

# DEL V: Litteratur & Matematik

ÅLDER: 16-18

---

## UPPGIFT 42: TRIANGULÄRA TAL I "EN GÅTFULL VÄNSKAP"

---

C.I.P. Citizens In Power



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

## Lärarguide

**Titel:** Triangulära tal i "En gåtfull vänskap" av Yoko Ogawa (2009)

**Ålder:** 16-18

**Längd:** 1.5 - 2 hours

**Matematikinhåll:** Triangulära tal

**Konstinnehåll:** Litteratur och matematik

**Mål:** Eleverna ska först se - i den inledande delen - sambanden och fördelarna med att lära sig matematik genom litteratur. De kommer sedan att identifiera en av de viktigaste böckerna inom detta område, bekanta sig med författaren och verken. Mot slutet kommer de att få möjlighet att läsa en liten del från kapitel 4 i boken "En gåtfull vänskap" och analysera några av de matematiska begreppen genom den matematiska uppgiften. Slutmålet är att arbeta med triangulära tal.

**Instruktioner:** Det är bra att följa strukturen i denna uppgift eftersom det börjar med lite enkel bakgrundsinformation om kopplingen mellan läskunnighet och matematik i allmänhet, samtidigt som man får mer detaljer och fördelar successivt. En biografi om författaren och en översikt över boken ges innan man når själva passagen i kapitel 4 i boken, relaterad till triangulära siffror och den tillhörande matematiska uppgiften.

**Resurser:** Denna uppgift ger en översikt över boken, bilder av både författaren och omslaget till boken, en youtube-trailer på filmen 'The Professor's Beloved Equation' som är baserad på boken "En gåtfull vänskap"; och den slutliga matematikuppgiften.

**Tips till läraren:** Det kommer att vara viktigt att skapa elevers intresse genom att poängtera hur litteratur är förknippad med matematik och de många fördelarna det kommer att ha, liksom det faktiska fragmentet av den givna texten, vilket kommer att hjälpa eleverna att se och förstå resonemangsdelen av en komplicerad formel, relaterad till triangulära tal, för att fullt ut förstå den och till slut tillämpa den på den matematiska uppgift som ges.

**Mål:** Eleverna ska

- bekanta dig med de triangulära talen så som de visas i texterna,

- kunna tillämpa formeln genom enkla steg baserade på avsnittet i kapitel 4 i boken och
- lösa den matematiska uppgiften.

### Utvärdering:

Som en del av en formativ bedömning (= för att förbättra uppgiften till nästa gång med utgångspunkt i elevernas bakgrund, intresse, ålder, landets kultur, elevernas förkunskaper osv.) kan läraren använda så kallade EXIT PASS antingen med en kopia som har gjorts i förväg eller helt enkelt genom att visa dessa påståenden och låta eleverna skriva svar på ett papper som de lämnar anonymt när de går ut ur klassrummet. Den specifika formativa strategin kallas 3,2,1. För fler strategier kan du besöka: <https://www.bhamcityschools.org/cms/lib/AL01001646/Centricity/Domain/131/70%20Formative%20Assessments.pdf>

3-2-1	
Skriv 3 saker du tyckte om	1. 2. 3.
Skriv 2 saker du lärt dig	1. 2.
Skriv en sak som kan förbättras	1.

## Inledning

Cohen (2013) hävdar "Att studera matematikrelaterad fiktion och poesi hjälper eleverna att utveckla en uppskattning för både matematik och litteratur och en förståelse av kopplingen mellan de två". Det finns många studier från forskare som Growney (2008, 2009), Bahls (2009), Glaz och Liang (2009), Glaz (2010, 2011) och Ivy (2004, 2009) som förklarar hur matematik kan kombineras med litteratur i klassrummen. Generellt har det visats att när matematik kopplas till konst, såsom filmvetenskap, drama och språk, har man betraktat detta som en bra strategi för att undervisa om matematik av flera skäl. Forskning har visat att en miljö som anses vara mindre stressande och mer trygg ökar elevernas inspiration och resultat (Jensen, 1998). När elever är oroliga, minskar prestationen eftersom de är upptagna med en nervös och oroande känsla och distraheras från de faktiska matematiska uppgifterna (Covington 1999). Dessa oroliga studenter kan missa mycket av den information de är avsedda att lära sig eftersom deras fokus hamnar någon annanstans och utvecklar en rädsla för matematik istället för att ta till sig den uppgift som de ska lära sig (Siegel 1999). Att använda litteratur effektivt med matematik kan bidra till att minska ångesten som elever med "mattefobi" känner (Zambo, 2005).

