DEL V: Litteratur & Matematik

ÅLDER: 16-18

UPPGIFT 49: KONISKA SEKTORER I "ALICE I UNDERLANDET" AV LEWIS CARROLL

LogoPsyCom

TheArtOf Maths

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Lärarguide

Titel: Koniska sektorer i "Alice i underlandet" av Lewis Carroll (1865)

Ålder: 16-18 år

Längd: 3 timmar

Matematikinnehåll: Euklidisk och icke-euklidisk geometri, koniska sektorer.

Konstinnehåll: Litteraturanalys, romanen, metaforer.

Allmänna mål: Att upptäcka de matematiska begreppen som presenteras i boken och lära sig att bygga matematiskt resonemang i vardagen.

Instruktioner: Eleverna ska utforska matematik genom litteratur genom att använda den i verkliga situationer och läsa textutdragen. De ska upptäcka olika matematiska begrepp och lära sig om koniska sektioner.

Resurser: Denna uppgift innehåller bilder och videor. De ämnen som behandlas här hjälper dig att hitta annat material för att anpassa och variera lektioner.

Tips till läraren: Att lära sig genom att göra är mycket effektivt, särskilt för unga elever med inlärningssvårigheter. Förklara alltid den praktiska användningen av varje mattekoncept.

Mål: I slutet av denna uppgift ska eleven:

- Förstå skillnaden mellan euklidisk och icke-euklidisk geometri;
- Förstå vad koniska sektorer är;
- Kunna använda en andragradsekvation för att rita en funktionsgraf.

Utvärdering:

Skriv 3 saker du gillar med denna uppgift:	1. 2. 3.
Skriv 2 saker du lärt dig	1. 2.
Skriv en sak som behöver bli bättre	1.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inledning

Läsning kan hjälpa oss att förstå världen runt oss på ett sätt som vi inte förväntade oss. Böcker är alltså värdefulla resurser för elever att utforska nya ämnen och begrepp som finns dolda i berättelsen. En del författare använder matematik i sina berättelser, som elever ofta inte riktigt tänker på, även om de mer sannolikt kommer att förstå matematiken bättre när de har läst om den.

Att se karaktärerna reflektera över matematiska problem och begrepp gör att läsaren vill förstå dessa begrepp och lösa problemen med dem på samma sätt som läsarna ofta försöker gissa slutet på en berättelse. Här kommer de att lära sig nya saker bara genom att följa karaktärernas äventyr.

Därför kan matematiken som gömmer sig i några välkända böcker erbjuda ett stort mervärde till den vanliga matematikundervisningen, genom att ge eleverna en mer vidgad upplevelse av vad det kan användas till.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

“Alice i underlandet” av Lewis Carroll

1. Handling

Figure 1: Cover page of "Alice's Adventures In Wonderland"

Denna roman skriven av Lewis Carroll 1865 handlar om en sju år gammal tjej, Alice, som faller ner i ett kaninhål och hamnar i Underlandet, en påhittad plats med speciella människor och djur som kan prata. Hon går från plats till plats, ändrar storlek och form och upplever oväntade äventyr. Du kanske har sett filmen, även om du inte känner igen boken.

2. Sammanhang

Innan vi går djupare in i berättelsen är det viktigt att känna till sammanhanget när den skrev. Författarens hette Charles Lutwidge Dodgson (han använde Lewis Carroll som en pseudonym). Han var matematiklärare vid Christ Church College i Oxford och var en mycket konservativ matematiker. Han baserade all sin matematiska kunskap på Euklides ”Elementa”. Under 1800-talet förändrades matematiken och nya teorier uppstod. Till exempel uppkom idéerna om abstrakt algebra och "imaginära tal" vid den tiden. För att visa absurditeten i denna nya matematik, använde han metaforer i hela Alice berättelse.

3. Scenen med larven

I den här scenen har Alice ändrat storlek flera gånger genom att äta magiska svampar. Hon träffar en larv som röker vattenpipa. Ordet "algebra" kommer från arabiska "al jebr e al mokabala" som betyder "återskapande och reduktion". Detta är exakt vad Alice gör när hon äter en svamp, i hopp om att återställa sin ursprungliga storlek och slutar krympa från nästan 3 m till 8 cm. Denna scen sätter tonen för följande äventyr eftersom Alice kommer att behöva äta den exakta mängden svamp som krävs för att hitta balans och behålla sin kropps storlek och proportioner.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

4. Gris och grimas-scenen

I den här scenen är Alice i Hertiginnans kök och alla börjar nysa på grund av att kocken lägger för mycket peppar i maten. Hertiginnan överlämnar sitt barn till Alice. Barnet förvandlas sedan långsamt till en gris, vilket Alice inser först när hon hör barnet grymta istället för att nysa. Den här scenen visar absurditeten i projektiv geometri, som studerar om en forms egenskaper kan förbli den samma när den projiceras på en annan yta, förutsatt att den behåller sina grundläggande egenskaper. Författaren använder en euklidisk teknik som kallas "reductio ad absurdum" för att säga att "om regeln fungerar för en triangel bör den också fungera för ett barn. QED". Barnet behåller några av sina grundläggande egenskaper, är fortfarande rosa och grinig, därför inser Alice förändringen först när det gnäller.

