

DEL IV: Film & Matematik

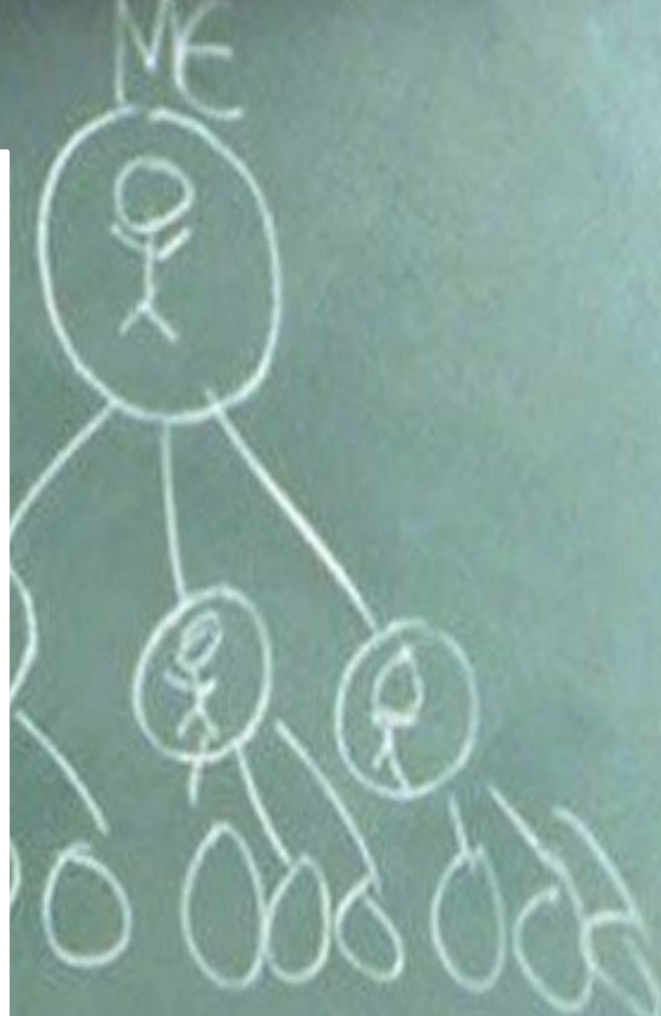
ÅLDER: 16 – 18

(Source: <https://cinemaplanet.pt/pay-it-forward-boa-acao-vez/>)

Pay It Forward Infographic.

UPPGIFT 39: EXPONENTIELL TILLVÄXT I FILMEN “PAY IT FORWARD”

SPEL – Sociedade Promotora de
Estabelecimentos de Ensino



The Art of
Maths



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Lärarguide

Titel: Exponentiell tillväxt i filmen "Pay it Forward"

Ålder: 16 –18 år

Längd: 2 timmar

Matematikinnehåll: Exponent, exponentiella funktioner, exponentiell tillväxt, exponentiellt avtagande.

Konstinnehåll: Exponentiell modell

Allmänna mål: Att studera och analysera verkliga exempel på exponentiell tillväxt och avtagande samt att kartlägga exponentiella ekvationer och funktioner.

Instruktioner: Visa trailern för filmen Pay it Forward (se länk under rubriken "Lär dig mer") och föreslå för elever att se hela filmen hemma;

Resurser: Penna och miniräknare.

Tips till läraren: För att hjälpa eleverna att förstå resultaten från graferna, låt dem testa olika värden och göra grafiska framställningar av dessa.

Mål: I slutet av denna uppgift ska eleven kunna:

- känna igen och lösa problem som involverar tillämpning av exponentiella funktioner, och även en grafisk representation som sannolikt representerar en exponentiell funktion;
- använda exponentregler för att arbeta med exponentiella funktioner och framställa dessa grafiskt.

2

Utvärdering:

Skriv 3 saker du gillar med denna uppgift:	1. 2. 3.
Skriv 2 saker du lärt dig	1. 2.
Skriv en sak som behöver bli bättre	1.

Inledning

Ibland hittar vi matematik i tv-serier eller filmer. Ofta är dessa matematiska begrepp inte så viktiga, eftersom de inte påverkar själva berättelsen. Det finns dock några fall där de gör det.

