DEL II: Musik & Matematik

ÅLDER: 13-15

UPPGIFT 26: BACH OCH DET MUSIKALISKA MÖBIUSBANDET

Sandgärdskolan

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Lärarguide

Titel: Bach och det musikaliska möbiusbandet

Ålder: 16-18 år

Längd: 2 timmar

Matematikinnehåll: Oändlighet.

Konstinnehåll: Två-dimensionell, tre-dimensionell, hantverk.

Allmänna mål: Detta är en bra uppgift för att låta elever skapa och samtidigt upptäcka klassisk konst.

Instruktioner: Ge eleverna möjlighet att utforska matte genom musik och hantverk genom att använda den praktiskt. Den här uppgiften är en bra grund för din klass att upptäcka olika matematiska koncept genom att faktiskt arbeta med sina händer.

Resurser: Den här uppgiften tillhandahåller bilder och videor som läraren kan använda i klassrummet. Ämnen som behandlas här kommer också att vara inspiration för att hitta andra material som kan vara relevanta för att anpassa variera lektioner.

Tips till läraren: Trots att det är många praktiska aktiviteter involverade, kom ihåg att vara exakt med matematiken.

Mål: I slutet av denna uppgift ska eleven kunna:

- Förstå oändlighet på ett förbättrat sätt.
- Utforska sin hantverkskompetens.

Sammanfattning och utvärdering:

Skriv 3 saker du gillar med denna resurs:	1. 2. 3.
Skriv 2 saker du lärt dig	1. 2.
Skriv en sak som behöver bli bättre	1.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inledning

Är Möbius-bandet återupptäckt av August Ferdinand Möbius eller var det Möbius som upptäckte det? Redan de gamla grekerna använde symbolen Möbius så noggrant studerat för att beteckna evighet och oändlighet. Möbius upptäckte å andra sidan bandets matematiska egenskaper, det vill säga att det har en sida och en kant.

Bild 1

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Möbiusbandet

August Ferdinand Moebius, född 17 november 1790 i Schulpforta, död 26 september 1868 i Leipzig, var en tysk matematiker och astronom.

1816 blev Möbius extraordinär professor i astronomi och 1844 professor i högre mekanik och astronomi vid universitetet i Leipzig. Hans huvudsakliga forskningsarbete tillhör den rena matematiken, där han uppfann en ny geometrisk metod, den så kallade barycentriska beräkningen. Barycentriska beräkningar använder barycentriska koordinater.

Hans mest kända resultat är det så kallade Möbius-bandet, som är en icke-orienterbar yta som bara har en sida. Medan Möbius var helt upptagen med att tänka på hur detta band skulle kunna användas på olika sätt, samtidigt var en annan forskare som hette Listing inne på samma spår om en tvådimensionell remsa som bara har en sida och en kant. De två forskarna publicerade samtidigt artiklar om remsans funktioner och kom till samma resultat ungefär samtidigt men det var Möbius som till slut användes för att namnge remsan - och världen fick Möbiusbius-bandet.

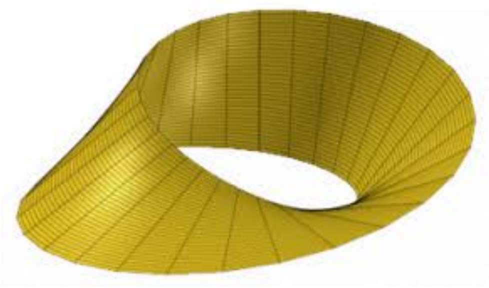


Bild 2: Möbiusbandet https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip_(plot).png

Möbiusbandet:

- är en lång rektangulär yta
- som roteras 180 grader med ändarna fast
- så att den längs sin nya väg har en sida och en kant.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

- Ytan är inte orienterbar och kommer tillbaka till samma punkt hela tiden men speglas eftersom den bara har en sida.

