DEL IV: Film & Matematik

ÅLDER: 16-18

UPPGIFT 36: SANNOLIKHET I "21" AV ROBERT LUKETIC

LogoPsyCom

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Lärarguide

Titel: Sannolikhet i filmen "21" av Robert Luketic

Ålder: 16-18 år

Längd: 2 timmar

Matematikinnehåll: Fibonacci, faktorisering, permutationer, kombinatorik, Pascals Triangel, sannolikhet

Konstinnehåll: Black jack, kortspel

Allmänna mål: Att upptäcka de matematiska begreppen som presenteras i filmen och få en mer praktisk bild av användningen av matematik i ett vanligt kortspel.

Instruktioner: Eleverna kommer att utforska matematik genom att själva spela kort och titta på filmklippen. Den här uppgiften hjälper dina elever att upptäcka de olika matematikbegrepp som behövs för att lära sig sannolikhet.

Resurser: Denna uppgift innehåller bilder och klipp som du kan använda på lektioner. Ämnen som behandlas här hjälper dig också att hitta annat material för att variera och anpassa lektioner.

Tips till läraren: Att lära sig genom att göra är mycket effektivt, särskilt för elever med inlärningssvårigheter. Förklara alltid vad varje matematikbegrepp skall användas till.

Mål: I slutet av denna uppgift ska eleven kunna:

- Förstå faktorisering;
- Använd permutationer och kombinatorik;
- Beräkna sannolikheter.

Utvärdering:

Skriv 3 saker du gillar med denna uppgift:	1. 2. 3.
Skriv 2 saker du lärt dig	1. 2.
Skriv en sak som behöver bli bättre	1.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inledning

Att titta på en film kan antingen vara en aktiv eller en passiv fritidsaktivitet. Filmer kan vara värdefulla resurser för elever när de utforskar de olika teman som behandlas. Vissa av filmerna handlar om matematik, men elever tänker ibland inte på det, även om de sannolikt kommer att förstå matematikinnehåll de hört om i en film bättre efteråt.

Att se karaktärer reflektera över matematiska problem och begrepp gör att tittaren vill förstå dessa begrepp och lösa problemen med dem på samma sätt som de ofta försöker gissa slutet på en film, här kommer de att lära sig nya saker bara genom att följa karaktärer hela tiden.

Därför kan matematik som gömmer sig i filmer vara nyttigt för att ämnet, som ofta ses som abstrakt, visar en mer praktisk och verklig känsla för när det kan komma till användning.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

"21" av Robert Luketic

Handling

Bild 1: Filmplansch "21"

Filmen «21» handlar om en grupp studenter på MIT som beslutar sig för att använda korträkning för att vinna på Black jack på kasinon. Denna metod är mycket välkänd och baseras på sannolikhet.

Trailer: https://www.youtube.com/watch?v=oqkdB7It5Go

Black jack

Som du vet handlar den här filmen om Black jack, men visste du att Blackjack ursprungligen var ett franskt spel från 1760-talet som heter "Vingt-et-un", 21 på franska, precis som filmens titel!

I den här filmen är Ben väldigt bra på matte och hans professor ber honom att gå med i sin korträknarklubb för att spela i Las Vegas. Ben behöver pengar för att betala för universitetet och går med på att spela tills han tjänar den summa pengar han behöver. Den här filmen är baserad på verkliga händelser, det finns verkligen ett MIT-team som tränade sig på att räkna kort och spela Black jack.

Se även den här dokumentären: https://www.youtube.com/watch?v=QfIVqavHHM0

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ordlista

Black jack: ett kortspel som spelas med 52 kort. Det är vanligt på kasino.

Kortäkning: en teknik som används i kasinospel som Black jack för att beräkna oddsen för att vinna.

MIT: Massachusetts Institute of Technology, ett mycket välkänt privat universitet i USA.

