

DEL IV: Film & Matematik

ÅLDER: 16 – 18

UPPGIFT 43: KVADRATFUNKTIONER I FILMEN “OCTOBER SKY”

SPEL – Sociedade Promotora de
Estabelecimentos de Ensino

Falcon 9 SES-8
(Source: SpaceX from Wikimedia (2013))



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Lärarguide

Titel: Kvadratiska funktioner i filmen "October Sky"

Ålder: 16 – 18 år

Längd: 2 timmar

Matematikinnehåll: Kvadratiska funktioner

Konstinnehåll: Fritt fall, uppskjut

Allmänna mål: Att förstå en kvadratisk funktion, beräkna koordinaterna för dess toppunkt, lösa kvadratiska ekvationer och olikheter. Beräkna positionen för en projektil när den faller fritt eller kastas rakt upp.

Instruktioner: Visa utdraget av filmen October Sky där den kvadratiska funktionen finns med (Länk i "Lär dig mer") och uppmana eleverna att se hela filmen hemma; Använd en grafisk räknare (till exempel Desmos som finns online) för att visa elevernas grafer samt resultaten från kvadratiska ekvationer/olikheter.

Resurser: Dator med internetuppkoppling; Tillgång till: <https://www.desmos.com/>

Tips till läraren: Börja med att skapa graferna för vissa kvadratiska funktioner för att förklara deras egenskaper. Ge ett exempel för vart och ett av de begrepp som lärs ut och låt eleverna sedan träna liknande övningar.

Mål och kunskaper: I slutet av denna uppgift ska eleven kunna:

- Förutse en kvadratisk funktion och förstå dess resultat.
- Beräkna den maximala eller minsta punkten för en kvadratisk funktion;
- Lösa kvadratiska ekvationer och olikheter;
- Beräkna positionen för en projektil när det fritt faller eller kastas vertikalt.

Utvärdering:

Skriv 3 saker du gillar med denna uppgift:	1. 2. 3.
Skriv 2 saker du lärt dig	1. 2.
Skriv en sak som behöver bli bättre	1.

Inledning

Ibland är innehållet i tv-serier eller filmer relaterat till matematik i. Ofta får dessa matematiska begrepp inte så mycket vikt, eftersom de inte påverkar själva berättelsen. Det finns dock några fall där de gör det.

Några exempel är: "21" (USA, 2008), av Robert Luketic; "Proof" (USA, 2005), av John Madden; "A Beautiful Mind" (USA, 2001), av Ron Howard; "Enigma" (USA, 2001), av Michael Apted; "Pi" (USA, 1988), av Darren Aronofsky; "Good Will Hunting" (USA, 1997), av Gus Van Sant och "Cube" (Canada, 1997), av Vincenzo Natali.

I den här uppgiften kommer filmen "October Sky" (USA, 1999,) av Joe Johnston att diskuteras och matematiska begrepp i den, såsom projektilbanor och kvadratiska funktioner, kommer att behandlas.

October Sky

October Sky (1999) är ett amerikanskt drama baserad på Homer Hickmans roman "Rocket Boys". Det är baserat på en sann historia om Homer Hickman, en gruvarbetarson, som mot sin fars vilja inspirerades till att göra egna raketer när Sputnik 1 skjöts upp i oktober 1957 av Sovjetunionen.

Fritt fall och vertikal utskjutning av raketer, i "October Sky" använder Homer och hans vän Quentin sådana begrepp för att bevisa sin oskuld till en brand som började nära den plats där en av raketerna som de hade skjutit upp kraschade. För att göra det använder de kvadratiska funktioner för att visa att det var omöjligt för en projektil att falla på en sådan plats.

Så småningom anställdes Homer Hickman som flygingenjör av NASA.



Bild 1 – October Sky (1999) filmposter

(Källa:https://pt.wikipedia.org/wiki/October_Sky)

Ordlista

Fritt fall: en rörelse hos en kropp där tyngdkraften är det enda som orsakar dess acceleration.

Projektil: alla föremål som rör sig under påverkan av tyngdkraften.

Sputnik 1: Jordens första konstgjorda satellit som sköts upp av Sovjetunionen den 4 oktober 1957 i Sovjetunionens rakettestenhet, numera känd som Baikonur Cosmodrome.

Verikal utskjutning: att skjuta en kropp uppåt eller nedåt, och till skillnad från fritt fall ge den ett initialt hastighetsvärde.