UTDRAG[1]:

"Hertiginnan satt på en pall med tre ben mitt i köket och pysslade med ett lindebarn. Kokerskan stod lutad över spisen och rörde i en stor kittel som såg ut att vara full med soppa.

- Det är för mycket peppar i soppan, sa Alice för sig själv, så gott hon kunde för alla sina nysningar.

Det var då alldeles för mycket peppar i luften. Till och med hertiginnan nös ibland och babyn tjöt och nös omväxlande, utan ett ögonblicks paus. De enda två i köket som inte nös var kokerskan och stor katt som låg i öppna spisen och grimaserade med mungiporna upp emot öronen.

- Förlåt, sa Alice lite generat, eftersom hon inte var säker på om det var passande att hon sa något utan att vara tilltalad, för jag lov att fråga varför er katt grimaserar på det där viset.

- Det en klockarkatt, sa hertiginnan så det är därför. Din gris!

Det sista sa hon så häftigt att Alice hoppade till, men hon såg strax att det var till babyn och inte till henne […]

[1] Översättning från engelska till svenska av Åke Runnquist

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Och så började hon vyssja barnet igen och sjunga någon sorts vaggvisa för det på samma gång. När hon kom till slutet på en rad ruskade hon babyn ordentligt.

När lillan kom till jorden
det var så kallt så göken frös
och peppar stod på borden
och Lillan bara nös.
Refräng (där kokerskan och
babyn sjöng med): Tjo! Tjo! Tjo!
[…]

- Hör du! Du kan få hålla honom ett slag om du vill, sa hertiginnan till Alice och kastade till henne babyn. Jag måste göra mej i ordning för att spela krocket med drottningen.

Och så nu rusade hon ut ur köket. Kokerskan kastade en stekpanna efter henne när hon gick, men missade precis.

Alice hade lite svårt att fånga babyn, eftersom den lilla kraken var konstigt formad och sträckte ut armar och ben åt alla håll, precis som en sjöstjärna, tänkte Alice. Den stackarn frustade precis som en ångpanna när hon tog emot honom och böjde och sträckte på sig hela tiden så att i början var det nätt och jämnt hon kunde hålla honom.
[…]

"Om jag inte tar honom med mej", tänkte hon, "så tar de säkert livet av honom vilken dag som helst."

Det sista sa hon högt och lillen grymtade till svar (han hade slutat nysa nu).

- Grymta inte, sa Alice, det passar sig inte att säga så.

Babyn grymtade igen och Alice kikade honom oroligt i ansiktet för att se vad det var för fel på honom. Det var nog så att han hade en väldigt uppnäsa som liknar ett tryne än en riktig näsa. Ögonen höll också på att bli ovanligt små för att vara på ett barn. Alice var inte alls nöjd med vad hon såg.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

“Men han kanske bara snyftade”, tänkte hon och tittade på ögonen igen för att se om det fanns några tårar i dem. Nej, det fanns inga tårar.

- Om du tänker förvandlas till en gris, sa Alice allvarligt, så vill jag inte ha mer att göra med dej. Kom ihåg det!

Den lille stackarn snyftade igen (eller grymtade, man kunde omöjligt säga vilket) och så gick de tysta ett slag till.”

---

5. Tebjudningen

Tebjudningen hos Hattmakaren försöker visa absurditeten hos matematikern William Rowan Hamiltons verk, där han experimenterade med kvaternioner, som är ett system med siffror baserade på fyra termer. De tre första termerna står för de tre dimensionerna och den fjärde är en extra-rumslig enhet, begreppet tid.

Titeln på detta kapitel "tebjudning" som kan läsas som "t-bjudning", eftersom "t" är den matematiska symbolen för tiden. De tre gästerna på te-kalaset, Hattmakaren, Hasselmusen och Marsharen representerar de tre ursprungliga termerna. Tiden förblir den fjärde och Hattmakaren säger att de grälade och nu kommer Tiden inte göra något han ber om. Som ett resultat tvingas alla tre gäster nu flytta sig runt bordet i evighet. Hattmakarens gåta "Varför är en korp som en skrivbord?" har ingen poäng, vilket också kan spegla Hamiltons idé om att ren tid, orsaken och dess effekt inte längre är kopplade. Författaren använde sin kreativitet för att visa absurditeten i de nya matematiska teorierna, som skapade en nonsens-värld.

För att lära dig mer om historien om tid kan du titta på denna TED-Ed-video: https://www.youtube.com/watch?v=R3tbVHlsKhs.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ordlista

Abstrakt Algebra: en gren av algebra som studerar algebraiska strukturer.

Euklides (300-400 fvt): en grekisk matematiker från antiken som etablerade grunderna för geometri.

Imaginära tal: är siffror som kan skrivas som verkliga siffror multiplicerade med den imaginära enheten i, av vilka vi vet att $\boldsymbol{i} = -\mathbf{1}$. Till exempel ai = -a2. I denna teori är noll både imaginärt och reellt.

Kvaternioner: är ett talsystem som utökar de komplexa siffrorna. En av deras funktioner är att multiplikationen av två kvartar inte är kommutativ.

