

DEL III: Teater & Matematik

ÅLDER: 13 – 15

Board of weights and measures
(source: Claus Ableiter from Wikimedia Commons)

UPPGIFT 30: VOLYMER I "SJUNDE HIMLEN" (MANNEN SOM RÄKNADE, KAPITEL VIII)

SPEL – Sociedade Promotora de
Estabelecimentos de Ensino



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Lärarguide

Titel: Volymer i "Sjunde himlen" (Mannen som räknade, kapitel VIII)

Ålder: 13-15

Längd: 3 timmar

Matematiskt innehåll: Volym

Konstinnehåll: Teaterframträdande

Allmänna mål: Spela upp en anpassad scen ur "Sjunde himlen" från boken "Mannen som räknade"; Beräkna volymer i fasta figurer.

Instruktion och metoder: Förutom det anpassade manuset och förklaringen av "Sjunde himlen" är det viktigt för eleverna att ha några exempel på beräkning av volymer innan de löser övningarna.

Resurser: Grafritande kalkylator. Dator med internetuppkoppling; Miniräknare

Tips till läraren: Börja med att ge flera exempel på beräkning av volym av kroppar, med en ökande svårighetsnivå, för att lära dem hur man löser övningarna själva. Förse eleverna med det anpassade manuset till den "sjunde himlen", för att hjälpa dem att öva den scenen.

Mål att sträva mot:

I slutet av denna resurs skall eleven kunna:

- o Förstå lösningen som presenteras i "Sjunde himlen";
- o Spela upp en anpassad scen ur "Sjunde himlen";
- o Beräkna volym av kroppar.

Utvärdering:

Skriv 3 saker som du gillade med denna resurs:	1. 2. 3.
Skriv 2 saker som du lärt dig:	1. 2.
Skriv en sak som kan bli bättre:	1.

Inledning

Under historiens gång har matematiken hittat svar på flera problem som uppstått. Det finns många rapporter om dessa lösningar och det är ingen tvekan om att matematik är oerhört viktigt för problemlösning och har haft en viktig roll i utvecklingen av olika civilisationer genom historien.

Har du någon gång hört en berättelse eller läst en bok där matematik blev en del av lösningen på gåtan eller problemet?

Denna resurs kommer att ta itu med ett matematiskt problem som visas i en bok full av liknande situationer. Boken, "Mannen som räknade", skriven 1938, av Malba Tahan (pseudonym för professorn och författaren Júlio César de Mello e Souza), berättar historien om Beremiz Samir, en persisk resenär med en speciell talang för matematik. Han använder och implementerar logiskt tänkande och andra matematiska begrepp för att lösa dagliga problem på varje plats som han besöker.

Volym i "Sjunde himlen"

Boken "Mannen som räknade", av Malba Tahan, pseudonym för den brasilianska professorn och författaren Júlio César de Mello e Souza, återskapar en serie matematiska problem och gåtor som involverar aritmetik, algebra, geometri och andra områden inom matematik.

Boken berättar historien om Hanak Tade Maia, en man som reser från Samarra till Bagdad. På vägen träffar han Beremiz Samir, en persisk man med anmärkningsvärda matematiska färdigheter, och inbjuder mannen att följa med honom på sin resa. Hanak var säker på att en man med sådana matematiska förmågor skulle hitta ett lönsamt jobb i Bagdad.

Ett av problemen som presenteras i boken är uppdelningen av tjugoen vinfat mellan tre fåruppfödare.

I boken möter Beremiz och Hanak sheik Salem Nasair och hans vänner fåruppfödarna och sheiken ber Beremiz att lösa hans problem med uppdelningen av de tjugoen vinflaskorna.

I boken säger Sheik till Beremiz:

"- Här är mina tre vänner. De är fåruppfödare från Damaskus. De står inför ett av de konstigaste problemen jag har stött på. Det är detta: som betalning för en liten flock får har de här i Bagdad fått en mängd utmärkt vin, i tjugoen identiska flaskor: sju fulla, sju halvfulla och sju tomma. De vill dela så att var och en får samma antal flaskor och samma kvantitet vin. Att dela upp fat är enkelt - var och en skulle få sju. Svårigheten, som jag förstår, är att dela vinet utan att öppna det, lämna dem precis som de är. Är det möjligt att hitta ett tillfredsställande svar på det här problemet?"

