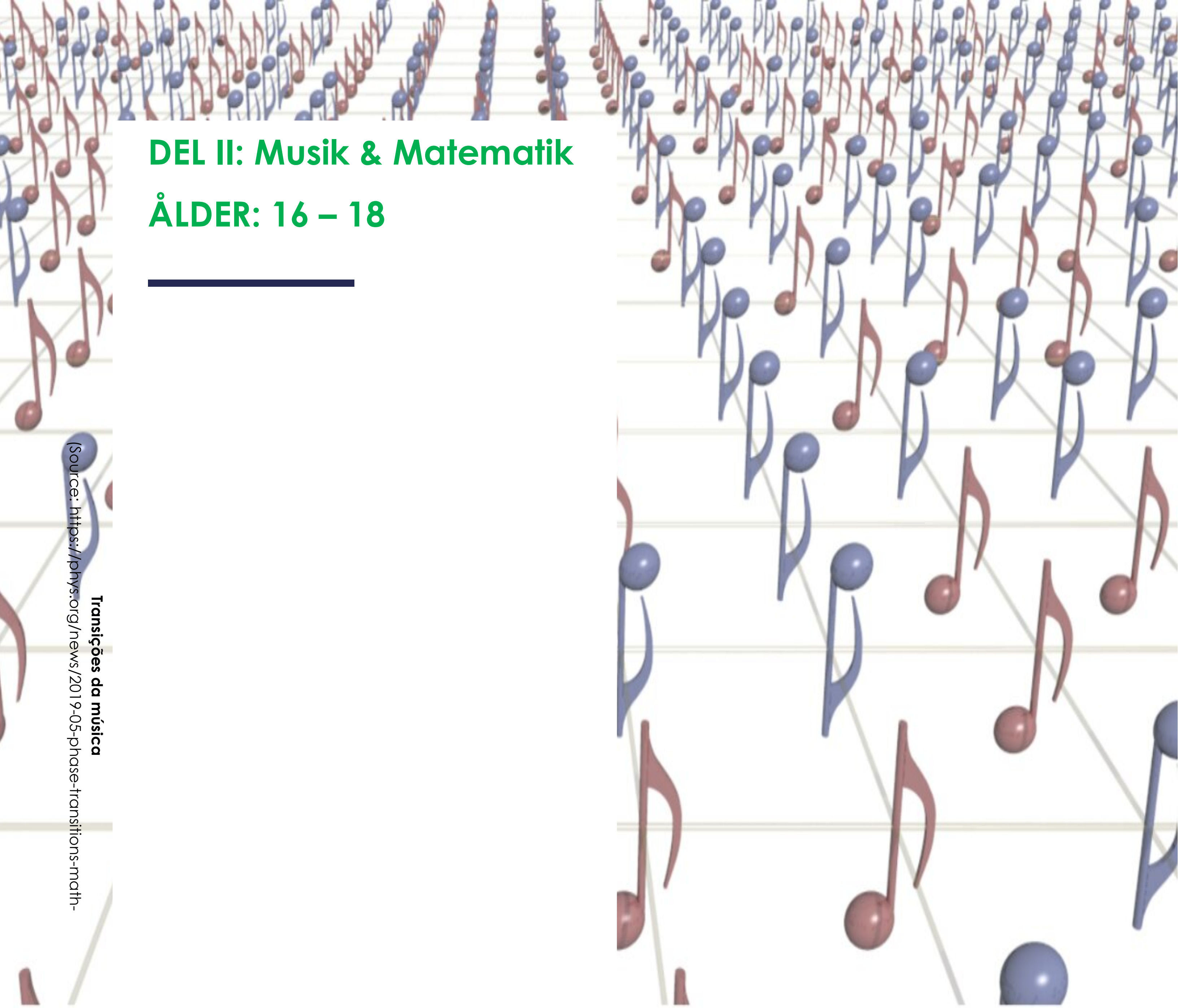
DEL II: Musik & Matematik

ÅLDER: 16 – 18



Transições da música
(Source: https://phys.org/news/2019-05-phase-transitions-math-

UPPGIFT 27: LOGARITMER I TEMPERERAD SKALA

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Lärarguide

Titel: Logaritmer i tempererad skala

Ålder: 16 – 18 år

Längd: 3 timmar

Matematikinnehåll: Logaritmer, logaritmers egenskaper, regler för att beräkna logaritmer

Konstinnehåll: 12-tons tempererad skala, toner och frekvenser av toner.