Inte bara Listing och Möbius fascinerades av den enkelsidiga remsan där ett streck kan målas på "alla" sidor utan att pennan lyftes. Än idag används Möbius-remsan i grafisk design eftersom den skapar en dynamisk och obegränsad bild. Inom science fiction-litteratur används Möbius-remsan som en beskrivning för ett möjligt universum.

Möbius-bandet är det matematiska objekt som används mest utanför matematikens värld. Om man jämför ett Möbius-band gjort av papper med en musikslinga, kommer du att se det som ett musikstycke som kan spelas igenom från början till slut och låta harmoniskt och melodiskt korrek. Detta är detsamma som att ta sig runt ett Möbius-band en gång. Sedan, om du går igenom det en andra gång, men börjar i slutet av stycket, så att den sista tonen blir den första tonen i stycket, låter det ändå bra. Där har du Möbius-musik.

Picture 3: Recycle symbol

Picture 4: Bracelet

Se ett musikaliskt Möbius-band här:
https://www.youtube.com/watch?v=3x03nJnk-wk

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Numera används Möbius-band bland annat i transportbandet som finns i kassan vid mataffärer. Bandet som transporterar varorna vi köper är format som ett Möbius-band, eftersom detta minskar slitage och därmed ökar livslängden. I början av industrialismen användes Möbius-bandet som kraftöverföringen mellan ångmotorer och de maskiner som ångmotorerna använde (svarvar, trösklar, etc.)

Picture 5: Knitted scarf

Du kan skapa ditt eget Möbius-band genom att ta en rektangulär pappersremsa, vrida ena änden ett halvt varv och fästa ihop ändarna. Om du nu tänker dig att någon eller något, till exempel en myra, kryper längs remsan, kommer den att vara på andra sidan bandet när den kommit ett varv. Således har Möbius-bandet en enda sida.

Ordlista

Barycentriska koordinater: I astronomi är barycentriska koordinater icke-roterande koordinater med ursprung i barycentret för två eller flera kroppar.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Matematiken bakom Möbius-bandet

Även om Möbius-bandet inte är en cirkel, handlar det om begreppet oändlighet. man kan säga att cirkeln och Möbius-bandet är lika på det viset. Naturligtvis kan du inte beräkna omkretsen på ett Möbius-band, men det finns en koppling mellan cirkeln och längden på en linje.

Radie och diameter

En cirkel är en rund geometrisk figur som utgår från en mittpunkt. På ett visst avstånd från centrum finns det som kallas cirkelns omkrets, som är den rundade kurvan som bildar formen på själva cirkeln. Avståndet från mittpunkten till kanten kallas cirkelns radie och är lika lång oavsett vilken punkt på kanten vi väljer.

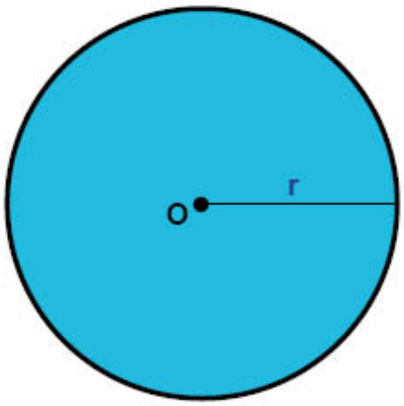
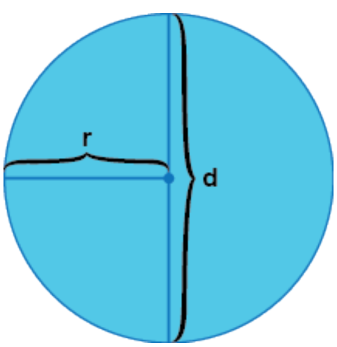


Bild 6: Cirkel

Om vi har en rak linje som går mellan två punkter på en cirkelns omkrets och passerar genom mitten, kallar vi det avståndet för cirkelns diameter (**d**). I figuren nedan är både radien **r** och diametern **d** markerade.



Bil 7: Cirkel med diameter och radie

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Cirkelns diameter är alltid dubbelt så lång som cirkelns radie:

$$d = 2r$$

Cirkulär omkrets och talet pi (π)

När man studerar omkretsen av fyrhörningar och trianglar kan man se att dessa figurers omkrets är lika med summan av sidornas längd.