Vingt-et-un: ett franskt kortspel från 1700-talet som föregick Black jack.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Matematiken bakom 21

Inledningsaktivitet: Fibonaccis talföljd:

Det första mattekonceptet som visas i ”21” är Fibonaccis talföljd på Bens födelsedagskaka. När han studerar matematik på MIT har hans vänner gjort en speciell tårta till honom på födelsedagen. Fibonacci-talföljden är en matematik serie där du börjar med siffrorna 0 och 1 och varje följande nummer är summan av de två tidigare. Det går så här: 0 + 1 = 1; 1 + 1 = 2; 1 + 2 = 3; 2 + 3 = 5, och så vidare.

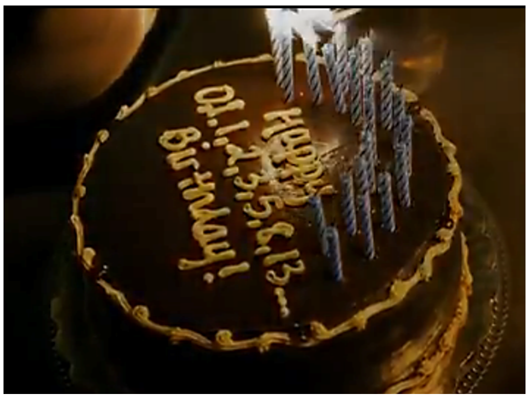

Bild 2: Födeösedagsscenen i "21"

Siffrorna på Bens tårta är 0,1,1,2,3,5,8,13 ... Varför slutade Bens vänner där? Kan du gissa hur gammal Ben är?

1. Faktorisering

Turspel beror inte alltid så mycket på slumpen. Du kan använda något som kallas sannolikhet för att förutspå dina chanser att vinna.

Innan du lär dig hur man beräknar sannolikheter börjar vi med en kort video om hur 52 kort kan ordnas: https://www.youtube.com/watch?v=uNS1QvDzCVw.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Hade du trott det? Nu förstår vi varför de behövde träna så mycket innan de åkte till Las Vegas!

Som du såg i videon kallas antalet möjligheter för en grupp element "Faktorer".

Kom ihåg följande formel:

Faktor **n!** motsvarar:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \ldots 3 \times 2 \times 1$$

eller

$$n! = n \times (n-1)!$$

Om du vill beräkna ett bråk med faktorerna, glöm inte att förenkla det enligt följande:

$$\frac{10!}{6!} = \frac{10x9x8x7x6x5x4x3x2x1}{6x5x4x3x2x1} = \frac{10x9x8x7x\cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

Kom ihåg: Det är allmänt accepterat att 0! = 1

2. Permutationer

Permutationen av en uppsättning element är ett ordnat arrangemang av alla elementen i den uppsättningen.

En permutation, skriven ${}_nP_r$, ${}^nP_r$, eller P(n,r), kan antingen tillåta upprepningar eller inte:

Permutationer med repetitioner**: dessa är enkla att beräkna eftersom det finns n, antalet saker att välja mellan och r, valen.**

Formeln är: $n^r = n \times n \times n \ldots$ (r gånger)

Exempel:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Om vi behöver komma på en tresiffrig kod för att låsa upp telefonen och det kan finnas upprepningar, har vi 10 siffror att välja mellan och 3 val att göra.

n = 10 och r = 3

${}^{10}P_3 = 10^3 = 1000$

- **Permutationer utan upprepningar**: skillnaden är att vi minskar antalet val. För att undvika upprepningar är formeln inte längre n x n x n x ... utan **n x (n-1) x (n-2) x (n-3) … = n!** blir faktoriseringen. Men om vi bara vill välja r av dem, kan vi reducera formeln till $\mathbf{{}^{n}P_{r}} = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Exempel:

Vi spelar biljard och har 16 biljardkulor. Var och en av dem förekommer en gång, så det finns inga upprepningar. Det finns 16 x 15 x 14 x 13 x 12 x 11… x 2 x 1 permutationer.

Om vi väljer ut 5 av dem kommer beräkningen att bli annorlunda:

$${}^{16}P_5 = \frac{16!}{(16-5)!} = \frac{16!}{11!} = \frac{16 \text{ x } 15 \text{ x } 14 \text{ x } 13 \text{ x } 12 \text{ x } \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 16 \text{ x } 15 \text{ x } 14 \text{ x } 13 \text{ x } 12 = 524\ 160$$

3. Kombinatorik:

Kombinationen av en uppsättning element är ett oordnat arrangemang av alla element i den uppsättningen.