Allmänna mål: Att förstå logaritmkonceptet, egenskaperna hos en logaritmisk funktion och utföra beräkningar som innehåller logaritmer

Instruktioner: Det kommer att vara användbart att ha tillgång till en grafritande kalkylator (det fungerar med internetkalkylatorn Desmos) så att eleven kan lära sig att beräkna exponenter i en kalkylator och verifiera uppgifternas resultat/lösningar.

Resurser: Dator med internetanslutning; Tillgång till webbplatsen: https://www.desmos.com/

Tips till läraren: Börja med att ge exempel på hur man beräknar logaritmer, med ökande svårighetsgrad, samtidigt som du förklarar dess egenskaper och förändringar med utgångspunkt i basen.

Mål: I slutet av denna uppgift ska eleven kunna:

- Få bilden av en logaritmisk funktion;
- Beräkna värdet på logaritmer med olika baser.

Utvärdering:

Skriv 3 saker du gillar med denna resurs:	1. 2. 3.
Skriv 2 saker du lärt dig	1. 2.
Skriv en sak som behöver bli bättre	1.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inledning

Matematik och musik har alltid hängt ihop. Det första beviset på detta förhållande hittades under sjätte århundradet f.v.t. Pythagoras jämförde då ljudet som producerades av hammare av olika längder, som användes av smeder, med ljudet från monokorden, som tror att Pythagoras uppfann.

Denna jämförelse gjorde det möjligt för Pythagoras att upptäcka och förbättra de matematiska teorierna bakom ljud genom att studera ljuden som producerades av monokorden. Han delade strängen i två lika delar, sedan i tre lika delar och så vidare. Han matchade ljuden matematiskt enligt de underavdelningar han skapade och skapade den pythagoriska skalan, där varje ton hade en väldefinierad relation med andra.

Pythagoriska skalan är basen för den diatoniska skalan, som består av sju toner, och är grunden för bildandet av alla andra skalor som används i västerländsk musik. En av skalorna som skapades i västerländsk kultur var den 12-toniga tempererade skalan, även känd som kromatisk skala, där det finns en större samstämmighet mellan toner.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Exponenter i tempererad skala

Under sjätte århundradet f.v.t. använde Pythagoras monokorden för att studera förhållandet mellan längden på den vibrerande strängen och den musikaliska tonen denna producerade.

Föreställ dig en sträng utsträckt och fixerad i båda ändarna. När strängen berörs, vibrerar den och producerar en ton som kallas en grundton. Pythagoras delade sedan strängen i två lika delar, sedan i tre och så vidare. När han fortsatte att dela strängen, erhålla harmoniken i grundtonen och genom att matematiskt kombinera ljuden skapade han skalor som resulterade i toner som var naturligt relaterade till varandra.

Genom att hålla samma intervall (numeriskt förhållande av $\frac{3}{2}$) mellan tonerna och genom att börja från oktavintervallet som ges av frekvenserna $\mathbf{f_0}$och $\mathbf{2f_0}$, kan man skapa den pythagoriska diatoniska skalan. Tonerna man får, vanligtvis kända som C, R, E, F, G, A och B, kallas i många länder för Do-Re – Mi – Fa – Sol – La – Ti (eller Si) enligt förhållandet C-Do, D-Re, E-Mi, F-Fa, G-Sol, A-La och B-Ti (eller Si). Detta bildar den så kallade diatoniska skalan med sju toner som i århundraden var bas på andra skalor.