Men när vi studerar cirklar är det inte lika lätt att beräkna omkretsen. Men om vi mäter omkretsen och diametrarna för olika cirklar, kommer vi snart att märka att vi får samma förhållande varje gång vi delar omkretsen för en cirkel, **O** och cirkelns diameter, **d**.

Detta förhållande är detsamma för alla cirklar och har ungefärligt värde 3.14159265, när vi avrundar värdet till åtta decimaler. Detta tal är mycket viktigt i matematik och kallas talet pi, efter den grekiska bokstaven π. Således är förhållandet mellan omkretsen och diametern för en cirkel ≈≈ 3,14

Med definitionen av talet π kan vi skriva en formel för omkretsen av en cirkel, O:
Omkretsen = π ·diameter

$$O = \pi \cdot d$$

Eftersom diametern **d** för en cirkel alltid är dubbelt så lång som radien **r** i cirkeln, kan vi också skriva formeln för cirkelns omkrets med radien, så här:
omkrets = 2·π· radie

$$O = 2\pi r$$

En cirkelomkrets är oändlig och i uppgiften nedan kan du se förhållandena mellan det lilla och stora hjulet som en obestämd relation mellan varandra.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

UPPGIFT

Cykel

a. Hur många varv roterar bakhjulet medan framhjulet roterar ett varv. Framhjulets diameter är 75 cm. Bakhjulets diameter är 25 cm.

b. Hur långt kommer framhjulet gå om bakhjulet snurrar ett varv.

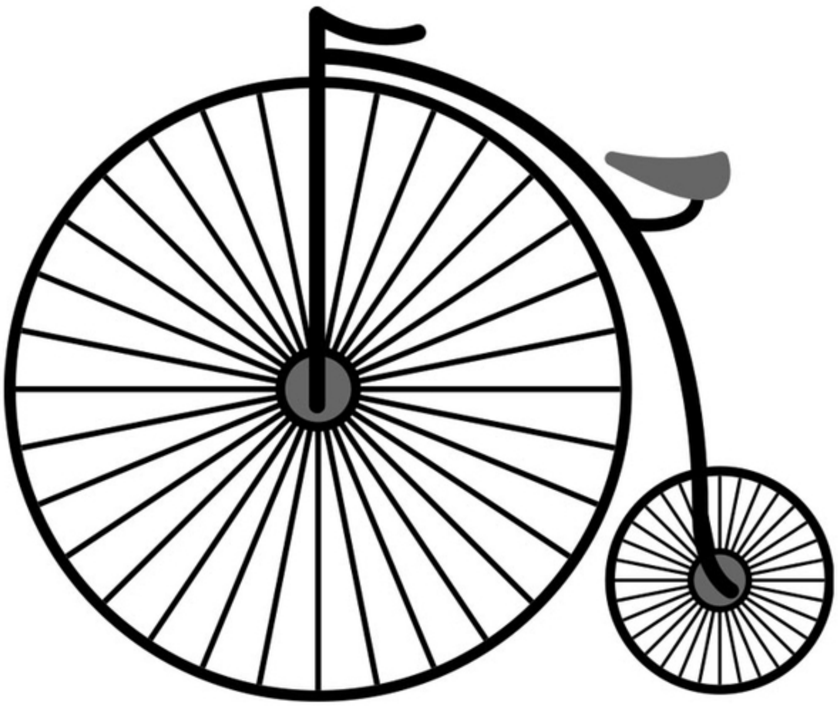


Bild 8: Gammal cykel

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

LÄR DIG MER…

Myror som går på ett Möbius-band

https://www.youtube.com/watch?v=ZN4TxmWK0bE

Två lektioner om Möbius-band

https://www.youtube.com/watch?v=JNtKcK27x1s

https://www.youtube.com/watch?v=1xKiSSVY5bI

En kort science fiction med Möbius-band

https://www.youtube.com/watch?v=HD9MYY0aPug

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.