DEL II: Musik & Matematik

ÅLDER: 16-18

TOOL 22: MUSIK OCH FIBONACCI

LogoPsyCom

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Lärarguide

Titel: Musik och Fibonacci

Ålder: 16-18 år

Längd: 2 timmar

Matematikinnehåll: Gyllene tal, gyllene snittet, Fibonaccis talföljd

Konstinnehåll: Forntida grekisk musik, muser, harmoni

Allmänna mål: Att upptäcka de matematiska begreppen som finns dolda i musikaliska kompositioner och förstå den logiska processen som ligger bakom dessa.

Instruktioner: Eleverna kommer att utforska båda fälten I sin helhet, genom att lyssna på musiken eller spela den och titta på de filmer som föreslås där musikalisk komposition analyseras. De kommer att upptäcka grunden för de nämnda matematikbegreppen.

Resurser: Den här uppgiften innehåller filmer och Internet-resurser som du kan använda i klassrummet. De ämnen som behandlas kommer att vara en inspiration för dig när du vill anpassa och variera lektioner.

Tips till läraren: Att lära sig genom att göra är mycket effektivt, särskilt för unga elever med inlärningssvårigheter. Uppmuntra dem att experimentera med ett musikinstrument, om det går.

Mål: I slutet av denna uppgift ska eleven kunna:

- Förstå den logiska processen bakom musikkomposition;
- Förstå användningen av gyllene snittet och Fibonaccis talföljd i musik;
- Beräkna en okänd term i Fibonaccis talföljd.

Utvärdering:

Skriv 3 saker som du tyckte om med denna uppgift	**1.** **2.** **3.**
Skriv 2 saker som du lärt dig	**1.** **2.**
Skriv 1 sak som kan förbättras	**1.**

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inledning

Musik och matematik har inte en uppenbar koppling för dem som aldrig har komponerat eller läst ett notblad. Det är dock tydligt att tiden i musikaliska kompositioner och strukturen av bladet med mått kommer av ett matematiskt sätt att tänka.

Många forskare har studerat förekomsten av matematik i konsten. Musik var en av fokuspunkterna i dessa studier och det konstaterades att under hela historien hade många matematiker undersökt denna fråga. Pythagoras, Leonardo Bonacci och många andra har bidragit till forskningen. Olika aspekter av matematik, allt från grundgeometri och nummersekvenser till trigonometri, har visat sig användas i musikaliska kompositioner.

I denna uppgift kommer vi att fokusera på matematikens användbarhet i musikaliska kompositioner genom att först undersöka gyllene snittet och Fibonaccis talföljd och sedan utforska alternativen de erbjuder för musikkomposition.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Gudomliga proportioner i musik

I antikens Grekland var folk förtjust i kreativ konst, där musik var mycket viktigt eftersom den ofta åtföljde andra kreativa verk som teater eller poesi. De trodde att varje konstnär var inspirerad av en musa.

Se denna TED-Ed-video som förklarar fenomenet med mer detaljer: https://www.youtube.com/watch?v=-1aAunaw1GA.

Denna centrala roll som musiken spelade i samhället inspirerades inte bara av muser. Grekaren hade också upptäckt ett perfekt förhållande som kallas "det gyllene snittet" eller "den gudomliga andelen". Det här förhållandet är nära kopplat till Fibonaccis talföljd som du kommer att lära dig om senare. Du har förmodligen sett dem mer än en gång, utan att lägga märka till dem. Du kan hitta dem såväl i antik arkitektur som i naturen och i målningar. Vad de flesta inte vet är att man också kan höra det gyllene snittet och Fibonaccis talföljd!

Här är två exempel på var du kan se dem

• Solrosen innehåller Fibonaccis talföljd;
• Detta grekiska tempel har den gyllene rektangelns gudomliga proportionerna:

Bild 1: Solros med Fibonaccis talföljd

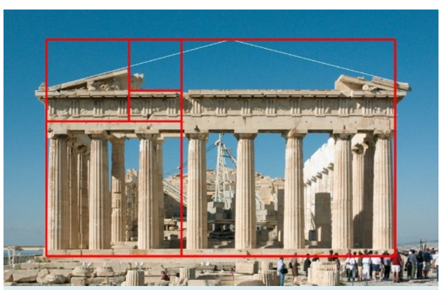


Bild 2: Grekiskt tempel med gyllene snittet

[1]

Här kan du lära dig mer om hur Fibonaccis talföljd representeras i naturen: https://www.youtube.com/watch?v=_GkxCIW46to.