Från medeltiden och framåt märkte man att vissa toner var för nära varandra (till exempel B och C) och bestämde sig för att skapa en skala där frekvensintervallet mellan alla toner skulle vara detsamma. Värdet på det är intervallet mellan noterna C och B (en halvton). Som ett resultat bildades och 12-tonsskalan av J. S. Bach.

Bild 2 - Johann Sebastian Bach
(Källa:https://commons.wikimedia.org/wiki/Johann_Sebastian_Bach)

Till skillnad från Pythagoras som hade bildat den diatoniska skalan genom att få 7 toner genom en division som kan representeras av bråk, kan denna

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

nya skala förklaras med användning av logaritmer, ett koncept introducerat av John Napier (1550-1617), och detta resulterade i 12 toner: C, C #, D, D #, E, F, F #, G, G #, A, A # och B.

Ton	Halvton	Pythagorisk skala	12-tons tempererad skala	Samstämmig-het
C	0	1	1	1
C#	1		$2^{1/12}$	
D	2	$9/8$	$2^{2/12}$	
D#	3		$2^{3/12}$	$6/5$
E	4	$81/64$	$2^{4/12}$	$5/4$
F	5	$4/3$	$2^{5/12}$	$4/3$
F#	6		$2^{6/12}$	
G	7	$3/2$	$2^{7/12}$	$3/2$
G#	8		$2^{8/12}$	
A	9	$27/16$	$2^{9/12}$	$5/3$
A#	10		$2^{10/12}$	
B	11	$243/128$	$2^{11/12}$	
C (oktav)	12	2	2	2

Med andra ord motsvarar de 12 tonerna i den tempererade eller kromatiska skalan logaritmerna med basen 2: $\mathbf{2^0}$, $\mathbf{2^{\frac{1}{12}}}$, $\mathbf{2^{\frac{2}{12}}}$, ..., $\mathbf{2^{\frac{2}{12}}}$ och $\mathbf{2}$.

Sådan samstämmighet innebär olika ackord i olika musikinstrument. Bland annat resulterar pianokonstruktioner som formas efter ackorden en form som liknar en logaritmisk funktion.

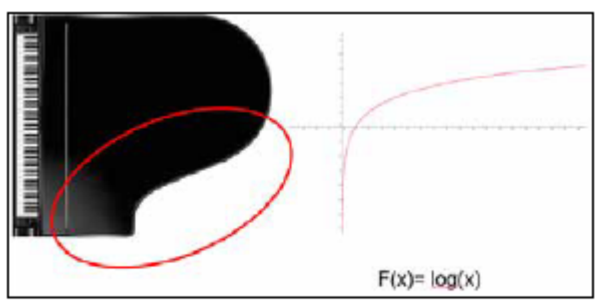


Bild 2 – Piano och en logarimisk funktion
(Källa: RBECM, Passo Fundo, v. 1, n. 2, jul./dec. 2018)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ordlista

#: Symbol som heter "korsförtecken" och indikerar höjning en halvton.

Diatonisk skala: en uppdelning av oktaven i sju steg.

Frekvens: ett fysikenhet som indikerar antalet upprepningar av en händelse under en given tidsperiod.

Grundfrekvens: den lägsta och starkaste frekvensen i en harmoni.

Grundton: huvudtonen i ett ackord, som de andra ackorden härrör från.

Halvton: avstånd som är en halv ton och som utgör minsta avstånd i det traditionella västerländska musiksystemet.

Harmoni: en serie ljud som utgör en ton.

Monokord: ett forntida musikinstrument sammansatt av en enda sträng över en resonanslåda.

Oktav: avståndet mellan toner med halva eller dubbla frekvensen.