Matematiken bakom October Sky

Precis som Homer och hans vän beräknade i vilket område raketerna de hade skjutit iväg kraschade, är det möjligt att beräkna höjden på ett objekt som faller fritt (tappat) eller är uppkastat, som en funktion av tiden. För att göra det används följande algebraiska funktion:

$$h(t) = \pm \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

Där:

$h(t)$ -> höjd (i meter)

t -> tid (i sekunder)

v_0 -> ingångshastighet (i m/s)

h_0 -> ingångshöjd (i meter)

g -> acceleration i m/s^2 (ungefärligt värde på jorden är **9,8**)

Alltså:

$$h(t) = \pm \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0 \Leftrightarrow$$

$$h(t) = \pm \frac{1}{2}(9,8)t^2 + v_0t + h_0 \Leftrightarrow$$

$$h(t) = \pm 4,9t^2 + v_0t + h_0$$

Obs: När ett objekt skjuts uppifrån och ned är dess acceleration positiv, medan när det startas nerifrån och upp är dess acceleration negativ. När ett objekt är i fritt fall eller vertikalt skjuts från topp mot botten (dvs, tappas), används plustecknet (+) i formeln; när ett objekt skjuts upp vertikalt från botten och upp används minustecknet (-):

Obs 2: Om höjden anges i feet, har formeln följande form:

$$h(t) = \pm \frac{1}{2}(32)t^2 + v_0t + h_0 \Leftrightarrow h(t) \pm 16t^2 + v_0t + h_0$$

Dessa kallas **kvadratiska funktioner** och graferna som härrör härifrån kallas **parabler**.

Låt oss titta närmare på de kvadratiska funktionerna för att lära oss några av deras egenskaper.

Kvadratisk funktion

Definition och karaktäristiska egenskaper

En **kvadratisk funktion**, eller polynomfunktion i den andra graden, är en funktion f definierad av:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Där:

a , b och c är **reella tal**.

Domänen för en kvadratisk funktion är uppsättningen reella tal.

Grafen för en kvadratisk funktion är en kurva som kallas en **parabel**.

Exempel:

$$y = 2x^2$$

$$y = -x^2 + 4$$

$$y = x^2 + 6x + 4$$

7

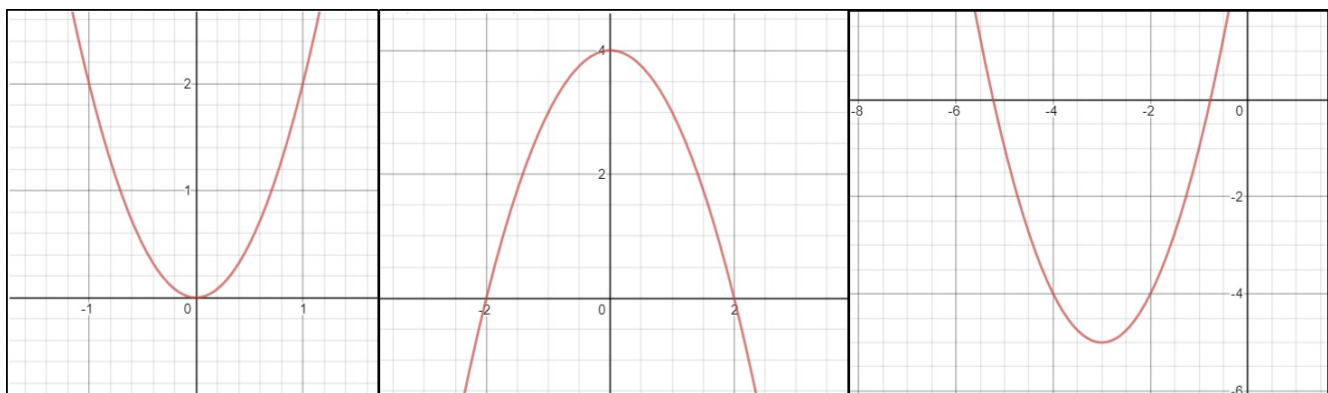


Bild 2 – Kvadratiska funktioner

(Källa: Författaren; <https://www.desmos.com/>)

- Värdet på parametern a påverkar grafens kurva:
 - om $a > 0$, blir parabeln U-formad, **med en öppning överst**;
 - om $a < 0$ blir parabeln U-formad, **med en öppning nederst**;

En parabel har vissa kännetecken

- En parabel är symmetrisk med avseende på en vertikal linje, som kallas symmetriaxeln..
- En parabels symmetriaxel är den vertikala ekvationslinjen $x = -\frac{b}{2a}$.
- Skärningspunkten mellan parabeln och symmetriaxeln kallas toppunkt.
- Koordinaterna för toppunkten av en parabel ges av uttrycket