Metafor: att använda bildspråk för att levandegöra sitt språk.
Ex: att fiska efter komplimanger: personen fiskar inte bokstavligen, men vi kan använda den här bilden som en metafor.

Pseudonym: ett påhittat namn som används av en konstnär, författare etc. för att underteckna sina verk.

QED (latin): “Quod erat demonstrandum“ betyder "vilket skulle bevisas" och används ofta i slutet av matematiska eller filosofiska argumentationer.

Reductio ad absurdum (latin): betyder "reduktion till absurditet" och är ett argument som används i logik för att visa att ett uttalande är löjligt och inte kan tas på allvar.

Vattenpipa: en orientalisk pipa som har ett långt rör där man drar in rök från en skål fylld med vatten.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Matematiken bakom Alice i underlandet

Du kommer att lära dig om euklidisk och icke-euklidisk geometri vilket gör att du kan förstå vad författaren höll med om och vad han tyckte var helt absurt.

Euklidisk och icke-euklidisk geometri

1. Euklidisk geometri

Euklidisk geometri är den vi lär oss mest om. Euklides var "geometrins far" och skrev sina postulater, definitioner och vanliga uppfattningar i sina böcker "Elementa". Det femte postulatet tog fram några reflektioner hos några andra kända matematiker genom historien. Euklides baserade sin geometri på avstånd och vinklar, vilket man inte gjorde i senare studier om geometri.

Se följande TED-Ed-video om euklidisk och icke-euklidisk geometri: https://www.youtube.com/watch?v=LPET_HhN0VM

2. Icke-euklidisk projektiv geometri:

Projektiv geometri används i icke-euklidiska geometrier som elliptiska och hyperboliska geometrier. Den fokuserar på projicering av former på andra ytor och säger att **en form kan böjas eller sträckas till en annan om den behåller sina grundläggande egenskaper.** Detta bygger på antar att Euklides femte postulat är fel.

Krökningen av ytan på vilken formerna projiceras är en stor del av det som gör icke-euklidiska geometrier annorlunda än den euklidiska geometrin. Perspektiv är till exempel ett resultat av detta resonemang. Matematiker studerade egenskaperna hos projicerade former för att se om de förblev desamma med perspektiv.

Exempel på två parallella linjer:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Bild 2: Bild av en väg ur betraktarens perspektiv

Enligt euklidisk geometri kommer två parallella linjer aldrig mötas, men när man tittar på dem med perspektiv eller de projiceras på en annan yta verkar dessa linjer möta vid horisonten, vid någon tidpunkt i **oändligheten**. Med begreppet oändlighet står vi inför en geometri som inte tar hänsyn till figurernas vinklar och avstånd.

Koniska sektorer

När du delar en kon med ett plan i olika delar skapas en annan form. Låt oss titta på följande bild:

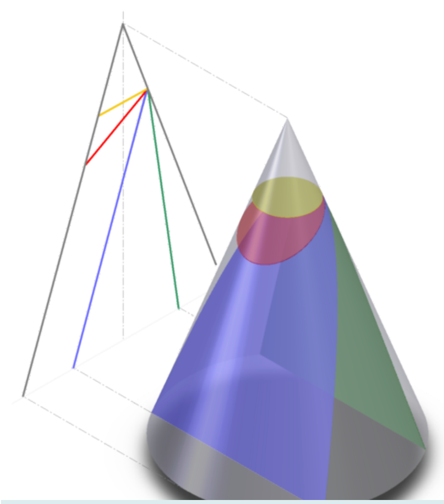


Figure 3: Representation of a conic section

Som ni kan se, när vi delar konen med ett plan, kommer vi att få olika former.

- I **gult**: vi delar den horisontellt och får en **cirkel**.
- I **rött**: vi delar den med en lätt lutning och får en **ellips**.
- I **blått**: vi delar den diagonal, parallellt med konens kant och får en **parabel**.
- I **grönt:** vi delar den lodrätt och får en **hyperbel**.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Du kan också använda en punkt (fokus) och en rak linje (directrix) för att definiera dessa kurvor:

Mät avståndet:

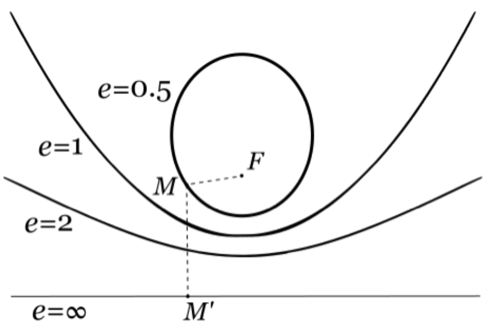


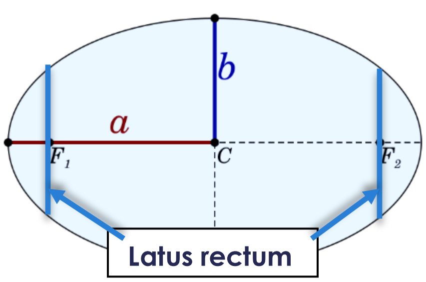
Bild 4"Eccentricidad" av Seahen (CC BY-SA 3.0)

- från fokus (F) till en punkt på kurvan (M)
- vinkelrätt från riktningen (M ') till den punkten kommer förhållandet mellan de två avstånden att förbli detsamma.
- för en cirkel är **förhållandet = 0**
- för en ellips, **0 < förhållandet < 1**
- för en parabel, **förhållandet = 1** (lika avstånd)
- för en hyperbel, **förhållandet> 1**

Detta förhållande kallas **eccentricitet**, vilket betyder:

> "alla punkter vars avstånd till fokus är lika med excentriciteten gånger avståndet till riktningen[2]"

> **Latus Rectum** är en linje som går igenom fokus och är parallell med directrix.