Beremiz svarade efter två eller tre minuter:

- Uppdelningen av de tjugoen flaskorna, o shejk, kan göras utan mycket

komplikationer. Jag kommer att föreslå den enklaste lösningen. Den första kommer att få tre fulla fat, en halvfull och tre tomma, för totalt sju fat. Den andra kommer att få två fulla fat, tre halvfulla och två tomma, för totalt sju fat.

Den tredje kommer också att få sju flaskor på ett liknande sätt. Enligt min uppdelning kommer varje herde att få sju fat och lika stor mängd vin."

Denna lösning som Beremiz föreslog löste problemet eftersom varje herde skulle få sju vinflaskor och samma mängd vin.

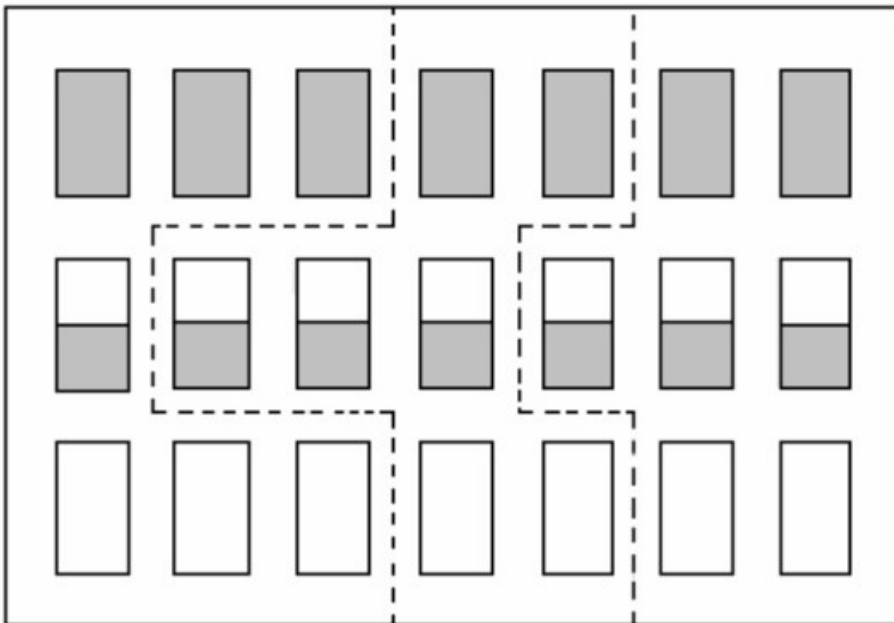


Fig. 1 – Beremiz lösning (Källa: Taham, M. (n.d.). O Homem que calculava. Retrieved from: http://josenorberto.com.br/o_homem_que_calculava.pdf (16.07.2019))

Enligt boken förklarade Beremiz:

"- Efter divisionen kommer den första herden att få $2 + 2 + 2 + 1$, totalt sju flaskor, och var och en av de andra kommer att få $2 + 2 + 1 + 1 + 1$, vilket också blir sju. Detta bevisar att min föreslagna uppdelning är exakt och rättvis. Även om problemet verkar komplicerat, har dess numeriska upplösning inga svårigheter.

Hans lösning mottogs med stor entusiasm, inte bara av shejken, utan också av de tre männen i Damaskus.”¹

En annan lösning skulle kunna vara: en av fåraherdarna skulle få en hel, fem halvfulla och en tom flaska. De andra tvåherdarna skulle få tre fulla, en halvfull och tre tomma flaskor.

För att lösa detta problem använde Beremiz sig av huvudräkning. Men om vi bara ser till delningen av vinet, har vi också en fråga om volymer, som kommer att behandlas i den här uppgiften.

¹Tahan, M. (n.d.). The Man Who Counted – A Collection of Mathematical Adventures. Hämtad från: <https://sparthasarathy.com/ebooks/themanwhocounted.pdf> (16.07.2019).

Ordlista

Bagdad: Fortida centrum för den islamiska världen och Iraks nuvarande huvudstad.

