

DEL IV: Film & Matematik

ÅLDER: 16-18

UPPGIFT 41: DERIVATA AV EN FUNKTIONEN I FILMEN “DOLDA TILLGÅNGAR”

C.I.P. Citizens In Power



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Educator's Guide

Titel: Derivata av en funktionen i filmen "Dolda tillgångar"

Ålder: 16-18 år

Längd: 1 timme

Matematikinnehåll: Eulers stegmetod, derivata

Konstinnehåll: Film.

Mål: I en avslappnad miljö ska eleverna bekanta sig med begrepp både inom och utanför det matematiska området. Bara genom att se trailern kommer eleverna att ta del av det enorma bidraget färgade kvinnor i USA gjorde i början av 1900-talet i att skapa historia. I slutändan kommer eleverna också att öva några matematiska begrepp från algebra, nämligen definitionen av derivata.

Instruktioner: Börja med att studera bilderna av de tre kvinnliga huvudpersonerna och läsa om dem. Filmens handling kan läsas individuellt av varje elev eller högt i klassen innan man ser filmen. Läraren kan sedan ta upp både sociala frågor (som också kort nämns i inledningen) och matematiska problem; t.ex. fråga eleverna vad de anser vara matematikens roll i rymdvetenskap. Därefter finns det två uppgifter mot slutet: den första kan göras som läxa där eleverna ska lära sig mer om en betydande matematiker som heter Leonhard Euler; och Uppgift 2 är en matematisk övning baserad på begreppet derivata.

Resurser: Biografi om de tre kvinnliga huvudpersonerna, trailern till filmen, några bilder och två uppgifter.

Tips till läraren: Det är viktigt att visa eleverna trailern i början för att fånga elevernas uppmärksamhet. Det är också avgörande att betona både den sociologiska ståndpunkten i filmen (att presentera retorik, mod, uthållighet, hängivenhet för så kallade "kvinnliga datorer", genom att kombinera hårt arbete och att ha en familj), men också andra frågor som nämns tidigare, till exempel det hinder det innebär att vara kvinna och afroamerikan vid den tiden i USA.

Mål:

- Att inse att matematik - från dess enklaste form till dess mer komplicerade är viktigt, inte bara för våra vardagsliv utan också står för de största

prestationerna i mänsklig historia, gjorda kända genom denna film, såsom resor ut i rymden, och säkra återvändanden.

- Att kunna använda formeln för att uppskatta derivata av en funktion

Utvärdering:

Som en del av en formativ bedömning (= för att förbättra uppgiften till nästa gång med utgångspunkt i elevernas bakgrund, intresse, ålder, landets kultur, elevernas förkunskaper osv.) kan läraren använda så kallade EXIT PASS antingen med en kopia som har gjorts i förväg eller helt enkelt genom att visa dessa påståenden och låta eleverna skriva svar på ett papper som de lämnar anonymt när de går ut ur klassrummet. Den specifika formativa strategin kallas 3,2,1. För fler strategier kan du besöka: <https://www.bhamcityschools.org/cms/lib/AL01001646/Centricity/Domain/131/70%20Formative%20Assessments.pdf>

3-2-1	
Skriv 3 saker du tyckte om	1. 2. 3.
Skriv 2 saker du lärt dig	1. 2.
Skriv en sak som kan förbättras	1.

Inledning

Enligt Polster (2012) finns det mer än 700 matematikfilmer, även om vissa är mer relaterade till matematik än andra. De kan ses om ett roligt inslag i undervisningen och kan användas till kurser i ett försök att göra matematiklärandet mer intressant. Till denna uppgift har en ny film (2016) som kallas "Dolda tillgångar" valts av flera skäl.

En av orsakerna är dess sociala budskap om kvinnors och färgades rättigheter i början av 1900-talet. Många diskussioner ur flera aspekter kan ta sin start från den här filmen (kanske enbart genom att titta på trailern för filmen; via länken som ges senare i det här verktyget). Några av dessa sociologiska frågor är ras, kön, kombination av familj och karriär, skillnaderna (om några) mellan nu och då, mellan länder etc.

För det andra kan den leda till diskussioner och små projekt om matematikern Leonhard Euler, vars metoder (som ursprungligen användes i ett annat fält) var användbara och användes inom rymdvetenskap, som visas i den här filmen.