4

En välciterad artikel av Furner, Yahya och Duffy (2005), föreslår 20 strategier för matematikundervisning som når alla elever, och en av dessa är. Att använda litteratur i matematikundervisning innebär dessa fördelar:

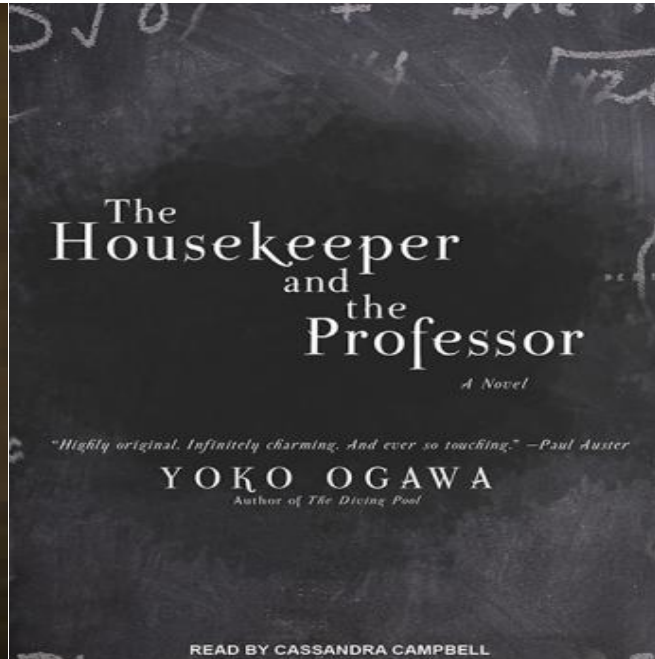
- "Lär ut matematiska begrepp i en berättelsekontext
- Inkluderar läsa, skriva, tala, lyssna och så vidare
- Utvecklar matematiskt tänkande
- Förhindrar matematikångest och skapar en lugnare klassrumsmiljö
- Tillåter olika svar
- Pekar på historiska, kulturella och praktiska samband
- Gör berättelsen levande
- Utvärderar ett barns förståelse genom att läsa/fråga

- Erbjuder ett brett utbud av böcker som kan användas för att lära ut de flesta matematiska begrepp
- Leder till problemlösning och aktivt engagemang med berättelsen
- Ger en gemensam upplevelse för studenter och lärare "(Furner et al, 2005, s. 22)

Det finns många skönlitterära böcker på flera språk som är kopplade till matematik. Nåra exempel på de mest kända är 'The Devotion of suspect X' av Keigo Higashino (2011), 'The calculus wars' av Jason Socrates Bardi (2006), 'Logicomix' av Apostolos Doxiades (2009), 'Mathematical Mysteries : The Beauty and Magic of Numbers 'av Calvin Clawson (1999) och den vi har valt för denna uppgift som är "En gåtfull vänskap" av Yoko Ogawa (2009) en bästsäljande japansk roman som också översatts till svenska.

"En gåtfull vänskap" består av 11 kapitel som handlar om flera matematiska begrepp, såsom kvadratrötter, vänskaplig tal, talteori, primtal, Gaussformel och Mersenne-primtal. Här kommer en översikt över boken att ges och sedan en uppgift relaterad till kapitel 4 och triangulära siffror.