Damaskus: Huvudstad och största stad i landet Syrien.

Samarra: Stad i Irak, belägen på den västra sidan av Tigris, i provinsen Saladino, 125 km norr om Bagdad.

Shejk: En hederstitel på arabiska för ledaren av en stam eller en kunglig familjemedlem.

Perser: Person från Persien (ett ord som användes av grekerna i antiken och av västeuropea för att syfta till hela Iranlännen).

Matematiken bakom "Sjunde himlen"

Som tidigare nämnts kommer det bara att handla om volymer om vi enbart tänker på delningen av vinet, så just det kommer att behandlas framöver.

Volym

Volymen för **en kropp** är det utrymme som tas upp. De mest använda volymenheter är kubikmeter (m^3), kubikdecimeter (dm^3) och kubikcentimeter (cm^3). En kubikmeter motsvarar tusen liter och en kubikdecimeter motsvarar en liter. Enligt International System of Units (SI) är kubikmeter standardenhet för volymmätningar.

Vi kommer att försöka förenkla formlerna för beräkning av kroppars volymer genom att göra en uppdelning i "kroppar med två baser", "kroppar med en bas" och "kroppar utan baser".

Volymen av "kroppar med två baser"

Volymen av kroppar med två baser (t.ex. kub, rätblock, triangulärt eller femkantigt prisma eller cylinder) är alltid resultatet av multiplikationen av basområdet med höjden.

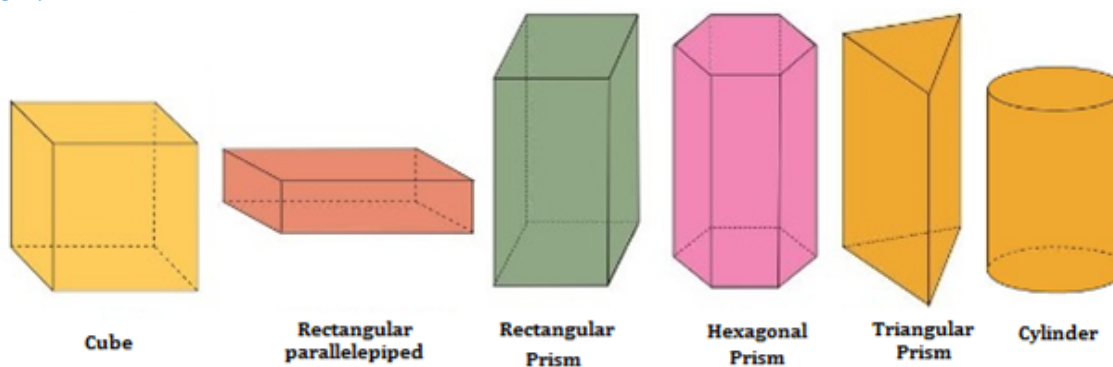


Fig. 2 – kroppar med två baser

(Källa: Image adapted from Ação Educativa (2015, July 3). Mundo em construção – 8º ano. Retrieved from: https://issuu.com/acaoeducativa/docs/8_ano_-_mundo_em_construcao_alu/404 (16.07.2019))

$$V = A_b \times h, \text{ där } A_b \text{ är basens area och } h \text{ är höjden}$$

Exempel: Beräkna volymen för följande rektangulära prisma:

$$V = A_b \times h = (1 \times 8) \times 5 = 40 \text{ cm}^3$$

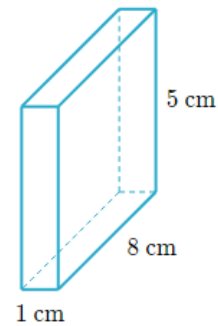


Fig. 3 – Rektangulärt prisma

(Källa: https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-volume-sa/volume-rect-prism/e/volume_1)

Volym av “kroppar med en bas”

Volymen av kroppar med endast en bas (t.ex. pyramid, kon) är alltid desamma som resultatet av multiplikationen av 1/3 av basområdet med höjden