För det tredje, som Kirk Long (2017) konstaterat, blir det i den här filmen uppenbart att matematik finns överallt, och elever faktiskt bör bry sig om den. Man förstår att man kan träna en hjärna i matematik och därmed se sambanden mellan saker som annars missas, precis som en av de tre kvinnorna, Johnson, gör i "Dolda tillgångar".

4

Biografier



Bild 1: Katherine Johnson¹

Bild 2: Mary Jackson²

Bild 3: Dorothy Johnson Vaughan³

Katherine Coleman Goble Johnson (26 augusti 1918 - 24 februari 2020) var en afroamerikansk matematiker vars beräkningar av omloppsmekanik som NASA-ansluttad var avgörande för att den första och efterföljande amerikanska bemannade rymdflygningen skulle lyckas. Under sin 35-åriga karriär på NASA och dess föregångare, National Advisory Committee for Aeronautics, fick hon ett rykte om sig att behärska komplexa manuella beräkningar och fick NASA att börja använda datorer för att utföra uppgifterna.

5

Johnsons arbete inkluderade beräkning av banor, startfönster och nödåtervägar för Project Mercurys rymdflygningar, inklusive astronauterna Alan Shepards, den första

¹ (Retrieved from: https://www.google.com/search?q=Katherine+Johnson&client=firefox-b-d&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwi_mL_0xOPiAhVQ_KQKHcSpB0EQ_AUIECaB&biw=1138&bih=527#imgrc=0jKkzCQCTbceSM:

² Retrieved from: https://www.google.com/search?q=Dorothy+Vaughan&client=firefox-b-d&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwins5aZxuPiAhUoMewKHVNHCAYQ_AUIECaB&biw=1138&bih=527#imgrc=6SovmvarwMjx0M:

³ Retrieved from: https://www.google.com/search?q=Mary+Jackson&client=firefox-b-d&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiX56KGx-PiAhWPbVAKHTL6Bf0Q_AUIECaB&biw=1138&bih=527#imgrc=pRLcd_QFW-XXhM:

amerikanen i rymden, och John Glenn, den första amerikanen i omloppsbanan, och mötesvägar för Apollo-månlandaren och kommandot för månresor. Hennes beräkningar var också viktiga för början av rymdprogrammet, och hon arbetade med planer för ett uppdrag till Mars. 2015 delade president Barack Obama ut presidentens medalj för frihet till Johnson.

Från Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Katherine_Johnson

Dorothy Johnson Vaughan (20 september 1910 - 10 november 2008) var en afroamerikansk matematiker som arbetade för National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) och NASA vid Langley Research Center i Hampton, Virginia. 1949 blev hon tillförordnad handledare vid West Area Computers, den första afroamerikanska kvinnan som övervakade en grupp medarbetare vid centrumet. Hon blev senare officiellt befordrad till befattningen. Under sin 28-åriga karriär förberedde Vaughan sig för införandet av maskindatorer i början av 1960-talet genom att lära sig själv och sin personal FORTRANS programmeringsspråk; senare ledde hon programmeringsavdelningen för analys- och beräkningsavdelningen (ACD) på Langley.

Från Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Dorothy_Vaughan

Mary Jackson (9 april 1921 - 11 februari 2005) var en afroamerikansk matematiker och flyg- och rymdingenjör vid National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), som 1958 blev National Aeronautics and Space Administration (NASA). Hon arbetade på Langley Research Center i Hampton, Virginia, under större delen av sin karriär. Hon började som räknare på det segregerade West Area Computing-divisionen. Hon tog avancerade ingenjörskurser och blev 1958 NASA:s första svarta kvinnliga ingenjör. Efter 34 år på NASA hade Jackson förtjänat den finaste ingenjörstitel som finns. Hon insåg att hon inte kunde komma längre utan att bli handledare. Hon accepterade en inbjudan att bli chef för både Federal Women's Program, i NASA Office of Equal Opportunity Programs och i Affirmative Action Program. I denna roll arbetade hon för att påverka både anställning och marknadsföring av kvinnor i NASA:s vetenskap, teknik och matematikkarriär.