- **Kombinationer utan upprepningar**:

Antag att vi vill spela Blackjack och tio personer sätter sig vid fem stolar runt bordet. Om vi försöker hitta antalet permutationer som finns, skulle vi använda formeln

$\mathbf{{}^{n}P_{r}} = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Uträkningen skulle bli:

$${}^{10}P_5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = \frac{10 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 \text{ x } 5!}{5!} = 10 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 = 30\ 240$$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

I det här fallet bryr vi oss inte om ordningen, så vi måste dela upp antalet permutationer i antalet sätt det finns att ordna 5 personer:

$$ {}^{n}C_{r} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-r)!}}\ \mathbf{x}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r!}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{r!(n-r)!}} $$

Vi använder den formeln på vårt exempel:

$$ {}^{10}C_{5} = \frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{5!(10-5)!}} = \frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{5!\ x\ 5!}} = \frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{120\ x\ 120}} = \frac{\mathbf{3\ 628\ 800}}{\mathbf{14\ 400}} = 252 $$

Du kan också använda Pascals triangel, som har varit viktig för matematiker sedan den upptäcktes.

I följande video kan man lära sig mer om den:
https://www.youtube.com/watch?v=XMriWTvPXHI&t=80s

Man behöver bara gå till n:e raden och välja r:e talet (den första raden och talet är 0).

Vi provar det med det här exemplet:

Du spelar black jack och du måste placera 4 personer i tre stolar. Enligt Pascals triangel kommer det att finnas fyra kombinationer.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Vi testar formeln:

$$ {}^{4}C_{3} = \frac{\mathbf{4!}}{\mathbf{3!(4-3)!}} = \frac{\mathbf{4!}}{\mathbf{3!1!}} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{6\ x\ 1}} = \mathbf{4} $$

Ett annat exempel:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Om vi har en kortlek med 52 kort som vi vill dela upp i giver med två kort för att spela Black jack, hur många kombinationer finns det av dessa två kort?

$$^{52}C_2 = \frac{52!}{2!(52-2)!} = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52 \text{ x } 51}{2!} = 1\ 326 \text{ kombinationer}$$

- ❖ **Kombinationer med upprepningar:** Här spelar ordningen ingen roll men du kan upprepa samma val flera gånger.

Bens vänner måste välja fyra smaker till hans födelsedagstårta och de har sju smaker att välja bland. Låt oss kalla dem A, B, C, D, E, F och G.
Hur många kombinationer med upprepningar kommer vi att ha?

A, B, C, D, E, F, G; där:

- V är de valda ingredienserna och
- → är rörelserna (från A till B, B till C, C till D, etc.)

A A D F	V V → → → V → → V →
C E E G	→ → V → → V V → → V
B C F F	→ V → V → → → V V →

…

Man kan se att det alltid finns 6 → och 4 V. Detta leder oss till omvandlingen av formeln för kombinationer utan upprepningar och ger oss formeln för kombinationer med upprepningar:

$$^{n}C_{r} = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Vi använder denna formel på vårt problem:

$$^{7}C_4 = \frac{(4+7-1)!}{4!(7-1)!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10!}{24 \text{ x } 720} = \frac{3\ 628\ 800}{17\ 280} = 210$$

4. Sannolikhet

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

används för att få en mer exakt bild av möjligheten att något slumpmässigt ska hända.

Det skrivs som P(A) och måste alltid vara mellan 0 och 1.

Kom ihåg: $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

När två kompletterande händelser utgör alla möjliga utfall: $\mathbf{P(A_C) + P(A) = 1}$

För att beräkna det delar vi antalet möjligheter vi har med antalet sannolikt antal utfall:

$$\frac{\#\ \textbf{sannolika möjligheter vi har}}{\#\ \textbf{sannolikt antal utfall}}$$

Detta innebär till exempel att när du slår tärningar har du $\frac{1}{6}$ möjligheter att få en 4 och $\frac{2}{6}$ möjligheter att få en 4 eller en 5. Det är emellertid omöjligt att få både en 4 och en 5, så det är $\frac{0}{6}$.