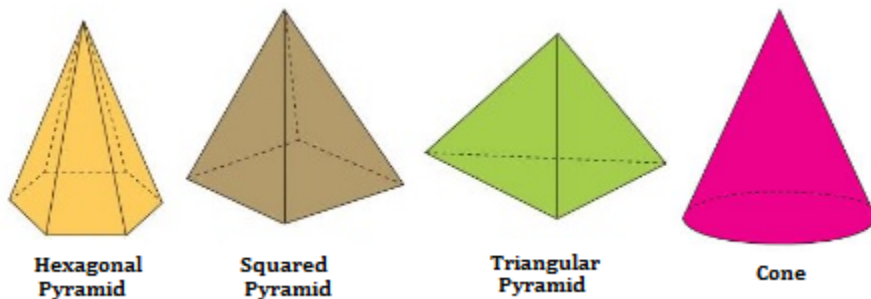


Fig. 4 – Kroppar med en bas

(Källa: Image adapted from Ações Educativas (2015, July 3). Mundo em construção – 8º ano. Hämtad från: https://issuu.com/acaoeducativa/docs/8_ano_-_mundo_em_construcao_alu/404 (16.07.2019))

$$V = \frac{1}{3} A_b \times h, \text{ där } A_b \text{ är basens area } h \text{ är höjden}$$

Exempel: Beräkna volymen för följande kon, måtten står i centimeter.

$$V = \frac{1}{3} A_b \times h = \frac{1}{3} (\pi \times 2^2) \times 9 = \frac{1}{3} (4\pi) \times 9 = \frac{36\pi}{3} = 12\pi \text{ cm}^3$$

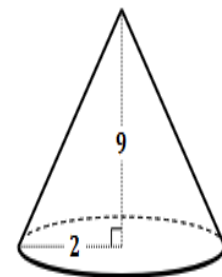
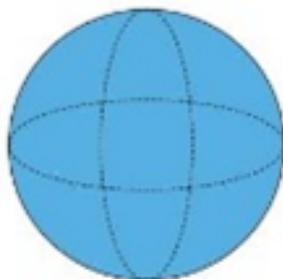


Fig. 5 – Kon

(<https://www.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-volume-sa/volume-cones/e/volume-of-cones>)

Volym av "Kropp utan bas"

Volymen för en kropp utan bas (dvs klot) är multiplikationen av $\frac{4}{3}$ med πr^3 .



Sphere

Fig. 6 - Klot

(Källa: Ação Educativa (2015, July 3). Mundo em construção – 8º ano. Hämtad från: https://issuu.com/acaoeducativa/docs/8_ano_-_mundo_em_construcao_alu/404 (16.07.2019))

$$V_{\text{Sphere}} = \frac{4}{3} \times \pi r^3, \text{ där } r \text{ är klotets radie}$$

Exempel: Beräkna volymen för följande klot, mått i centimeter.

$$V = \frac{4}{3} \times \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 27 = \frac{108\pi}{3} = 36\pi \text{ cm}^3$$

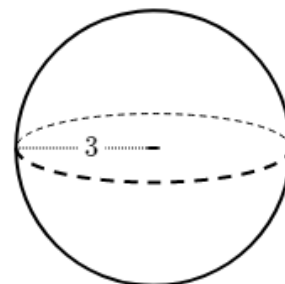


Fig. 7 - Klot

(Källa: <https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-volume-sa/volume-cones/e/volume-of-spheres>)

UPPGIFTER

UPPGIFT 1



1. Spela upp scenen från boken "Mannen som räknade", kapitel VIII, "Sjunde himlen", med hjälp av det bifogade manuset.

UPPGIFT 2



1. Kuben i figuren nedan har en kant på 6 cm och den skuggade pyramiden har en höjd som är en tredjedel av kubens höjd

1.1. Beräkna kubens volym.

1.2. Beräkna pyramidens volym.

1.3. Beräkna den del av kubens som inte är pyramid.

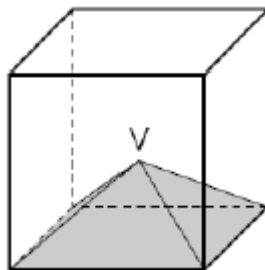


Fig. 8 – Kub och pyramid

(Källa: Neves, M. A, Pereira, A., Leite, A., Guerreiro, L., & Silva, M. C. (2006). Matemática A1 – Ensino Profissional: Geometria. Porto: Porto Editora.)