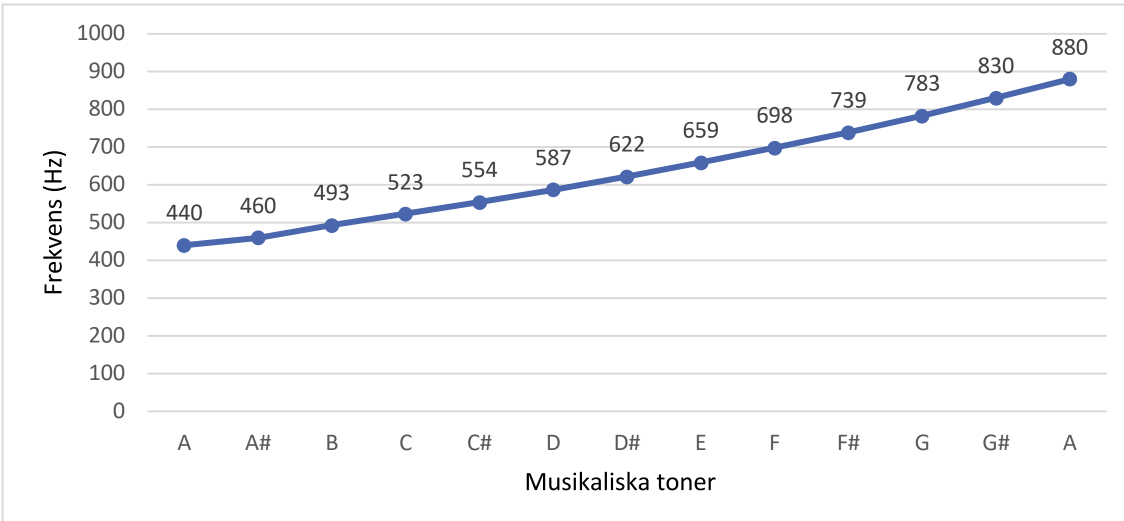
(Musikalisk) Skala: en ordnad tonföljd av ljudets vibrationsfrekvens (vanligtvis från ljud med lägsta frekvens till högsta frekvens).

Tempererad skala: uppdelning av oktaven i tolv lika halvtoner; även känd som kromatisk skala.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Matematiken bakom den tempererade skalan: logaritmer

Som vi har sett tidigare delas den tempererade skalan (eller kromatisk skala) upp i 12 toner som kan visas med hjälp av logaritmer. Med detta faktum i åtanke, låt oss ta en titt på formen på en logaritmisk kurva:



För att bättre förstå logaritmer, låt oss titta på detta koncept och dess egenskaper.

Logaritm för ett tal: logaritmfunktion för basen a

Vad är logaritmen till 8 med basen 2?

Svaret är 3, för $\mathbf{2^3 = 8}$.

Uttrycket "3 är logaritmen till 8 med bas 2" skrivs som: $\mathbf{\log_2 8 = 3}$.

> Logaritmen för ett positivt tal $\boldsymbol{x}$ med basen $\mathbf{a}$, med $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^+ \backslash \{\mathbf{1}\}$, till ett tal $\boldsymbol{y}$, som: $\mathbf{a^y = x}$ skrivs som $\mathbf{\log_a x}$, det vill säga,
>
> $$\mathbf{\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

Därför, eftersom $\mathbf{a^1 = a}$ och $\mathbf{a^0 = 1}$, när:

$\boxed{\mathbf{\log_a a = 1}}$ och $\boxed{\mathbf{\log_a 1 = 0}}$

Och även:

$\boxed{\boldsymbol{\log_a a^x = x}}$ och $\boxed{\boldsymbol{a^{\log_a x} = x}}$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Logaritm med basen 10 och med basen $\mathbf{e}$

Bland alla möjliga baser är två särskilt vanliga: basen 10 och basen $\mathbf{e}$. I fallet med en logaritm med basen 10, kallad "gemensam logaritm", kan dess bas utelämnas. Därför kan det enkelt representeras som $\mathbf{\log x}$ istället för $\mathbf{\log_{10} x}$.

Likaså kan logaritmen med basen $\mathbf{e}$, så kallad "naturlig logaritm", skrivas som $\mathbf{\ln x}$ istället för $\mathbf{\log_{e} x}$.