- Den är fyra gånger så lång som brännvidden i parabeln
- Den är $\frac{2b^2}{a}$ av en ellips där a och b är **hälften av den större (a) och den mindre (b) diametern**.

[2] https://www.mathsisfun.com/geometry/conic-sections.html

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ekvationerna för var och en av dessa kurvor:

1. Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Cirkeln (där a = b)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$ och alltså, $x^2 + y^2 = a^2$

Lägg märke till att cirkeln är en ellips med lika diametrar.

3. Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4. Parabeln

$y^2 = 4ax$ med $a > 0$

Vi kan sedan hitta en allmän formel för dem alla, även om dessa kurvor togs från en fast kropp tillhör de nu plangeometri och deras kartesiska koordinater kan hittas. Men eftersom de är böjda och inte har raka linjer, kan vi inte bara använda x och y i denna ekvation.

Vi behöver:

- x och y
- x^2 och y^2
- xy
- en konstant
- en factor för vardera

Grafer av kvadratiska ekvationer i två variabler representerar alltid en konisk sektion. Här är deras allmänna ekvation:

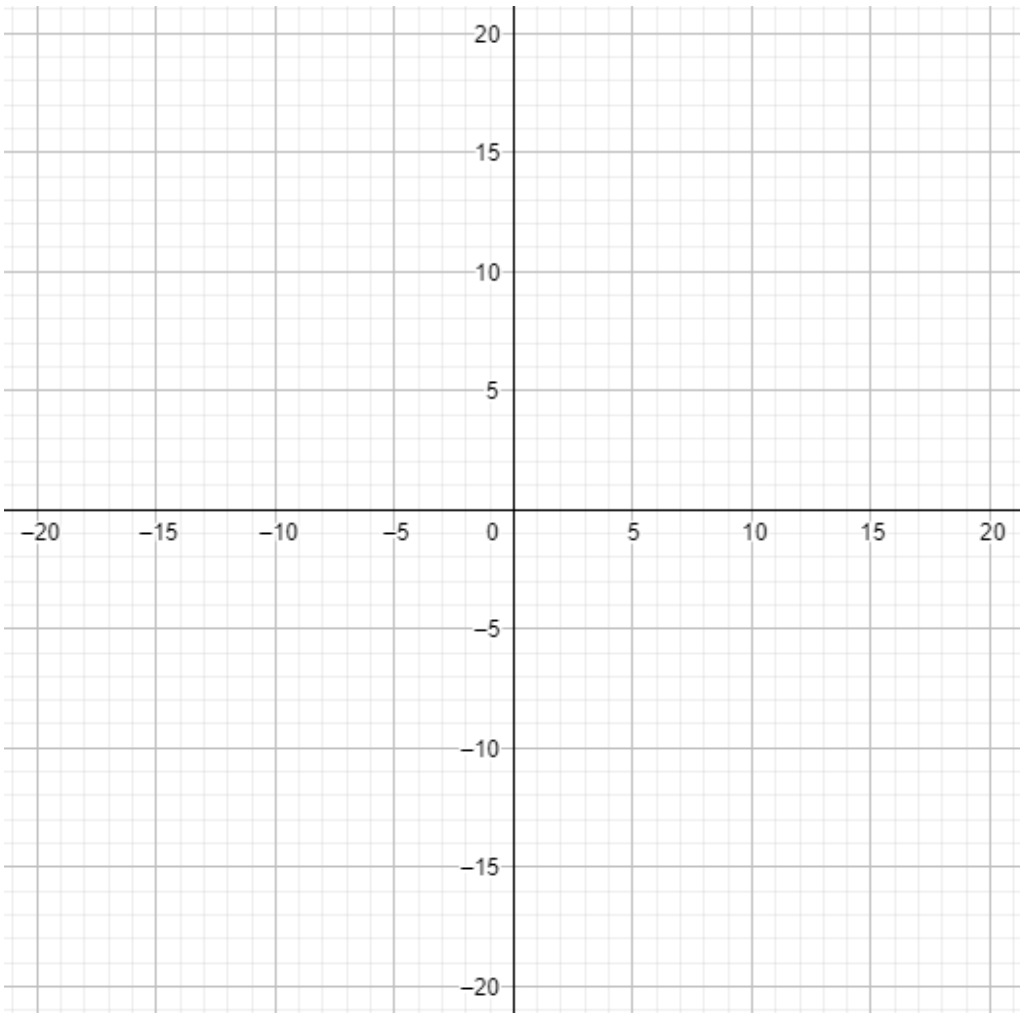
This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Kom ihåg att alla koefficienter för denna ekvation måste vara rella tal och att A, B och C inte alla kan vara noll.