Några exempel är: "21" (USA, 2008), av Robert Luketic; "Proof" (USA, 2005), av John Madden; "A Beautiful Mind" (USA, 2001), av Ron Howard; "Enigma" (USA, 2001), av Michael Apted; "Pi" (USA, 1988), av Darren Aronofsky; "Good Will Hunting" (USA, 1997), av Gus Van Sant och "Cube" (Canada, 1997), av Vincenzo Natali.

I denna uppgift kommer filmen "Pay it forward" (USA, 2000), av Mimi Leder, att diskuteras och matematiska begrepp som finns med i filmen, såsom exponentiell tillväxt, kommer att behandlas.

Efter en uppgift i samhällskunskap om att förändra världen till det bättre, startar den 12-årige eleven Trevor McKinney (spelad av Haley Joel Osment) en rörelse som består i att göra en god handling för tre personer som istället för att betala tillbaka tjänsten ska "föra den vidare" (pay it forward) genom att göra en tjänst för tre andra människor.

När han försöker förändra världen utlöser Trevor så småningom en serie händelser som kan representeras som en exponentiell modell, vilket innebär att dessa rörelser uppfyller de krav som krävs för att växa med en exponentiell hastighet över tid.

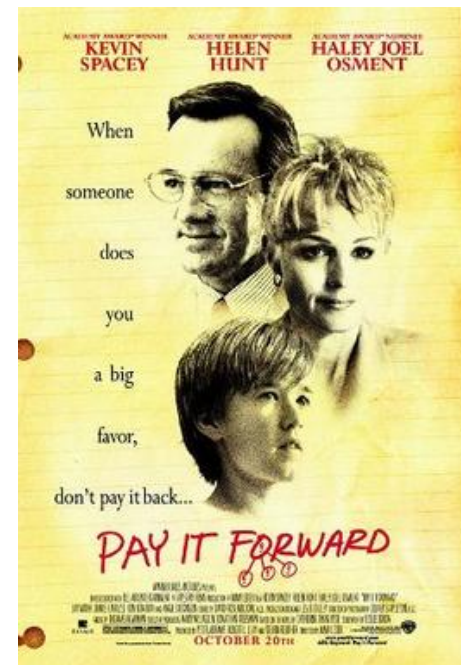


Bild 1 – Pay it Forward (2000) filmposter
(Källa: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pay_It_Forward_\(film\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pay_It_Forward_(film)))

4

Den exponentiella modellen förknippas med den brittiska ekonomen Thomas Robert Malthus (1766-1834), som först märkte att alla djurarter potentiellt skulle kunna växa enligt en geometrisk serie. Idén om exponentiella funktioner kommer av denna upptäckt.

I matematik är exponentiella funktioner funktioner som växer med vanliga faktorer över lika stora intervaller. Denna tillväxt kan resultera i en ökning eller minskning av värdet, vilket därför kallas exponentiell tillväxt respektive exponentiellt avtagande.

På lång sikt blir tillväxten eller avtagandet ohållbart, eftersom näringsämnen eller resurserna kommer att ta slut och tillväxten/avtagandet kommer att stoppa. Trots detta används ofta exponentiella funktioner för att förutsäga resultat inom näringsliv, vetenskap och sociologi och kan även ses i naturen.

Ordlista

Exponent: motsvarar den upprepade multiplikationen av en bas "n": det vill säga produkten av $b \cdot n$ är multiplikationen av basen (b) "n" gånger; kallas "b upp till potensen av n" eller "b upp till den n:e potensen".

Exponentiell funktion: en funktion av typen $f(x) = a \cdot b^x$, där resultatet förändras exponentiellt när x ökar.

Exponentiellt avtagande: ett koncept som används när ett värde minskar proportionellt med en konstant hastighet under en period.

Exponentiell tillväxt: ett koncept som används när ett värde ökar proportionellt med en konstant takt över en period.

Faktor: ett tal som, delat med ett annat tal, resulterar i ett heltal - dvs utan decimaler.