## Biografi



**Bild 1:** Yoko Ogawa (hämtad från:  
[https://www.google.com/search?q=yoko+ogawa&client=firefox-b-d&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiMsdjB\\_ODiAhXCEVAKHX7WCOIQ\\_AUIECgB&biw=1138&bih=527#imgrc=l3mrvd3faKalvM](https://www.google.com/search?q=yoko+ogawa&client=firefox-b-d&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiMsdjB_ODiAhXCEVAKHX7WCOIQ_AUIECgB&biw=1138&bih=527#imgrc=l3mrvd3faKalvM))

**Bild 2:** Framsida av 'The housekeeper and the professor' (Bokens engelska titel)  
[https://www.google.com/search?q=the+housekeeper+and+the+professor&client=firefox-b-d&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwj41ev9\\_ODiAhUKJFAKHTTpDfKQ\\_AUIECgB&biw=1138&bih=527#imgrc=cPXLj\\_9wuxL-GM](https://www.google.com/search?q=the+housekeeper+and+the+professor&client=firefox-b-d&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwj41ev9_ODiAhUKJFAKHTTpDfKQ_AUIECgB&biw=1138&bih=527#imgrc=cPXLj_9wuxL-GM))

6

**Yoko Ogawa** föddes i Okayama, tog examen från universitetet i Waseda och bor i Ashiya, Hyōgo, med sin man och son. Sedan 1988 har Ogawa publicerat mer än fyrtio fiktiva och icke-fiktivaver. År 2006 skrev hon "En introduktion till världens mest eleganta matematik" med Masahiko Fujiwara, en matematiker, som en dialog om siffrans extraordinära skönhet. Kenzaburō Ōe har sagt, "Yoko Ogawa kan ge uttryck för de mest subtila arbeten inom mänsklig psykologi i prosa som är mild men genomträngande." Subtiliteten ligger delvis i det faktum att Ogawas karaktärer ofta inte verkar veta varför de gör vad de gör. Hon arbetar med ackumulering av detaljer, en teknik som kanske är mer framgångsrik i hennes kortare verk; den långsamma utvecklingen i de längre arbeten kräver något oväntat för att avsluta dem. Läsaren

presenteras med en akut beskrivning av vad huvudpersonerna, vanligtvis kvinnliga, observerar och känner och deras något alienerade självobservationer, av vilka några återspeglar det japanska samhället och särskilt kvinnors roller inom det. Tonen i hennes verk varierar och ibland inom de längre verken, från det surrealistiska, via det groteska och ibland groteskt humoristiska, till det psykologiskt tvetydiga och till och med utmanande. (Hotel Iris, ett av hennes längre verk, är mer sexuellt explicit än hennes andra verk och är också hennes mest översatta.)

Från Wikipedia ([https://en.wikipedia.org/wiki/Y%C5%8Dko\\_Ogawa](https://en.wikipedia.org/wiki/Y%C5%8Dko_Ogawa))

## Sammanfattning av boken “En oväntad vänskap”

Den här boken handlar om en 64-årig matematiker. Han var professor 17 år tidigare, men en bilolycka orsakade en hjärnskada och närmare bestämt den del av hjärnan som är kopplad till minnet skadades. Nu kan han bara minnas i 80 minuter, även om han kommer ihåg fakta som hände före olyckan. Hans forskningsområde är nummerteorin, men han är inte längre aktiv på grund av skadorna i hjärnan. På grund av minnesproblemen är det omöjligt för honom att ha ett normalt liv. Allt förändras snabbt. Detta problem fick honom också att lämna samhället och relationer med andra människor.

7

Professorn bor med sin svägerska, som har varit änka i många år. Hon bor i huvudhuset och han bor i ett annex. De kommer från en rik familj och får pengar från fastigheterna de äger. De har inte mycket kontakt, åtminstone inte efter olyckan. Svägerskan anställer en hushållerska för att ta hand om professorn. Hushållerskan kommer varje dag på morgonen och gör frukost, tvättar, städar och lagar mat. Hon är tjugonio år gammal, ogift men har en tio år gammal pojke. I Japan är det inte så vanligt att anställa en hushållerska. Det är vanligare i mycket rika familjer. Det är också ganska ovanligt att en kvinna får barn utan att vara gift.