Några övningar för att testa dessa formler:

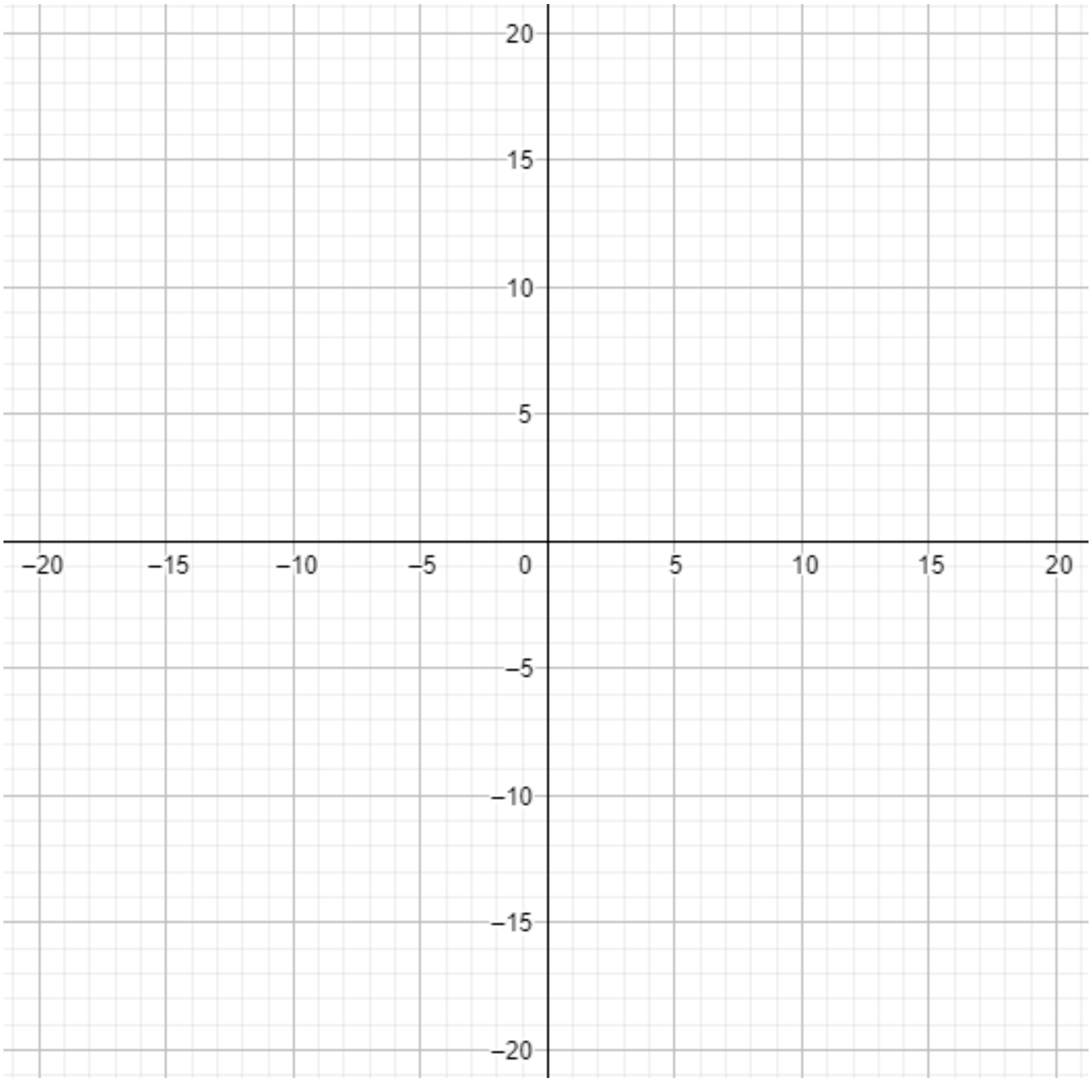
1. Hitta ekvationen för parabeln som har sin topp i (0; 0) och sitt fokus i (-5; 0)
2. Rita den här:



3. Hitta centrum och radie på denna cirkel: $x^2 + y^2 – 4x + 8y - 6 = 0$

4. Rita cirkeln här:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



UPPGIFT

Le som en klockarkatt:

I Underlandet träffar Alice en konstig katt som långsamt försvinner och bara lämnar sitt leende kvar. Påminner det inte om en form vi just har lärt oss om?

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.


Bild 5: Illustrationer ur boken "Alice i underlandet" av Lewis Caroll

På den första bilden ser vi huvudet mycket tydligt, men det verkar inte ha någon kropp. På den andra kan vi se att huvudet försvinner i trädets lövverk. Ansiktet och leendet är fortfarande synliga och hakan verkar vila på en av trädets grenar.

1. Rita directrix, fokus and kurvan i bilden:

2. Besvara frågorna:

a) Vilken kurva hittade du?