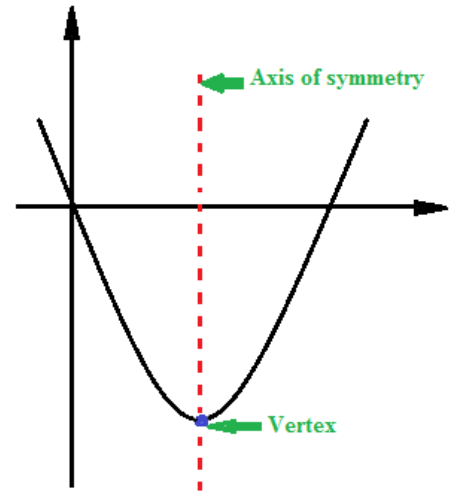


Bild 3 - Symmetriaxel
(Källa: <http://calculator.mathcaptain.com/vertex-calculator.html>)

$$x_V = -\frac{b}{2a} \text{ och } y_V = f(x_V) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) \text{ eller } y_V = \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Roten ur en kvadratisk funktion

Roten ur eller **noll** i den kvadratiske funktionen, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ och $a \neq 0$ till det reella talet x när $f(x) = 0$.

Därför är roten ur funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ lösningarna för andra gradens polynomekvation $ax^2 + bx + c = 0$, som ges av den så kallade **kvadratformeln**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi har:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exempel:

Studera nollorna i funktionen som definieras av $f(x) = x^2 - 6x + 5$

- Identifiera värdena: $a = 1$, $b = -6$ e $c = 5$
- Använd kvadratformeln:

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2} \Leftrightarrow \\ x = \frac{6 - 4}{2} \vee x = \frac{6 + 4}{2} &\Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \vee x = \frac{10}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5\end{aligned}$$

Rötter = $\{1, 5\}$

OBS!:

1) Antalet verkliga rötter för en kvadratisk funktion beror på det värde som erhålls för den n:e roten $\Delta = b^2 - 4ac$, den så kallade diskriminanten:

- när $\Delta > 0$, finns det **två verkliga** (och skilda) **rötter**;
- när $\Delta = 0$, finns det **en verklig rot** (eller, mer exakt, två likadana);
- när $\Delta < 0$, finns det **inga verkliga rötter**.

2) Vissa polynomekvationer av den andra graden kan lösas utan att använda den kvadratiske formeln. Detta händer till exempel när andragradsekvationer är ofullständiga, det vill säga av typen:

- $ax^2 + c = 0$;
- $ax^2 + bx = 0$.

Koordinataxlarnas skärningspunkt för en kvadratisk funktion

Skärningspunkt för en graf med axlarna Oy

För att få koordinaterna för skärningspunkten för grafen för funktionen f definierad av $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ och $a \neq 0$ med axlarna Oy , ersätt x med 0. Eftersom $f(0) = c$, finns det alltid en skärningspunkt i diagrammet för kvadratisk funktion med y -axeln. Koordinaterna för skärningspunkten är $(0, c)$.

Skärningspunkt för en graf med axlarna Ox (noll för en funktion)

En kvadratisk funktion kan ha en nolla, två nollor eller ingen. Vi tittar på följande grafiska framställningar av kvadratiska funktioner.

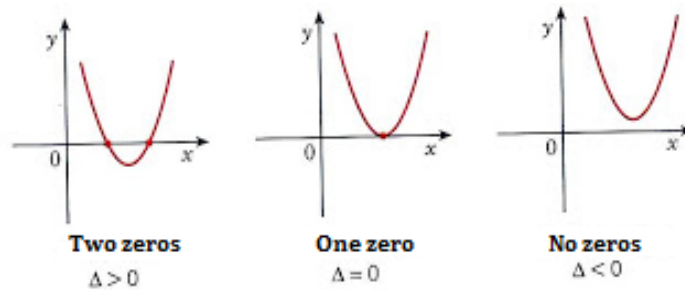


Bild 4 – Grafiska representationer av kvadratiska funktioner

(Källa: <http://funcaode2grau.blogspot.com/2008/02/resumo-terico-da-funo-quadratica.html>)

X-koordinaten för nollkoordinatpunkterna är nollorna i funktionen.

När det gäller den kvadratiska funktionen är det av intresse att identifiera dess nollor både för upplösning av andragradsekvationer och ojämlikheter, liksom för lösning av verkliga sammanhangsproblem.