Beräkning av logaritmer med en kalkylator kan göras med knapparna "LOG" och "LN".

För att bevisa att:

- $\mathbf{10^2 = 100}$, använd knappen "LOG", som används för att beräkna logaritmer med bas 10;
- $\mathbf{e^{4,605} \cong 100}$ använd knappen "LN", som används för att beräkna logaritmer med bas $\mathbf{e}$.

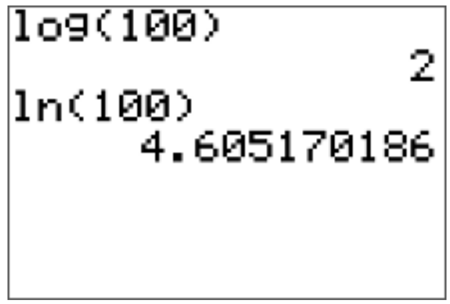


Bild 4 – Beräkning av logaritmer
(Källa: Grafritande kalkylator Texas Ti-84 Plus)

Logaritmiska funktioner

En logaritmisk funktion av basen $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$ är en funktion där

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{y} = \mathbf{\log_a x}$$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Graferna för funktionerna $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a^x}$ och $\mathbf{g(x)} = \mathbf{\log_a x}$ är symmetriska med avseende på ekvationslinjen $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Därför är funktionerna $\mathbf{f}$ och $\mathbf{g}$ inverterade funktioner

Dessa funktioner har följande grafiska representationer, när $\mathbf{a} > \mathbf{1}$:

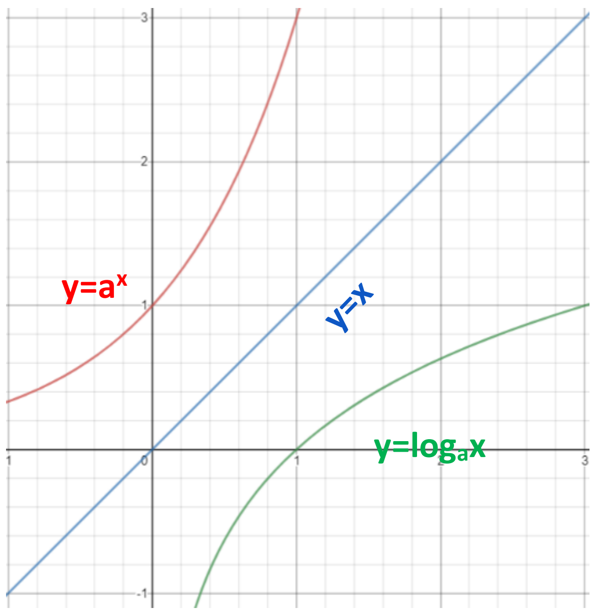


Bild 5 – Grafer av funktionerna a^x och $\log_a x$
(Källa: Författaren, Desmos.com)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Egenskaper hos logaritmiska funktionerna

Egenskaperna för de logaritmiska funktionerna är relaterade till egenskaperna för respektive inverterade funktioner (exponentiella funktioner).

Om $\begin{matrix} \mathbf{f}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{log_a\, x} \end{matrix}$ när $\mathbf{a > 1}$, dess grafiska representation kommer att vara som i bild 6 och funktionens egenskaper $\mathbf{f}$ kommer att vara:

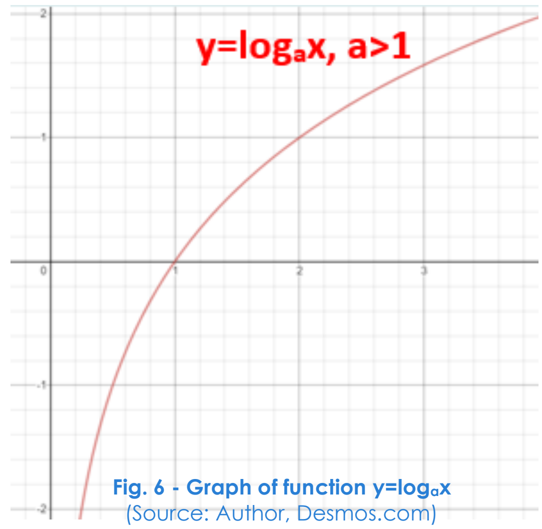


Fig. 6 - Graph of function y=logₐx
(Source: Author, Desmos.com)