Från Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Mary_Jackson_\(engineer\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Mary_Jackson_(engineer))

Handling i filmen “Dolda tillgångar”

Filmen "Dolda tillgångar" berättar den otroliga historien om Katherine Jonson (spelad av Taraji P. Henson), Dorothy Vaughan (Octavia Spencer) och Mary Jackson (Janelle Monae) - tre smarta afroamerikanska kvinnor som arbetade på NASA och var hjärnorna bakom planeringen till astronaut John Glenns omloppsbanda, en spektakulär prestation som fick spelet om rymden att vända. Den visionära trion korsade alla köns- och raslinjer och inspirerade generationer.

Historien utspelas vid en tidpunkt då USA tävlade mot Sovjetunionen om att få ut en människa i rymden. NASA hittade en lämplig person i en grupp afroamerikanska kvinnliga matematiker som blev hjärnorna bakom en av de största operationerna i USA:s historia. Baserat på de sanna livshistorierna för dessa tre kvinnor, som kom att bli kända som "männsliga datorer", ser vi hur snabbt de höjde NASA:s status i uppdraget att beräkna astronaut John Glenns omloppsbanda, och garantera hans säkra återkomst. Dorothy Vaughan, Mary Jackson och Katherine Gobels Johnson blev ihågkomna som sanna amerikanska hjältar med sin glans och önskan att drömma stort. De har åstadkommit något nytt för mänskligheten.

7

(Källa: <https://www.imdb.com/title/tt4846340/plotsummary>)



Filmtrailer:

<https://www.youtube.com/watch?v=5wfrDhgUMGI>

Matematiken i filmen



I denna länk kan du bekanta dig med matematikinnehållet i filmen:

https://www.youtube.com/watch?v=v-pbGAts_Fg

Det första problemet var att för att få Amerika till månen behövdes en större raket. Utöver detta behövdes också nya banor eftersom de fram till dess enbart sköt upp raketer och hoppades på det bästa. Således ansågs nya typer av matematik vara viktiga för att modellera dessa banor. Naturligtvis är många variabler involverade i denna typ av ekvationer, och de är taktiskt mycket svåra att uppskatta enligt de specifikationer som både militären och astronauterna efterfrågade. Även minsta fel i beräkningarna när man ska bromsa rymdskeppet för att börja sin återkomst till atmosfären skulle kunna resultera i att den brinner upp, och marinen krävde att NASA skulle kunna sätta ned kapseln inom en 40 kvadratkilometer stor yta av havet. Katherine Johnsons kunskaper var centrala för att ta reda på hur man skulle lösa detta problem och visar därmed en av anledningarna till att matematik är viktigt.

8

I filmen får hon ett snilleblix medan hon stirrar på en tavla och inser att "gammal matematik" kan vara nyckeln. Hon vänder sig till Eulers metod som, enkelt uttryckt, gör det möjligt för matematiker att uppskatta en differentialekvation numeriskt utan att egentligen någonsin lösa den. Det är en mödosam process, men den här processen (och andra som filosofiskt liknar den) är det som driver våra dators matematiska hjärnor idag - något Dorothy Vaughan hjälpte till att implementera mot slutet av filmen när hon använde den jättelika tidiga IBM-datorn för att kontrollera sina och andra datorers beräkningar.

Johnson visar det mest grundläggande skälet till att matematik är viktig för våra liv, och det är för att den är sammankopplad och sammanflätad i allting. Även om Euler använde den metoden i ett annat sammanhang visade det sig här vara viktigt att användas för att sätta människan på månen. På samma sätt är det inte bara viktigt

för rymdforskare att lösa dessa ekvationer - de har möjliggjort stora framsteg inom nästan alla områden, från bättre patientvård till självkörande bilar.

Några formler

Eulers stegmetod är en metod inom numerisk analys för att lösa ordinära differentialekvationer med ett givet initialvärde. Det är den enklaste och tydligaste metoden för att lösa vanliga differentialekvationer numeriskt. Helhetsförståelse för metoden är ganska svår och räknas som universitetsmatematik. Det kräver full förståelse för derivata.