Hitta tecken (+/-) på rötter till en kvadratisk funktion

- Om funktionen har två verkliga rötter ($\Delta > 0$)

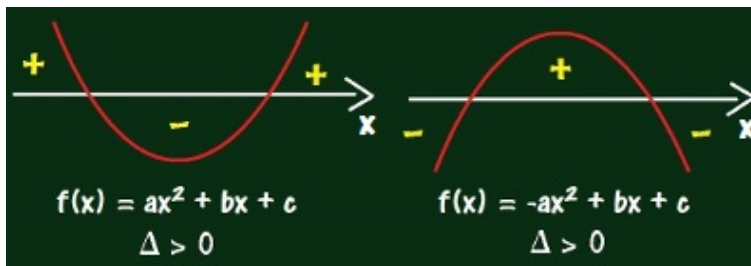


Bild 5 – Tecken på en kvadratisk funktion med 2 rötter

(Källa: <https://alunosonline.uol.com.br/matematica/estudo-variacao-sinal-uma-funcao-2-grau.html>)

Positiv: $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$

Positiv: $]x_1; x_2[$

Negativ: $]x_1; x_2[$

Negativ: $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$

- Om funktionen har en verklig rot (dubbla lika rötter) ($\Delta = 0$)

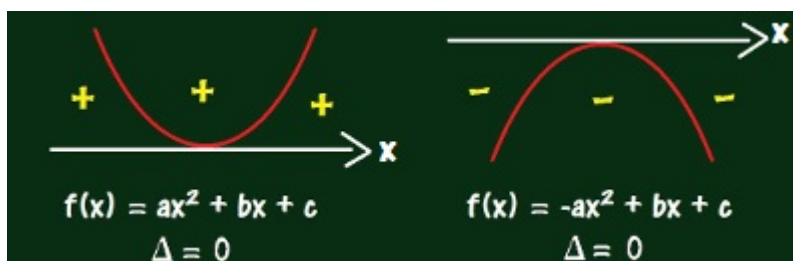


Bild 6 – Tecken på en kvadratisk funktion med 1 nolla

(Källa: <https://alunosonline.uol.com.br/matematica/estudo-variacao-sinal-uma-funcao-2-grau.html>)

Positiv: $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ or $]-\infty; x_1[\cup]x_1; +\infty[$

Positiv: $\{ \}$ or \emptyset

Negativ: $\{ \}$ or \emptyset

Negativ: $\mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ or $]-\infty; x_1[\cup]x_1; +\infty[$

- Om funktionen inte har några verkliga rötter ($\Delta < 0$)

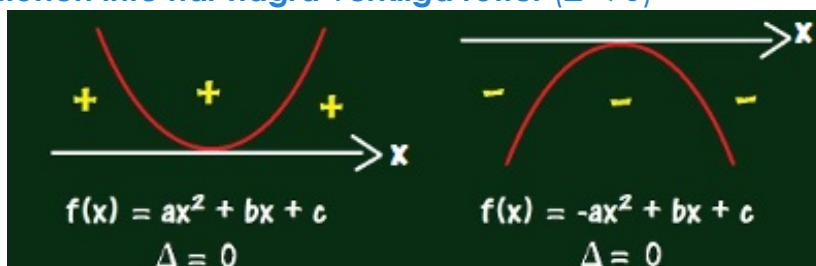


Bild 7 – Tecken på en funktion utan verkliga rötter

(Källa: <https://alunosonline.uol.com.br/matematica/estudo-variacao-sinal-uma-funcao-2-grau.html>)

Positiv: \mathbb{R}

Positiv: $\{ \}$ or \emptyset

Negativ: $\{ \}$ or \emptyset

Negativ: \mathbb{R}

Andragsolikheter

Om "lika med"-tecknet i den typiska andragskvation $ax^2 + bx + c = 0$, där $a \neq 0$, (=) ersätts av ett "inte lika med" tecken (\neq) blir det en **andragsolikheter**.

Att lösa en andragsolikheter består av att bestämma värdena för x som motsvarar de positiva, negativa, icke-positiva eller icke-negativa värdena för funktionen $y = ax^2 + bx + c$.

Exempel: Lös olikheten $x^2 + 2x > 3$

Lösning:

→ Första steget: $x^2 + 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0$

→ Andra steget: Lös ekvationen $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2-4}{2} \vee x = \frac{-2+4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-6}{2} \vee x = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

12

→ Tredje steget: Gör den grafiska representationen för $f(x) = x^2 + 2x - 3$ och identifiera nollorna och områdena där funktionen är positiv och negativ.