Matematiken bakom Pay it Forward

1. Exponentiella funktioner

Exponentiella funktioner kännetecknas av att de **har ett värde som växer baserat på en gemensam faktor under en viss period**, oavsett om det är en ökning eller en minskning av ett visst värde.

En exponentiell funktion skrivs som:

Exponential function

$$y = a^x$$

Där:

a = ingångsvärdet innan förändringen och **> 0**

x = en variabel som motsvarar antalet tidsintervall som passerat.

I filmen "Pay it Forward" startar Trevor en rörelse som kan utlösa handlingar som skulle tredubblas exponentiellt.

6

Vi tittar på tabellen nedan och analyserar tänkbara påverkan genom att tänka på att varje person som har varit involverad i rörelsen för varje dag kommer att fortsätta sin process genom att göra en god gärning till 3 andra personer:

Dag	Antal människor	Mönster
1	$3 = 3$	$y = 3^1$
2	$9 = 3 \times (3)$	$y = 3^2$
3	$27 = 3 \times (3 \times 3)$	$y = 3^3$
4	$81 = 3 \times (3 \times 3 \times 3)$	$y = 3^4$
5	$243 = 3 \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$	$y = 3^5$

Den första dagen gör Trevor 3 goda gärningar till 3 olika människor; Den andra dagen gör var och en av de tre personerna ytterligare 3 goda gärningar till 3 andra personer, vilket gör totalt 9 (3×3). Den 5:e dagen kommer 243 personer ($3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$) att ha varit inblandade. Med andra ord tredubblas antalet varje dag!

Denna förändring kan beskrivas grafiskt enligt följande:

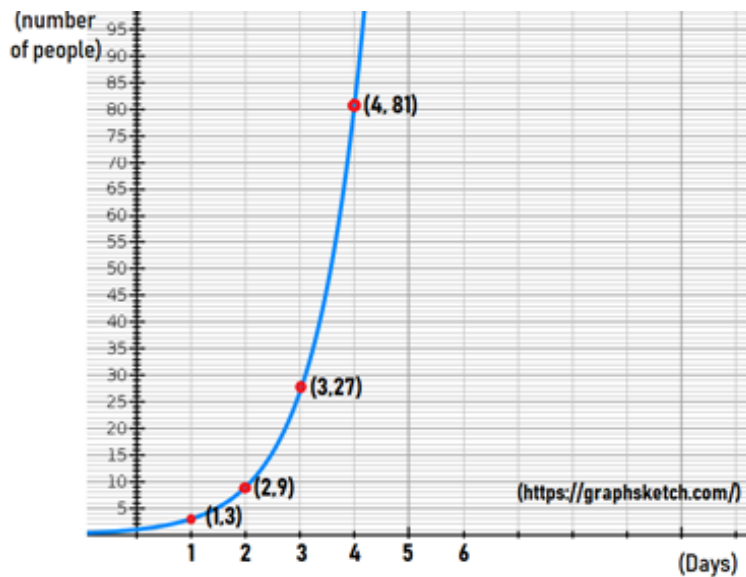


Bild 2 – Uppskattning av antal människor som är inblandade i Trevors rörelse (Source: Made by Author on graphsketch.com)

Exponentiell tillväxt och avtagande

We have seen that exponential functions grow by common factors. However, if we want to introduce decimals instead, then Exponential Growth and Exponential Decay functions have to be invoked. Vi har sett hur exponentiella funktioner växer av vanliga faktorer. Men om vi istället vill använda decimaler, måste funktioner för exponentiell tillväxt (Exponential Growth) och exponentiellt avtagande (Exponential Decay) användas:

7

Exponential Growth

$$y = a(1 + r)^x$$

Exponential Decay

$$y = a(1 - r)^x$$

- Där:** **a** = **ingångsvärdet** innan man börjar mäta förändring;
r = den konstanta **hastigheten** som ingångsvärdet kommer att förändras; representeras vanligtvis i procent och uttrycks som en decimal;
x = en variabel exponent som motsvarar antalet tidsintervall som har gått.
- När:** **a > 0** och **r > 0**, är det en exponentiell tillväxt;
a > 0 och **0 < r < 1**, är det ett exponentiellt avtagande.