Derivata av en funktion av en reell variabel mäter känsligheten för förändring av utgångsvärdet med avseende på en förändring i dess ingångsvärde. Derivata är ett grundläggande verktyg för beräkningen. Exempelvis är derivata av positionen för ett rörligt objekt med avseende på tid objektets hastighet: detta mäter hur snabbt objektets position ändras när tiden går framåt.

Derivata av en funktion av en enda variabel vid ett valt ingångsvärde, när det finns, är **lutningen för tangentlinjen** till grafen för funktionen vid den punkten (punkt P i bilden nedan). Tangentlinjen är den bästa linjära approximationen av funktionen nära det ingångsvärdet. Av detta skäl beskrivs ofta derivata som "omedelbar förändringshastighet", förhållandet mellan den omedelbara förändringen i den beroende variabeln och förändringen för den oberoende variabeln.

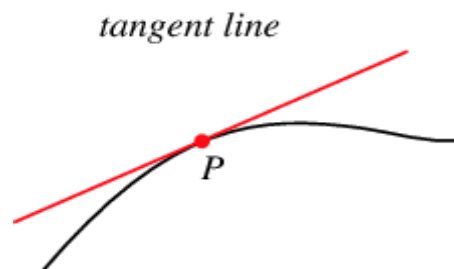
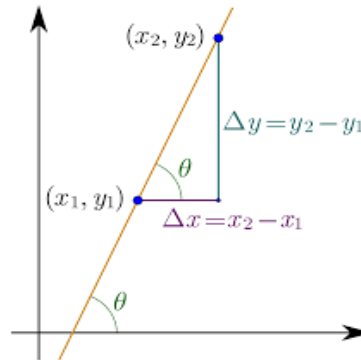


Bild 4: Derivata av funktionen vid punkt P är lutningen på tangentlinjen (i rött) till grafen för funktionen (i svart) vid denna specifika punkt.

Följaktligen är funktionen starkt kopplad till formeln som förklarar lutningen.

$$\text{Slope} = \frac{\text{change in } Y}{\text{change in } X} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

10

Formeln bygger på att vi antar att det sker en förändring i x-axeln från punkt x till punkt $(x + \Delta x)$, med en samtidig ändring i y-axeln, från $f(x)$ till $f(x + \Delta x)$.

Den grekiska bokstaven Δ används när vi vill visa att denna förändring är mycket liten. Formeln antyder att vi uppskattar denna gräns när Δx går mot 0.

Eulers stegmetod: Eulers stegmetod är en numerisk metod för att lösa första ordningens förstgradsdifferentialkvationer med ett givet initialvärde. Det är den enklaste och tydligaste metoden för numerisk integration av vanliga differentialekvationer och är den enklaste Runge – Kutta-metoden. Euler-metoden är uppkallad efter Leonhard Euler, som behandlade den i sin bok *Institutionum calculi integralis* (publicerad 1768–1870). Euler-metoden är en första ordningens metod, vilket innebär att det initiala felet (fel per steg) är proportionellt mot kvadraten av stegstorleken och det globala felet (fel vid en viss tidpunkt) är proportionellt mot

stegstorleken. Euler-metoden fungerar ofta som grund för att konstruera mer komplexa metoder, t.ex. prediktor-korrigeringsmetoden.



Bild 5: Katherine Johnson (spelad av Taraji P. Henson) beräknar infogningsbanor för Mercury-programmet med hjälp av Eulers metod i den här scenen från filmen Dolda tillgångar.⁴

⁴ Credit: TM och © 2017 Twentieth Century Fox Film Corporation. All rights reserved. Hämtad från: <https://www.startalkradio.net/the-math-behind-hidden-figures-why-stem-is-important-and-math-is-everywhere/>

UPPGIFTER

UPPGIFT 1

Eftersom mycket av matematiken bakom den här filmen är baserad på arbetet som en av matematikens mest berömda rockstjärna, Leonhard Euler, har gjort ska du göra en liten undersökning och sedan en presentation med 5-7 bilder som presenterar denna välkända matematikpersonlighet.

UPPGIFT 2

Använd formeln som uppskattar derivata för en funktion för att bevisa att derivatan av x^2 är $2x$.

LÄR DIG MER...

Om du vill veta mer om det som behandlas i denna uppgift kan du se följande länk:

20th Century Fox:

<http://www.foxmovies.com/movies/hidden-figures>