Hushållerskan anländer till professorns hus för första gången i mars 1992. Boken handlar om förhållandet mellan professorn, hushållerskan och hennes son. Som

matematikprofessor har hans kärlek alltid varit siffror och det är den sak han mest bryr sig om, tillsammans till viss del med baseball, även om han inte riktigt följer resultaten. Många riktiga historier om japansk baseball citeras i boken. När hushållerskan kommer till professors hus varje morgon, kommer han inte ihåg henne. En minnesteknik som han använder är att ha en mängd anteckningar i sin jacka för att påminna om nödvändig information. En av dem handlar om hushållerskan. Varje morgon när hon kommer identifierar han henne med ansiktet på en av anteckningarna och sedan ställer han sina vanliga frågor: allt relaterat till nummer som hur gammal är du? vad är din skostorlek? och så vidare. Frågorna är alltid relaterade till siffror. Till exempel, om hon säger att hennes skostorlek är 24, säger han att det är fyra faktorer. Sedan frågar hon vad faktorer är, och han svarar, vilket är en typisk konversation dem emellan.

När professorn får reda på hushållerskans son reagerar han upprört och ber henne att ta honom till hennes hus. Så här börjar förhållandet mellan de tre personerna. Boken innehåller inget omvälvande drama. Men varje liten sak i professors liv är konstigt och svårt för människorna omkring honom på grund av hans minnesproblem. Förutom hans minnesproblem är hans besatthet av tal, särskilt primtal, så stark att hans liv tenderar att bli något komiskt eller besvärligt. Professorn berättar många historier om matematik och tal för hushållerskan och hennes son. En av deras favorit historier är den berömda Eulers formel,  $e^{\pi i} = -1$ . De kände till  $\pi$  men visste inte  $i$  and  $e$  så jag tror inte att de verkligen förstått betydelsen av formeln antog professorn.

8



The Professor's Beloved Equation är en japansk film som kom 21 januari 2006 och är regisserad av Takashi Koizumi. Den är baserad på romanen En gåtfull vänskap. Trailern finns på <https://www.youtube.com/watch?v=pOV-jadkgAw>



Utdrag från kapitel 4<sup>1</sup>

Det räckte med två stygn för att sy ihop såret. Doktorn och jag satt i den mörka korridoren och väntade, medan de undersökte om senan var skadad. Kliniken var gammal, och man blev nedslagen bara av att sitta där. Taket hade mörknat, inneskorna för besökare var smutsiga och klibbiga, och alla anslag på väggarna om vaccineringsråd och kurser i amningsavvänjning var gulnade. Det enda ljuset kring oss var ett svagt sken från röntgenrummets lampa. Det gällde bara en rutinundersökning för säkerhets skull, men Roten hade varit inne riktigt länge i undersökningsrummet.

»Känner du till triangeltal?« sa doktorn och pekade på en triangel, som väl var en varning för röntgenstrålar eller något, på dörren till röntgenrummet.

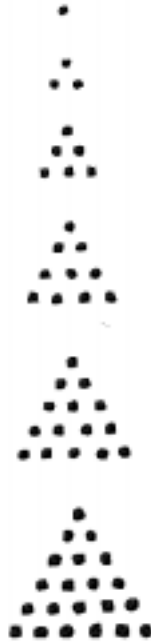
»Nej«, svarade jag. Att han började prata om matematik var ett bevis för att han innerst inne fortfarande var mycket ängslig, även om den upprördhet han först känt såg ut att ha dämpats.

---

<sup>1</sup> Från Ogawa, Y (2011) *En gåtfull vänskap*. Stockholm: Bonniers Övers. Vibeke Emond

»Det är faktiskt mycket eleganta tal.«

Doktorn började rita en rad trianglar bestående av svarta prickar på baksidan av ett frågeformulär, som han plockat till sig vid receptionen.



10

»Vad säger du om det?«

»Tja ... det ser ut som ved som travats upp av någon mycket metodisk person ... eller uppräddade svarta bönor ...«

»Ja, just det. En metodisk person, det är en

viktig aspekt. En i den första raden. Två i den andra raden. Tre i den tredje raden... Trianglarna är konstruerade på enklast tänkbara vis.»