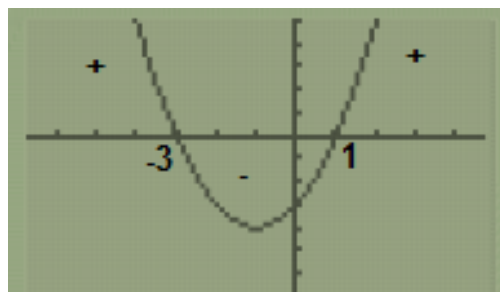


Bild 8 – Grafen till funktionen $f(x) = x^2 + 2x - 3$
(Källa: Grafritare)

→ Fjärde steget: Skriv lösningen till olikheten.

$$x^2 + 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$$

Obs: Den tidigare olikheten kan också visas med Desmos.

I detta fall motsvarar lösningssuppsättningen den del av diagrammet för den kvadratiska funktionen som ligger över ekvationslinjen $x = 3$, d v s, $C.S. =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$

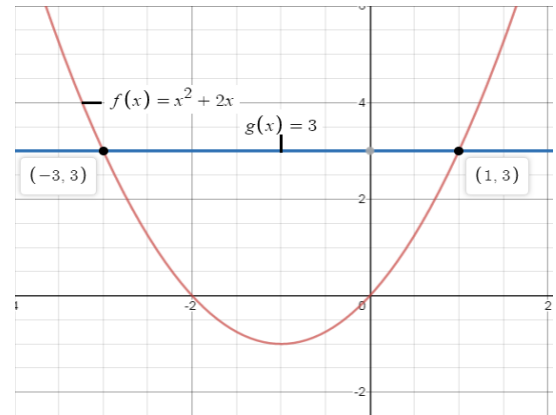


Bild 9 – Grafen till olikheten $x^2 + 2x > 3$
(Källa: <https://www.desmos.com/calculator>)

Kvadratisk funktion av typen $y = a(x - h)^2 + k$

För att alla kvadratiska funktioner ska representeras som $y = a(x - h)^2 + k$, där (h, k) är koordinaterna för dess topp, behöver du helt enkelt känna till koordinaterna för dess topp och ytterligare en av dess punkter.

Kvadratiska funktioner för projektiluppskjutningar

Som nämnts tidigare kan följande algebraiska funktion beräkna höjden på ett objekt när det fritt faller eller skjuts upp vertikalt vid en given tidpunkt:

$$h(t) = \pm 4,9t^2 + v_0t + h_0$$

Där:

$h(t)$ -> höjd (i meter)

t -> tid (i sekunder)

v_0 -> ingångshastighet (i m/s)

h_0 -> ingångshöjd (i meter)

$4,9$ -> gravitationsacceleration på jorden i m/s^2 (visas med g)

Kom ihåg att när ett objekt är i fritt fall eller vertikalt skjuts från topp till botten används plustecknet (+) i formeln, medan om objektet startas vertikalt från botten och upp använder vi minustecknet (-).

Vi tittar på några exempel:

För att underlätta beräkningen, sätt att den universella gravitationskonstanten, g , är 10 m/s^2 , vilket ger följande formel:

$$h(t) = \pm 5t^2 + v_0t + h_0$$

Exempels:

- 1) En projektil släpps 80 m från marken. Om $g = 10 \text{ m/s}^2$ och den inte påverkas av andra krafter, bestäm ögonblicket för när objektet kommer att träffa marken.

Lösning:

- Första steget: Skriv formeln som motsvarar hur högt projektilen befann sig när den släpptes.

Objektet släpptes från 80 m, varför dess initiala höjd är $h_0 = 80 \text{ m}$. Eftersom den initiala hastigheten är $v_0 = 0 \text{ m/s}$ och projektilen går uppifrån och ned, blir formeln:

$$h(t) = 5t^2 + 0 \times t + 80 \Leftrightarrow h(t) = 5t^2 + 80$$

- Andra steget: Lös ekvationen $h(t) = 0$

$$\begin{aligned} h(t) = 0 &\Leftrightarrow 5t^2 + 80 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 = 80 \Leftrightarrow t^2 = \frac{80}{5} \Leftrightarrow t^2 \\ &= 16 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow t = \pm 4 \Leftrightarrow t = 4 \text{ s.} \end{aligned}$$

→ Tredje steget: Svar: Projektalen träffar marken efter 4 sekunder.