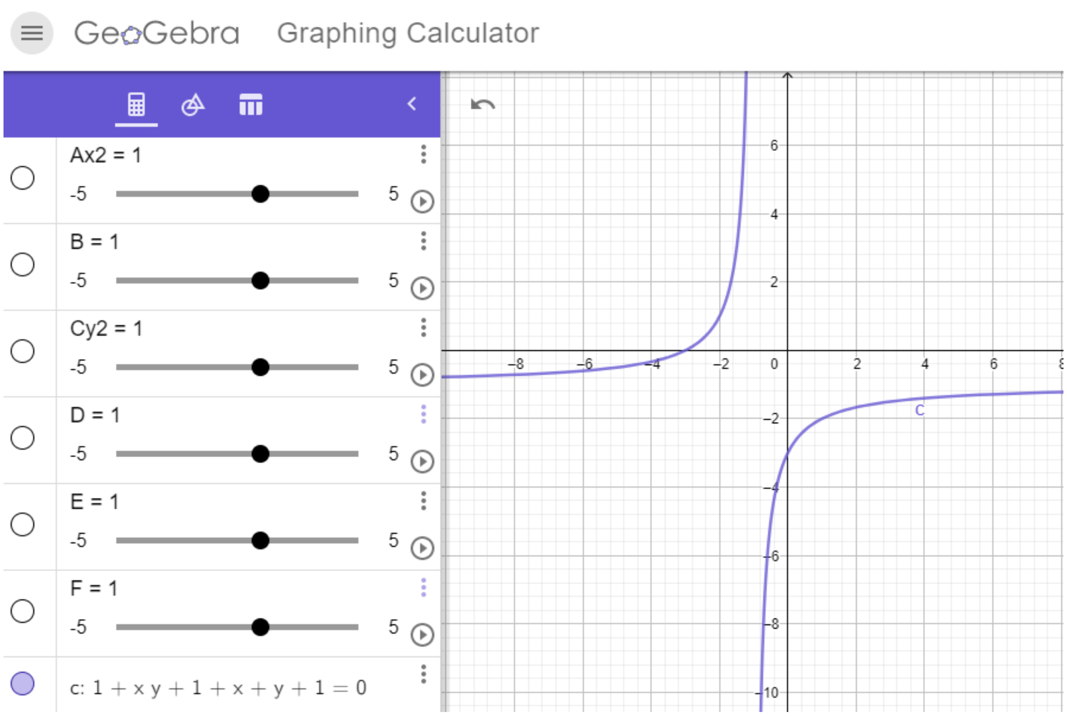
This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

b) Varför tror du att författaren lät katten få egenskapen att framträda och försvinna som den ville?

---

3. Använd verktyget Geogebra för att rita formerna tydligare:

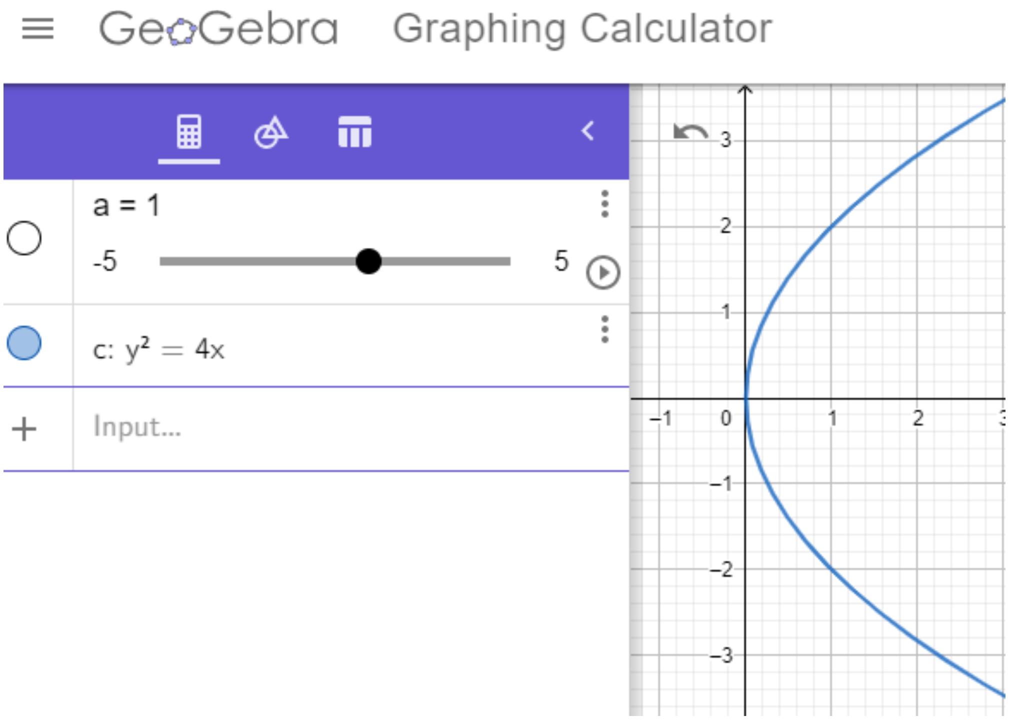
Om vi skriver in ekvationerna får vi följande:



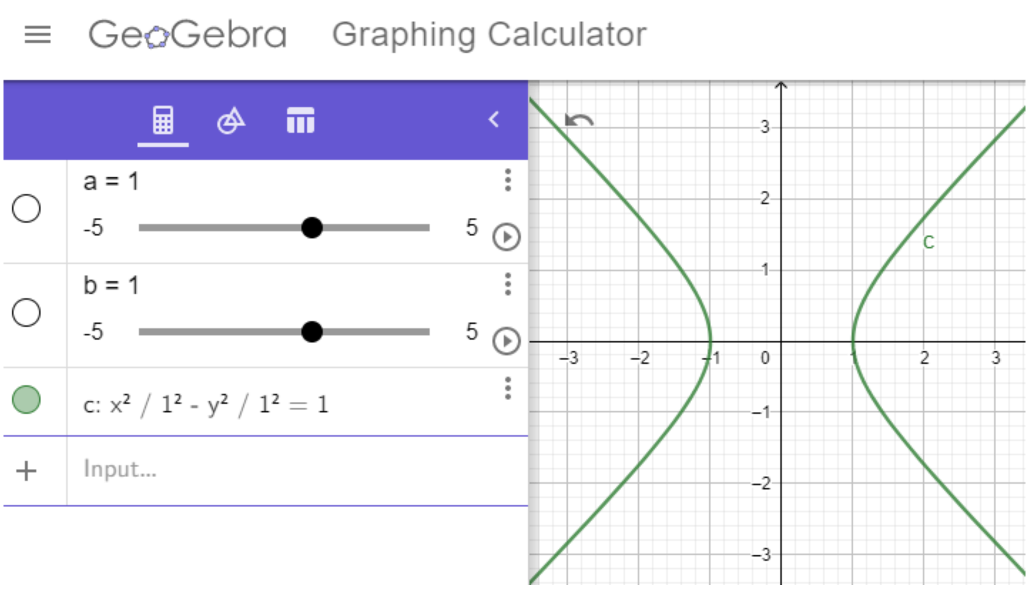
Testa att klicka "play" för att se vad som händer 😉

Vi skriver om formeln för att rita parabeln i programmet:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Och testar hyperbeln:

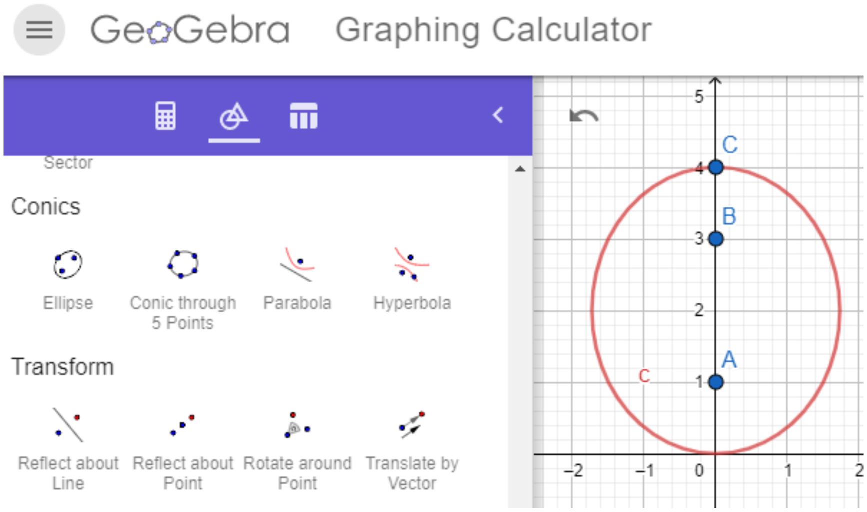


Du kan också skapa dina egna former och få deras koordinater och ekvationer:

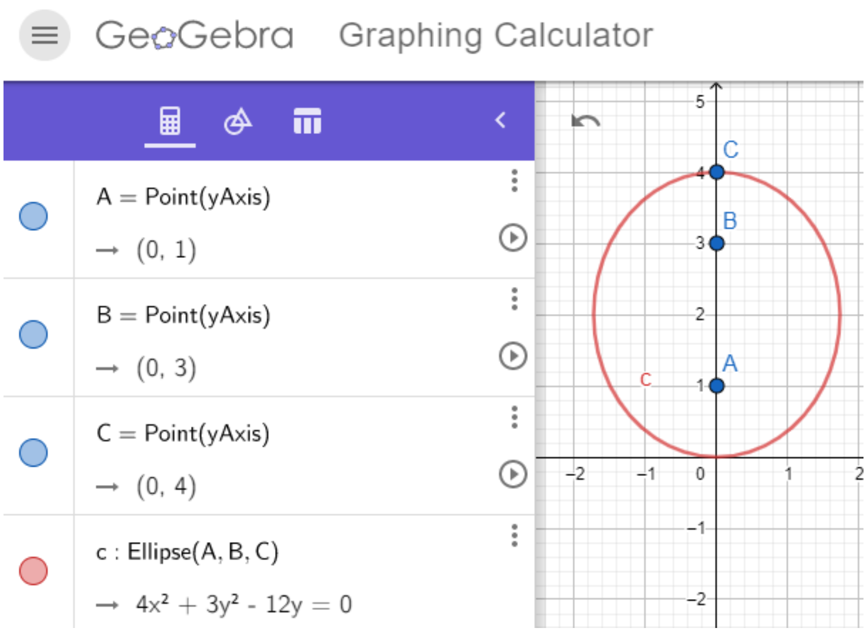
- Ellipsen:

Detta verktyg låter dig rita en ellips var du vill i grafen:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

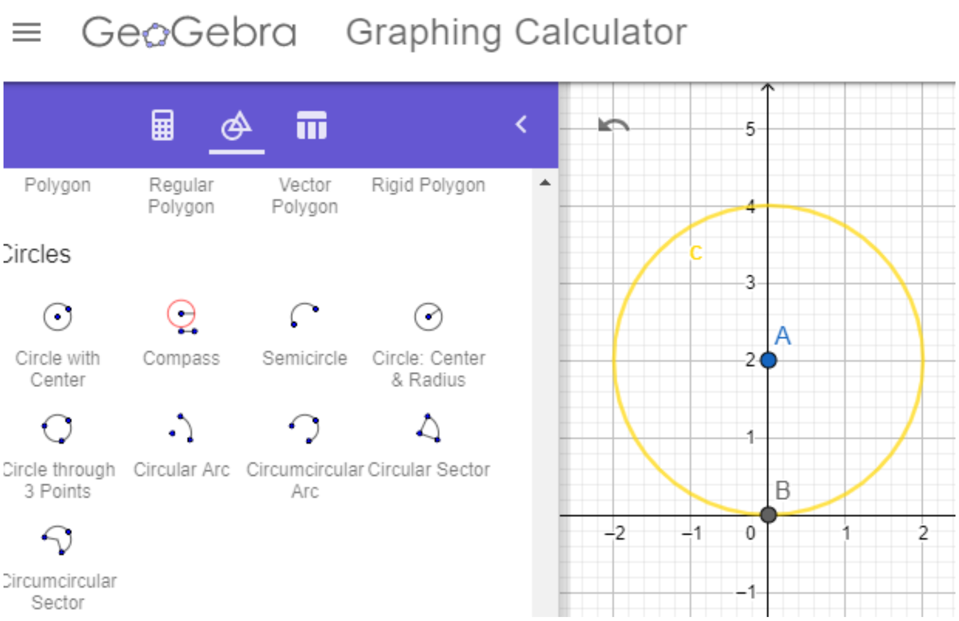


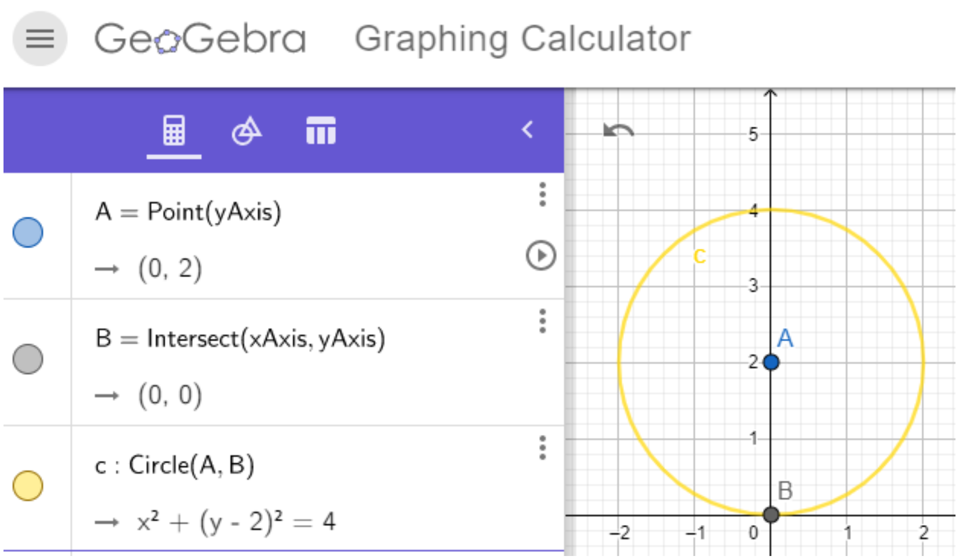
I den här delen kan du se koordinaterna och ekvationerna för ellipsen:



- Cirkeln:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.





När du klickade på "play" såg du att formen kunde böjas, sträckas ut och krympa till andra figurer.

Så här kom några matematiker fram till slutsatsen att en form kan böjas och sträckas till andra former om den behåller sina grundläggande egenskaper, precis som hertiginnans barn kunde förvandlas till en gris!

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

LÄR DIG MER…

Matematiken i Alice i underlandet:

http://www.massline.org/ScottH/science/MathOfAliceInWonderland-100308.pdf

Algebra i Alice i underlandet:

https://www.newscientist.com/article/mg20427391-600-alices-adventures-in-algebra-wonderland-solved/

Dold matematik i Alice i underlandet:

https://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_03_10.html

Projektiv geometri

https://www.britannica.com/science/projective-geometry

Euklides postulat i Elementa:

https://www.youtube.com/watch?v=LPET_HhN0VM

Den icke-euklidiska geometrins historia – del 1:

https://www.youtube.com/watch?v=nkvVR-sKJT8

Den icke-euklidiska geometrins historia – del 2:

https://www.youtube.com/watch?v=vUWKMo5scKY

Den icke-euklidiska geometrins historia – del 3:

https://www.youtube.com/watch?v=H74AayZkpXg

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.