Exponentiell tillväxt används ofta för att förutsäga tillväxten av en befolkning eller en ränteförändring. Till exempel, säg att det finns en befolkning på 2579 personer i en närliggande liten stad, och att det varje år är en tillväxt på 12%. **Hur många personer skulle det finnas efter 5 år?**

Vi modellerar funktionen enligt frågan. Vi vet att:

- 1) 2579 är vår utgångspunkt;
- 2) Det är en tillväxt på 12% eller 0,12 per år;

Så funktionen som kommer att användas är $P(5) = 2579(1 + 0,12)^5$, där "P(5)" motsvarar befolkningen på 5 år.

Beräkningen blir:

$$P(5) = 2579(1 + 0,12)^5 \Leftrightarrow P(5) = 2579(1,12)^5 \Leftrightarrow P(5) = 4545$$

Svar: Om 5 år kommer befolkning uppgå till uppskattningsvis 4545 personer.

8

Ett annat sammanhang där exponentiella funktioner tillämpas är i fysik.

Radioaktiva ämnen har atomer med instabil kärna som avtar naturligt. I det här fallet används exponentiellt avtagande för att förutsäga hur länge ett ämne kommer att vara kvar eller kvar efter en period.

Tänk ett prov på 10 mg av ämnet YXZ som sönderfaller 3% per år. **Hur mycket av provet skulle finnas kvar efter 8 år?**

Vi modellerar funktionen enligt frågan. Vi vet att:

- 1) Vi börjar med 10 mg;
- 2) Avtagandet är 3% eller 0,03 per år;

Så funktionen som kommer att användas är $P(8) = 10(1 - 0,03)^8$, där "P (8)" motsvarar det belopp som kommer att finnas kvar efter 8 år har gått.

Beräkningen blir:

$$P(8) = 10(1 - 0,03)^8 \Leftrightarrow P(8) = 10(0,97)^8 \Leftrightarrow P(8) = \sim 7,83$$

Svar: Efter 8 år, kommer det att vara ungefär 7,83mg av ämnet YXZ kvar.

UPPGIFTER



UPPGIFT 1

Bakterier är enkelcellsmikrober som reproduceras genom att delas upp i två celler. Tänk en population på 20 celler som fördubblas varje minut.

- 1.1) Skapa en tabell med värden och beräkna hur många celler det skulle finnas efter en period av 4 timmar.

- 1.2) Visa förändringen grafiskt.



UPPGIFT 2

Antag att du investerar 20 000 kr med en månadsränta som ger 1,5% avkastning.

- 2.1) Vad skulle ditt saldo vara efter ett halvt år? Hitta den exponentiella tillväxtfunktionen och beräkna den.

10



UPPGIFT 3

I den tidigare uppskattningen av personer som var involverade i rörelsen som Trevor startade har vi sett att vid dag 4, om det var oavbrutet, skulle det ha varit 81 personer involverade.

Antag att rörelsen av någon anledning i slutet av dag 4 skulle avbrytas under 5 dagar och att för var och en av dessa 5 dagar skulle det bli en minskning med 10% av folket som skulle föra goda gärningar vidare när rörelsen återupptogs.

- 3.1) Hur många personer skulle vara kvar för att återuppta rörelsen vid slutet av dag 9? Hitta den exponentiella avtagsfunktionen och beräkna den.

Pay it Forward (2000) sammanfattning av filmen

https://www.imdb.com/title/tt0223897/?ref=nm_sr_1?ref=nm_sr_1

Pay it Forward Trailer

<https://www.youtube.com/watch?v=qfW0wCV9iFI>

Introduktion till exponentiella funktioner

<https://www.khanacademy.org/math/algebra/introduction-to-exponential-functions/exponential-vs-linear-growth/v/exponential-growth-functions>

Exponentialekvationer: Tillämpning av exponentiell tillväxt och avtagande

http://www.softschools.com/math/algebra/topics/exponential_equations_exponential_growth_and_decay_application/

11

Hur exponentiella funktioner ser ut

<https://mathbitsnotebook.com/Algebra1/FunctionGraphs/FNGTypeExponential.html>