Exempel: Problemet i Monty Hall

I en av sina kurser ger Bens professor ett matematiskt problem:

- Det finns tre dörrar framför dig;
- Bakom en av dörrarna finns det en ny bil
- Bakom de andra två finns getter
- Du vill välja dörren med den nya bilen men det är $\frac{1}{3}$ chans att få bilen och $\frac{2}{3}$ chanser att få en get.

Ben väljer dörr 1 och hans professor visar honom att bakom dörr nummer 3 finns det en get. Han erbjuder att ändra sitt svar. Nu när han vet var en av getterna är, borde han ta den chansen?

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

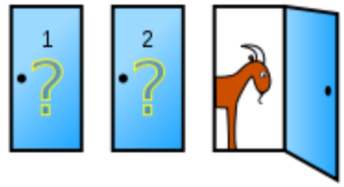

Bild 3: Visuell representation av problemet i Monty Hall

Du kan se svaret här:

https://www.youtube.com/watch?v=8DMnAAvakh0

Här är ett annat exempel:

Du har 12 kort i handen och personen bredvid dig ska välja ett. Av de 12 korten är tre tior, fem kungar, två ess och två fyror. Vad är chansen att personen väljer en kung?

De möjliga resultaten är: {10, 10, 10, K, K, K, K, K, A, A, 4, 4}

Så sannolikheten att få en kung, P(K)= $\frac{5}{12}$

Innan vi går vidare måste du känna till några formler för dessa beräkningar:

För att beräkna sannolikheten för två händelser som inträffar samtidigt multiplicerar du deras sannolikheter.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

I en kortlek med 52 kort, vad är sannolikheten för att välja en drottning och en knekt?

$P(J \cap Q) = P(J) \times P(Q)$

$P(J \cap Q) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169} = 0{,}006$

För att beräkna sannolikheten för att en av två händelser händer ska man addera deras sannolikheter och sedan subtrahera sannolikheten för att båda sker samtidigt

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Till exempel, vad är sannolikheten att välja en drottning eller en knekt i en kortlek med 52 kort?

P(QuJ) = P(Q) + P(J) – P(Q∩J)

P(QuJ) = $\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{169}=\frac{13}{169}+\frac{13}{169}-\frac{1}{169}=\frac{25}{169}=\mathbf{0,148}$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

UPPGIFT

Spela Black jack:

Vi spelar Black jack med 52 kort; varje kort har ett eget värde. Målet med spelet är att få 21 poäng. Ett ess och ett 10-poängskort är den bästa handen. Esset är värt 1 när summan är mer än 21. Alla spelare får två kort med framsidan upp. Dealern får ett kort med framsidan upp och ett med framsidan nedåt. Om dealern har Black jack (21 poäng) visar han sina kort och vinner spelet tillsammans med spelarna som också har Black jack. Om dealern förlorar får de andra spelarnas antingen behålla sina kort, ta ett till, dela i två olika giver eller ge sig och få tillbaka halva sin insats.

Här är värdena på alla kort:

Ess	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Knekt	Dam	Kung
1 eller 11	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	10	10

Bild 4: Kortspel på ett casino

Vi har fem spelare runt bordet. De har 2 kort vardera. Bland dessa kort finns det fyra ess, två tior, en knekt, en fyra och två femmor. Vilka är chansen att få två kort som ger upp till 21?

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

LÄR DIG MER…

Faktoriseringarr:

https://www.youtube.com/watch?v=uNS1QvDzCVw

Pascals Triangel:

https://www.youtube.com/watch?v=XMriWTvPXHI&t=80s

Sannolikhet:

https://www.youtube.com/watch?v=3V2omKRX9gc

Sannolikhet:

https://www.youtube.com/watch?v=Kgudt4PXs28

Bens svar på problemet i Monty Hall:

https://www.youtube.com/watch?v=8DMnAAvakh0

Dokumentär om MIT:

https://www.youtube.com/watch?v=QfIVqavHHM0

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.