11

UPPGIFT 3



I ett cylindriskt kärl med en diameter på 20 cm finns en bestämd mängd vatten. Därefter sänks ett metallklot med en diameter av 6 cm ned i kärlet. Man kunde se att vattenytan kom vid klotets ovasida.

Hur mycket vatten finns i kärlet?

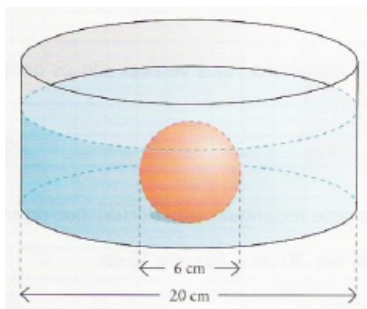


Fig. 9 – Cylinder och klot

(Källa: Neves, M. A, Pereira, A., Leite, A., Guerreiro, L., & Silva, M. C. (2006). Matemática A1 – Ensino Profissional: Geometria. Porto: Porto Editora)

LÄR DIG MER...

Om du vill läsa mer om ämnen som behandlas i denna resurs kan du studera följande länkar:

 The Man Who Counted – A Collection of Mathematical Adventures:

<https://sparthasarathy.com/ebooks/themanwhocounted.pdf>

 Geometri i kroppar:

<https://www.onlinemathlearning.com/solid-geometry.html>

<https://www.mathsisfun.com/geometry/solid-geometry.html>

 Vad är geometri av kroppar och former?

<https://www.smartickmethod.com/blog/math/geometry/solid-geometric-shapes/>

 Grundläggande geometri – Volym- och Ytarea:

<https://www.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-volume-sa>

 Volym av en kub:

<https://www.onlinemathlearning.com/volume-of-a-cube.html>

 Volym av ett prisma:

<https://www.onlinemathlearning.com/volume-prism-1.html>

 Volym av ett rektangulärt prisma:

<https://www.khanacademy.org/math/geometry-home/geometry-volume-surface-area#geometry-volume-rect-prism>

<https://www.onlinemathlearning.com/volume-rectangular-prism.html>

 Volym av koner, cylindrar och klot

<https://www.khanacademy.org/math/geometry-home/geometry-volume-surface-area#geometry-volume-cones>

 Volym av cylindrar:

<https://www.onlinemathlearning.com/volume-of-a-cylinder.html>

 Volym av ett klot:

<https://www.onlinemathlearning.com/volume-of-a-sphere.html>

 Volym av en kon:

<https://www.onlinemathlearning.com/volume-cone.html>

 Volym av en pyramid:

<https://www.onlinemathlearning.com/volume-of-a-pyramid.html>

 Utforska nät av geometriska fasta kroppar:

<https://www.geogebra.org/m/n6EjQDw8>

Pjäsen "Sjunde himlen"

(taget från boken "Mannen som räknade")

Manus från kapitlet "Sjunde himlen" från boken "Mannen som räknade":

Karaktärer I scenen:

- Hanak Tade Maia;
- Beremiz Samir;
- Shejk Salem Nasair;
- Fåraherde 1;
- Fåraherde 2;
- Fåraherde 3.

Material:

- 2 liters flaskor I samma storlek;
- 1 flaska vatten.

[På scenen finns det 3 fåraherdar och shejk Salem Nasair. De sitter och pratar. Hanak Tade Maia och Beremiz Samir närmar sig dem.]

14

Shejk Salem Nasair (höjer armarna mot himlen): Här är han, den fantastiske matematikern! Välkommen min vän!

Beremiz Samir: Hur mår du min vän? [shejken och Beremiz kramas].

Beremiz Samir: Det här är min vän Hanak. Han bjöd mig att följa med honom på sin resa.

Hanak Tade Maia: Hej, shejk! Trevligt att träffas.

Sheik Salem Nasair: Hej, Hanak! Om du är vän till Beremiz är du också min vän! Detta är mina tre vänner från Damaskus.

[herdarna står upp för att hälsa resenärerna.]

1: Marhabaan almusafirin!

2: Marhabaan!

3: Marhabaan! Kayf halikm?