2) En projektil skjuts upp vertikalt från marken med en hastighet på 72 km/h.

Ta reda på:

- a) funktionen för höjden på projektilen;
- c) den maximala höjden som uppnåts;
- d) höjden för $t = 3$ s och rörelseriktningen vid den tiden;
- e) ögonblicket då objektet når marken.

Obs: $g = 10 \text{ m/s}^2$

Lösning:

a) Omvandling av 72 km/h i m/s resulterar i 20 m/s. Eftersom den ursprungliga hastigheten är $v_0 = 20 \text{ m/s}$, den initiala höjden är $h_0 = 0 \text{ m}$ och att projektilen sköts nerifrån och upp, är formeln $h(t) = -5t^2 + 20 \times t + 0 = -5t^2 + 20t$.

b) Den maximala höjden som uppnås är parabelns topp. Följande formel

används för att beräkna koordinaterna för toppens parabel: $t = -\frac{b}{2a} =$

$-\frac{20}{2 \times (-5)} = 2$. Detta betyder att den högsta punkten uppnås efter 2s. Därför är

den högsta punkten $h(2) = -5 \times 2^2 + 20 \times 2 = 20 \text{ m}$.

b) $h(3) = -5 \times 3^2 + 20 \times 3 = 15 \text{ m}$. Upp till 2 s riktas rörelsen uppåt (maximal höjd) och för $t > 2$ s riktas rörelsen nedåt, vilket betyder att objektet sjunker under 3 sekunder.

c) Nedstigningstiden är lika med stigningstiden, därför kommer objektet att träffa marken efter $2 + 2 = 4$ s. Detta resultat kan uppnås genom att lösa ekvationen $h(t) = 0$.

UPPGIFTER

UPPGIFT 1



En kula placeras 1,5 m över marken och kastas i en viss vinkel till marknivån.

Kulbanan ges av följande funktion:

$$f(x) = -0,0025x^2 + x + 1,5$$

Där $f(x)$ är kulans höjd (i meter) och x det horisontella avståndet från kula till startpunkten.

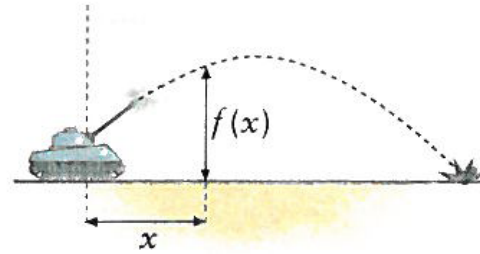


Bild 10 – En projektils kulbana

(Källa: Neves, M. A, Pereira, A., Leite, A., Guerreiro, L., & Silva, M. C. (2006). Matemática A2 – Ensino Profissional: Funções polinómicas. Porto: Porto Editora.)

- 1.1 Bestäm det horisontella avståndet i meter, till en decimal, mellan startpunkten och punkten där kulan landade.
- 1.2. Bestäm den maximala höjden som kulan når och hur långt bort den landade..

UPPGIFT 2



Lös analytiskt följande olikhet $2x^2 - 8x > -6$.

16

UPPGIFT 3



En boll kastas vertikalt uppåt.

Höjden h , i meter, när bollen är t sekunder efter uppkastet definieras av:

$$h(t) = 1 + 38t - 5t^2.$$

- 3.1 Bestäm $h(0)$ och tolka resultatet i relation till situationen.
- 3.2 Bestäm den maximala höjden som bollen når och när det inträffar.
- 3.3 När träffar bollen marken? Svara med en decimal..
- 3.4 Vid vilket tidsintervall var bollen mindre än 30 meter från marken? Svara i sekunder med en decimal.

LÄR DIG MER...

October Sky (1999) filmhandling

https://www.imdb.com/title/tt0132477/?ref=fn_sr_1?ref=fn_sr_1

Kvadratiska funktioner i October Sky

<https://www.youtube.com/watch?v=udHB3tftPz4>

Utseende och egenskaper hos kvadratiska funktioner

<https://www.khanacademy.org/math/algebra/quadratics/features-of-quadratic-functions/v/rewriting-a-quadratic-function-to-find-roots-and-vertex>

Igenkänningstecken för en kvadratisk funktion med koppling till olikheter

<http://www.sosmath.com/algebra/quadraticeq/signquadra/signquadra.html>

Kvadratisk ordproblem. Projekttilförelse

<https://www.purplemath.com/modules/quadprob.htm>

Utforska trigonometriska funktioners grafer med Desmos

<https://www.desmos.com/>