Jag tittade på trianglarna. Doktors hand darrade en aning. De svarta prickarna såg ut att flyta upp i halvmörkret.

»Låt oss nu räkna efter hur många svarta prickar det finns i varje triangel: 1, 3, 6, 10, 15, 21. Om vi skriver upp det som formler, får vi:

$$1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Det innebär att ett triangeltal, vare sig det vill det eller ej, är ett uttryck för summan av de naturliga talen från 1 till ett visst tal. Om vi sätter ihop två trianglar till en kommer vi ännu en bit längre. Det är tröttsamt att rita för många prickar, så vi kan väl ta det fjärde triangeltalet 10, eller hur?»



Trots att det inte var kallt skakade doktors hand mer och mer, och de svarta prickarna blev sneda och oregelbundna. Han koncentrerade all sin uppmärksamhet på pennspetsen. Alla minneslapparna på hans kostym var fläckade av blod, och det gick inte längre att tyda det som stod på dem.

»Är du med? Titta noga på det här! När vi satte ihop den fjärde triangeln med en annan likadan, fick vi en rektangel med fyra svarta prickar vertikalt och fem svarta prickar horisontellt. Det sammanlagda antalet svarta prickar i den rektangeln är  $4 \times 5 = 20$ . Förstår du? Om vi nu halverar den igen, får vi  $20 / 2 = 10$ , det vill säga summan av de naturliga talen från 1 till 4. Man kan också betrakta varje rad i rektangeln, och då blir det så här:

$$\begin{array}{rcccc}
 1 & 2 & 3 & 4 \\
 + & + & + & + \\
 4 & 3 & 2 & 1 \\
 \hline
 5 & 5 & 5 & 5
 \end{array}$$

Med samma metod kan man genast få fram det tionde triangeltalet, det vill säga summan av de naturliga talen från 1 till 10, eller det hundraed triangeltalet.

Från 1 till 10 blir det:

$$\frac{10 \times 11}{2} = 55$$

Från 1 till 100 blir det:

$$\frac{100 \times 101}{2} = 5\,050$$

Från 1 till 1 000 blir det:

$$\frac{1000 \times 1001}{2} = 500\,500$$

Från 1 till 10 000 blir det ...»

Jag märkte att doktorn grät. Blyertspennan föll ur handen på honom och rullade ner till hans fötter. Det måste ha varit första gången jag såg honom gråta, men jag fick ändå en illusion av att jag ett otal gånger hade kommit i kontakt med samma gestalt. Det kändes som om jag sedan långa tider tillbaka stått på det här viset framför svaga snyftningar utan att kunna göra någonting annat än att bara stå där alldeles stilla. Jag la min hand på hans.

»Förstår du? Man kan få fram summorna av de naturliga talen.«

»Javisst förstår jag.«

»Man radar upp de svarta bönorna i trianglar. Det är det hela.«

»Ja, just det.«

»Förstår du verkligen det jag sa?«

»Det är ingen fara. Det finns inget att oroa sig för. Gråt inte mer, är ni snäll! Triangeltalen är ju så vackra«, sa jag.

Just då kom Roten ut från undersökningsrummet.

»Titta här! Jag mår bra!« sa han och viftade

energiskt med sin bandageinlindade vänsterhand.

# Matematiken bakom “En gåfull vänskap”

## Ordlista

**Primtal:** Ett primtal är ett heltal större än 1 vars enda faktorer är 1 och sig själv. En faktor är ett heltal som kan delas jämnt in i ett annat nummer. De första primtalen är 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 och 29. Siffror som har mer än två faktorer kallas sammansatta siffror. Talet 1 är varken prim eller sammansatt.

**Talteori:** Talteori (eller aritmetik eller högre aritmetik i äldre användning) är en gren av ren matematik som huvudsakligen ägnas åt att studera heltal. Den tyska matematikern Carl Friedrich Gauss (1777–1855) sa: "Matematik är vetenskapens drottning - och talteori är matematikens drottning." Talteoretiker studerar primtal och egenskaper hos objekt gjorda av heltal (till exempel rationella tal) eller definierade som generaliseringar av heltal (till exempel algebraiska heltal).