[Beremiz och Hanak hälsar på de tre männen.]

Beremiz Samir: Så, Nasair, hur mår du?

Sheik Salem Nasair: Beremiz, jag mår väldigt bra, tack, men mina vänner här står inför ett av de konstigaste problemen jag har stött på. Du kanske kan hjälpa dem att lösa det med dina extraordinära matematiska färdigheter!

Beremiz Samir: Vad är problemet?

Sheik Salem Nasair: Mina tre vänner är fåraherdar från Damaskus och som betalning för en liten flock får fick de här, i Bagdad, en fint vin, i tjugoen identiska flaskor. Men sju är fulla, de övriga sju är halvfulla och de sju sista flaskorna är tomma.

Beremiz Samir: Jag förstår.

Sheik Salem Nasair: De vill dela vinet så att var och en får samma antal flaskor och samma mängd vin.

15

1: Det är enkelt att dela upp flaskorna, eftersom var och en skulle få sju.

[De andra två männen håller med om och gör gester med huvudena för att visa sitt samtycke.]

Sheik Salem Nasair: Svårigheten, som jag förstår, ligger i att dela vinet utan att öppna flaskorna och lämna dem precis som de är nu.

Beremiz Samir: Jag förstår.

Hanak Tade Maia: Beremiz, tror du att det är möjligt att hitta ett tillfredsställande svar på det här problemet?

2: Tror du att du kan hjälpa oss med vårt konstiga problem?

Beremiz Samir: Jag tror jag kan det. Låt mig tänka på detta problem lite.

[Beremiz sänker huvudet och rör sig lite fram och tillbaka och tänker några sekunder på problemet. Efter en stund lyfter Beremiz huvudet och pratar med de människor som är med honom.]

Beremiz Samir: Uppdelningen av de tjugoen flaskorna kan göras utan större problem. Jag kommer att föreslå den enklaste lösningen.

1: Berätta hur vi ska göra.

[Beremiz vänder sig till den första mannen.]

Beremiz Samir: Du kommer att få tre fulla flaskor, en halvfull och 3 tomma, totalt sju flaskor.

16

[Därefter vänder Beremiz sig till den andra mannen.]

Beremiz Samir: Du kommer att få två fulla flaskor, tre halvfulla och 2 tomma, totalt 7 flaskor.

[Slutligen vänder Beremiz sig till den tredje mannen.]

Beremiz Samir: Du kommer också att få två fulla flaskor, tre halvfulla och två tomma.

[Därefter talar Beremiz med shejk Nasair.]

Beremiz Samir: Enligt min uträkning kommer varje person att få sju flaskor och en lika stor mängd vin.

Sheik Salem Nasair: Jag är inte säker på att jag förstod din uträkning.

Hanak Tade Maia: inte jag heller, Beremiz.

Beremiz Samir: Inga problem, jag kommer att förklara hur jag räknade och tänkte. Låt oss säga att en full flaska innehåller två halv, och en halv full flaska vin innehåller ett glas, är ni med?

Sheik Salem Nasair: Ja.

Hanak Tade Maia: Ja.

17

Beremiz Samir: På detta sätt, enligt uträkningen, kommer den första mannen att få $2 + 2 + 2 + 1$, totalt sju enheter. Är du med?

Sheik Salem Nasair: Ja.

Hanak Tade Maia: Ja, jag är med.

Beremiz Samir: Som ni ser får var och en av de återstående herdarna $2 + 2 + 1 + 1 + 1$, vilket också blir sju.

Sheik Salem Nasair and Hanak: Åh! Nu förstår jag!

Beremiz Samir: Detta bevisar att mitt sätt att räkna är exakt och rättvist. Även om problemet verkar komplicerat, var lösningen inte så svår.

[Beremizs lösning mottogs med stor entusiasm av alla, särskilt de tre herdarna i Damaskus.]

1: Vid Allah! Den här matematikern är fantastisk! På ett ögonblick löste han ett problem som verkade ytterst svårt för oss.

2 och 3: Vid Allah!

1: Shukraan jazilaan.

18

2 och 3: Shukraan.

Beremiz Samir: Det var så lite. Jag är glad att jag kunde hjälpa er!