- f är oändlig
- Domänen: $D = \mathbb{R}^+$
- Underdomänen: $D' = \mathbb{R}$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, det vill säga, $f(1) = 0$
- f är ökande
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, det vill säga ekvationslinjen $x = 0$ is är en vertikal asymptot av grafen f

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Logaritmregler

Reglerna för beräkning av logaritmer är relaterade till reglerna för att beräkna potenser. Några av reglerna är:

Tank på att $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^+, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^+$ och $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\mathbf{1}\}$.

1. Produktregel

Logaritmen av en produkt är summan av logaritmerna:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

2. Kvotregel

Logaritmen av en kvot är differensen mellan logaritmerna:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

3. Potensregel

Logaritmen av en potens är produkten av exponenten multiplicerad med logaritmen för basen:

$$\log_a(x^y) = y \times \log_a(x), \quad p \in \mathbb{R}$$

$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$ eftersom $\frac{1}{x} = x^{-1}$ och $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{\log_a(x)}{n}$ eftersom $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

4. Byte av bas

Logaritmen $\mathbf{x}$ med basen $\mathbf{a}$ är kvoten av logaritmen $\mathbf{x}$ med basen $\mathbf{b}$ och logaritmen av $\mathbf{a}$ med basen $\mathbf{b}$:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}, \quad \text{med } \mathbf{a} \text{ och } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

basen skiljer sig från 10 eller $\mathbf{e}$, när man använder kalkylator.

Exempel: $\log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3} \simeq 1,46$ eller $\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \simeq 1,46$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

UPPGIFTER

UPPGIFT 1

Beräkna värdet av:

1.1. $\log_2 64$ 1.2. $\log_5 5$ 1.3. $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ 1.4. $\log_4 1$ 1.5. $\log_{\frac{1}{4}} 2$

1.6. $\log_{\sqrt{5}} 125$ 1.7. $\log_{10} 1000$ 1.8. $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ 1.9. $\log_2\sqrt{2}$ 1.10. $\log_e \sqrt[3]{e^4}$

1.11. $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 1.12. $\log_5 0,2$ 1.13. $\log_e(e^{-2}) + \log_2\left(\frac{1}{32}\right)$

UPPGIFT 2

Beräkna värdet av:

2.1. $\log 10000$;

2.2. $\log 0,01$;

2.3. $\ln e^{-7}$;

2.4. $\ln(\sqrt[5]{e}) - \ln(e) + \ln(e^{-3})$;

2.5. $\log(10) + \log(1) - \ln(e^2)$;

2.6. $\ln(e^{-1}) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) + \log(\sqrt{10})$.

UPPGIFT 3

Beräkna med logaritmreglerna och verifiera resultaten med en kalkylator:

3.1. $\log_2(64 \times 16)$; 3.2. $\log_3(81:27)$; 3.3. $\log_2(32^8)$.

UPPGIFT 4

Antag att $\log_2 a = \frac{1}{5}$. Bestäm värdet av: $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

LÄR DIG MER...

Kromatisk skala

https://www.youtube.com/watch?v=2gy6E3X2mKQ

Introduktion till logaritmer

https://www.khanacademy.org/math/algebra2/exponential-and-logarithmic-functions/introduction-to-logarithms/v/logarithms

Grundläggande för logaritmer

https://mathinsight.org/logarithm_basics

12-tonsskala

http://www.tonalsoft.com/enc/number/12edo.aspx

Varför är det 12 toner I oktaven?

https://www.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/tuning/12.html

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.