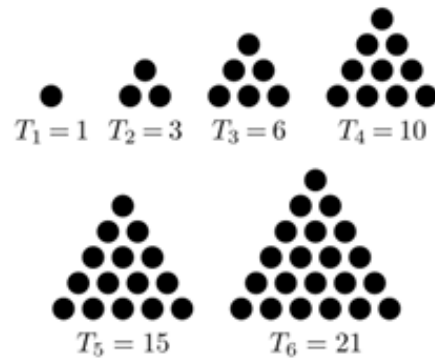
**Triangulärt tal:** är ett tal som är summan av alla naturliga tal i ett intervall som börjar med ett. Som exempel är 10 ett triangeltal genom att det är summan av alla tal i intervallet 1 - 4, det vill säga lika med  $1 + 2 + 3 + 4$ . Namnet kommer av att man kan bilda trianglar eller "trappor", där varje sida innehåller lika många element.

15

Ett "triangulärt tal" eller "triangeltal" räknar objekt arrangerade i en liksidig triangel. Det  $n$ :e triangulära talet är antalet prickar i det triangulära arrangemanget med  $n$  prickar på en sida och är lika med summan av de  $n$  naturliga siffrorna från 1 till  $n$ .

Det  $n$ :e triangulära talet uttrycks som  $T_n$ .

De första sex triangulära talen visas nedan:



Till exempel:  $T_3=6$  där  $n=3$  är storleken på triangelns sida, där 6 är antalet prickar som behövs för att triangeln ska visas.

Du kan använda en uttrycklig formel för att uppskatta ett triangulärt tal; formeln anges nedan:

$$T_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$





## UPPGIFT

- (a) Använd formeln ovan för att uppskatta triangulärtalen  $T_4$  och  $T_5$
- (b) Uppskatta antalet prickar såväl som längden på det triangulära arrangemanget för  $T_4$  och  $T_5$
- (c) Gör de triangulära arrangemangen för  $T_4$  och  $T_5$
- (d) Uppskatta summan av  $T_4+T_5$
- (e) Bevisa att summan av två på varandra följande triangulära tal alltid är en kvadrat (perfekt kvadrat)
- (f) Återspeglar resultaten av (d) vad som hade bevisats i (e)?

## LÄR DIG MER...

Om du vill veta mer om det som finns i denna uppgift kan du kolla in följande länkar

### Texter som nämnts i introduktionen:

Cohen, M. D. (2013). *Truth & beauty: Mathematics in literature*. (No. 106).

Mathematics Teacher. Hämtad från:

<http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&AuthType=ip,sso&db=eric&AN=EJ1018180&site=eds-live&custid=s1098328>

<http://www.nctm.org/publications/article.aspx?id=35612>

Furner, J. M., Yahya, N., & Duffy, M. L. (2005). Teach mathematics: Strategies to reach all students. *Intervention in School and Clinic*, 41, 16–23.

Zambo, R. (2005). The Power of Two: Linking Mathematics and Literature.

*Mathematics Teaching in the Middle School*, 10(8), 394-399. Hämtad från:

<http://www.jstor.org/stable/41182121>

18

### Bokrecension:

<https://www.ams.org/notices/201005/rtx100500635p.pdf?fbclid=IwAR1pCMwgeYrT42v-crjS43ttgGchjpaoOK3q4lGmrcNxyaxlNEqOWFEUMjY>

### Ordlista, Triangulära tal:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Triangular\\_number?fbclid=IwAR03qFwv1dxaBAIXkdh\\_gAmGALDjdL5Evr448uJyAVAZueMYTHD-CAjocLI](https://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_number?fbclid=IwAR03qFwv1dxaBAIXkdh_gAmGALDjdL5Evr448uJyAVAZueMYTHD-CAjocLI)

### Boken (En gåtfull vänskap) på engelska:

<https://ibaracaldo.files.wordpress.com/2013/06/ogawa-yoko-the-housekeeper-and-the-professor.pdf>