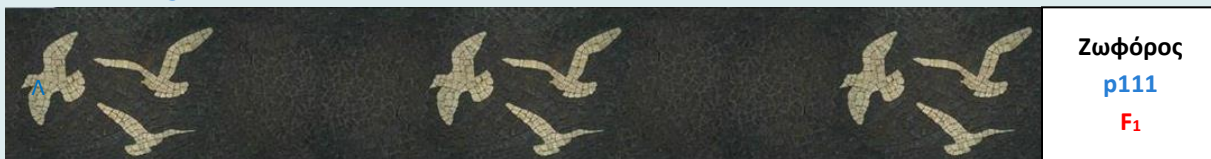


Εικ. 3 – Τα επτά είδη ζωφόρων

(Πηγή: Teixeira, R. C. (2013). Os sete grupos de frisos. Ανακτήθηκε από: http://sites.uac.pt/rteixeira/files/2013/07/Fluxograma_Frisos_final.pdf (11.07.2019))

Δώστε προσοχή σε ένα παράδειγμα καθεμίας από τις επτά ομάδες που βρίσκονται στα πεζοδρόμια της πόλης Angra do Heroísmo:

1. Ζωφόρος μόνο με μεταφορά:



Ζωφόρος
p111
F₁

Εικ. 4 – Ζωφόρος στο πεζοδρόμιο δίπλα στο Largo do Colégio

(Πηγή: Teixeira, R. C. (2014, July 14). Os sete tipos de frisos em calçada de Angra do Heroísmo. Ανακτήθηκε από: <https://cienciapartodos.webnode.pt/news/os-sete-tipos-de-frisos-em-cal%C3%A7ada-de-angra-do-heroismo/> (11/07/2019))

2. Ζωφόρος με ολισθαίνουσες ανακλάσεις και μεταφορά:



Ζωφόρος
p1a1
F₃/₁

Εικ. 5 – Ζωφόρος στη Rua da Queimada

(Πηγή: Teixeira, R. C. (2013). Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo. Ανακτήθηκε από: <https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

3. Ζωφόρος με διανυσματικές ανακλάσεις και μεταφορά:

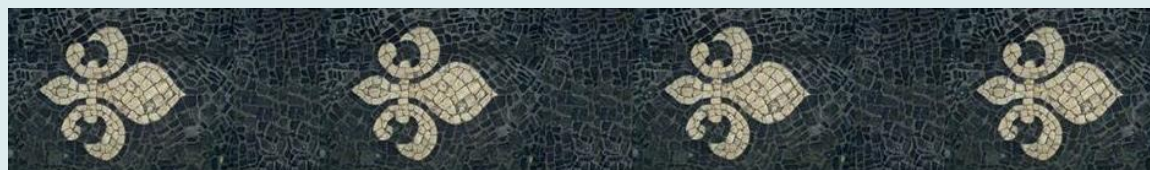


Ζωφόρος
pm11
F₂/₁

Εικ. 6 – Ζωφόρος στη Rua de Cima de Santa Luzia

(Πηγή: Teixeira, R. C. (2013). Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo. Ανακτήθηκε από: <https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

4. Ζωφόρος με οριζόντιες ανακλάσεις και μεταφορά:



Ζωφόρος
p1m1
F₁/₁

Εικ. 7 – Ζωφόρος στο πεζοδρόμιο δίπλα στο Largo do Colégio

(Πηγή: Teixeira, R. C. (2014, July 14). Os sete tipos de frisos em calçada de Angra do Heroísmo. Ανακτήθηκε από: <https://cienciapartodos.webnode.pt/news/os-sete-tipos-de-frisos-em-cal%C3%A7ada-de-angra-do-heroismo/> (11/07/2019))

5. Ζωφόρος με περιστροφή 180° (ημιστροφή) και μεταφορά:



Ζωφόρος

p112

F_2

Εικ. 8 – Ζωφόρος στη Rua de São João

(Πηγή: Teixeira, R. C. (2013). Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo. Ανακτήθηκε από: <https://www.mat.uc.pt/mpf2013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

6. Ζωφόρος με περιστροφή 180° (ημιστροφή), διανυσματική ανάκλαση, ολισθαίνουσα ανάκλαση και μεταφορά:



Ζωφόρος

pma2

$\frac{F^2}{2}$

Εικ. 9 – Ζωφόρος στην Avenida Tenente Coronel José Agostinho

(Πηγή: Teixeira, R. C. (2013). Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo. Ανακτήθηκε από: <https://www.mat.uc.pt/mpf2013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

7. Ζωφόρος με περιστροφή 180° (ημιστροφή), διανυσματική ανάκλαση, οριζόντια ανάκλαση και μεταφορά:



Ζωφόρος

pmm2

$\frac{F}{2}$

Εικ. 10 – Ζωφόρος στη Rua da Conceição

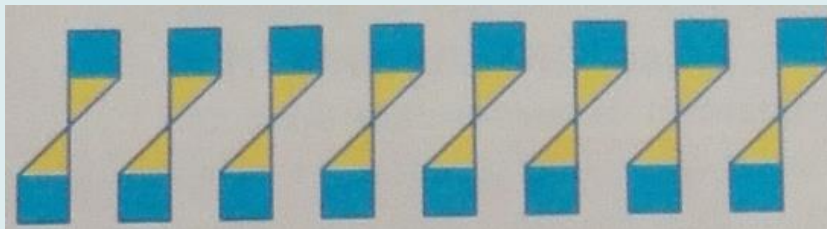
(Πηγή: Teixeira, R. C. (2014, July 14). Os sete tipos de frisos em calçada de Angra do Heroísmo. Ανακτήθηκε από: <https://cienciapartodos.webnode.pt/news/os-sete-tipos-de-frisos-em-cal%C3%A7ada-de-angra-do-heroismo/> (11/07/2019))

Αυτά τα περιεχόμενα επέτρεψαν να καταλάβουμε γιατί η πόλη Angra do Heroísmo ονομάζεται "Πόλη των επτά ζωφόρων". Αυτή η αναγνώριση εκτιμάται στην κληρονομιά της σχετικά με τα πεζοδρόμια και επιτρέπει την τόνωση του μαθηματικού τουρισμού.

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

🍷 ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Στην εικόνα παρακάτω αναπαριστάνεται μια ζωφόρος.



Εικ. 11 – Ζωφόρος

(Πηγή: Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). Novo espaço 10: matemática A, 10º ano. Porto: Porto Editora)

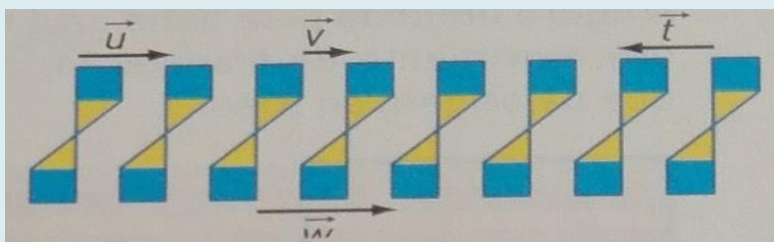
1.1. Προσδιορίστε την ισομετρία που ισχύει για το μοτίβο I για να βρείτε το μοτίβο II.



Εικ. 12 – Μοτίβα της ζωφόρου

(Πηγή: Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). Novo espaço 10: matemática A, 10º ano. Porto: Porto Editora)

1.2. Ποιά από τα διανύσματα που αναπαρίστανται στο παρακάτω σχήμα αντιστοιχούν στις μεταφορές που καθιστούν τη ζωφόρο αμετάβλητη;



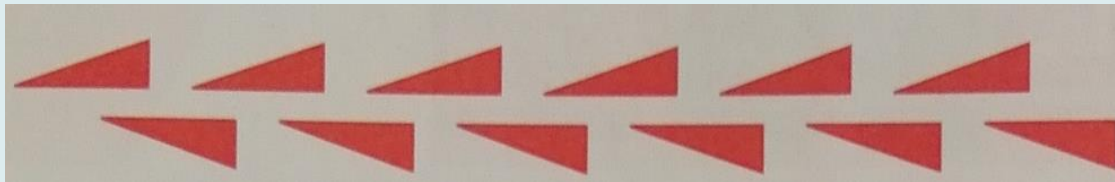
Εικ. 13 – Ζωφόρος

(Πηγή: Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). Novo espaço 10: matemática A, 10º ano. Porto: Porto Editora)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Προσδιορίστε τις συμμετρίες που υπάρχουν σε κάθε μια από τις παρακάτω ζωφόρους:

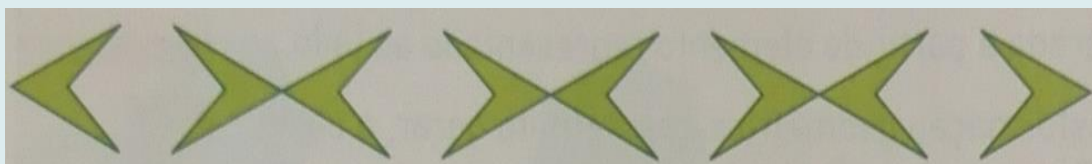
2.1.



Εικ. 14 – Ζωφόρος

(Πηγή: Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). Novo espaço 10: matemática A, 10º ano. Porto: Porto Editora)

2.2.



Εικ. 15 – Ζωφόρος

(Πηγή: Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). Novo espaço 10: matemática A, 10º ano. Porto: Porto Editora)

2.3.

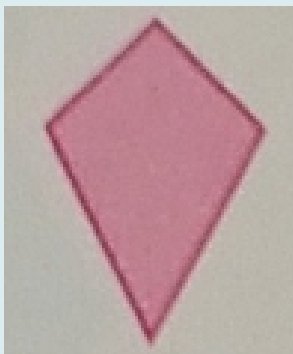


Εικ. 16 – Ζωφόρος στη Rua Dr. Henrique Braz

(Πηγή: Teixeira, R. C. (2013). Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo. Ανακτήθηκε από: <https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Χρησιμοποιήστε το παρακάτω μοτίβο για να επεξεργαστείτε μια ζωφόρο που έχει τη συμμετρία μιας οριζόντιας ανάκλασης.



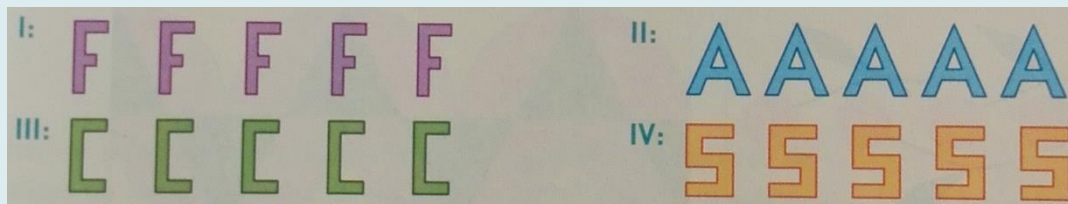
Εικ. 17 – Μοτίβο μιας ζωφόρου

(Πηγή: Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). Novo espaço 10: matemática A, 10º ano. Porto: Porto Editora)

ΕΡΓΑΣΙΑ 4

Προσδιορίστε τις ισομετρίες που κάνουν τη ζωφόρο αμετάβλητη για κάθε μια από τις τέσσερις ζωφόρους που αναπαρίστανται παρακάτω.

13



Εικ. 18 – Ζωφόρος

(Πηγή: Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). Novo espaço 10: matemática A, 10º ano. Porto: Porto Editora)

ΜΑΘΕΤΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ...

Η προέλευση του πορτογαλικού πεζοδρομίου και τα πρώτα του δείγματα

<https://getlisbon.com/discovering/origins-of-the-portuguese-pavement/>

Μετασχηματισμοί, ισότητες και ομοιότητα

<https://www.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-transformations-congruence>

Μοτίβα ζωφόρων

https://www.youtube.com/watch?list=PLkTaxm2IKUGgphZsrNr3PQTRsf7f7Gm_k&v=2bAbueWC0Q8 και <https://www.youtube.com/watch?v=524gLKdaMZM>

Η επεξήγηση των μαθηματικών των ζωφόρων

http://www.mathematicsinthemaking.eu/fileadmin/media/Output/Material_for_activities/14_12_08The_mathematics_of_friezes_explained_logos.pdf

14

Εξερευνήστε τις συμμετρίες με το πρόγραμμα GeCla - Generator and Classifier Programme

http://www.atractor.pt/mat/GeCla/index_en.html

Εξερευνήστε τις ισομετρίες και τα μοτίβα με το Geogebra

<https://www.geogebra.org/classic>