[1] Bilder från: https://www.telitec.com/2019/05/27/golden-ratio/

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Fibonaccis talföljd är baserad på de perfekta proportionerna i gyllene snittet, vilket gör det till en stor inspiration för musiker att experimentera i sina kompositioner med. Du hittar många olika tolkningar av hur gyllene snittet och Fibonaccis talföljd kan användas i musikaliska kompositioner. Vissa bestämmer sig för att spela ett antal toner som motsvarar Fibonacci-talen, vissa låter dessa tal bli pianots tangenter,…

Du kan titta på följande videoklipp för att höra hur musik som är kopplad till Fibonaccis talföljd och gyllene snittet låter.

I den här filmen använder musikerna det gyllene numret: https://www.youtube.com/watch?v=W_Ob-X6DMI4.

Musikerna i den här videon försöker komponera baserat på Fibonaccis talföljd och gyllene snittet: https://www.youtube.com/watch?v=9mozmHgg9Sk

Ordlista

Grekisk kreativ konst: I det antika grekiska samhället var skapande konst historia, komedi, poesi, sång, hymner, episk poesi, dans, astronomi, tragedi. Varje konst tros vara inspirerad av en musa.

Harmoni: ett välklingande musikaliskt ljud som skapas av olika toner som spelas eller sjungs samtidigt.

Leonardo Bonacci, eller Fibonacci var en italiensk matematiker född på 1100-talet. Han är mest känd för sin talföljd, som finns i många olika sorters kreativ konst.

Musa: I det antika Grekland var muser gudinnor som inspirerade människans kreativitet. Nuförtiden använder vi ordet för alla människor, mänskliga eller gudomliga, som ger inspiration till en konstnär i deras arbete.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Matematiken bakom musikskapande

Gyllene snittet:

Det gyllene talet är ett unikt nummer i matematik. Det är ungefär **1,618** och används ofta inom konst, musik, arkitektur etc.

Vi använder den grekiska bokstaven **φ (phi)** för att benämna det.

Gyllene snittet är användningen av detta tal i olika områden. Föreställ dig att vi skär en linje i **två** olika delar a och b. När vi använder det gyllene snittet är **hela längden** dividerad med **långsidan** lika med **långsidan** dividerad med **kortsidan**.

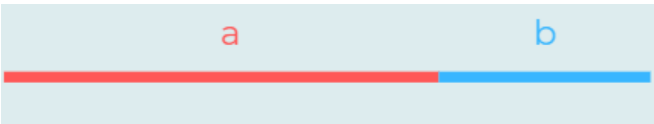


Bild 3: Linje delad enligt gyllene snittet

Kom ihåg denna formel:

$$\varphi = \frac{(a+b)}{a} = \frac{a}{b} = 1,618$$

Det gyllene snittet kan sedan appliceras på en rektangel, kallat den **gyllene rektangeln**. Eftersom det sågs som den mest perfekta formen i antiken, använde många konstnärer och arkitekter den i sitt arbete.

Som vi har gjort med **linjen ab**, låt oss dela upp en **rektangel AB** i två olika delar: en **kvadrat A** och en **rektangel B** där alla sidor på kvadraten och rektangelns långa sidor har en längd av **a** och kortsidorna av rektangeln en längd av **b**.

För att få den perfekta rektangeln kommer vi att använda samma formel. Föreställ dig till exempel att kvadraten A är 2 cm x 2 cm. Om vi vill hitta sidan b:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Vi vet att:

- $\frac{A}{b} = 1{,}618$
- a = 2

Vi kan säga att:

- $\frac{2}{b} = 1{,}618$
- 2 = b x 1,618

Om vi löser ut b:

$b = \frac{2}{1{,}618} = 1{,}236$

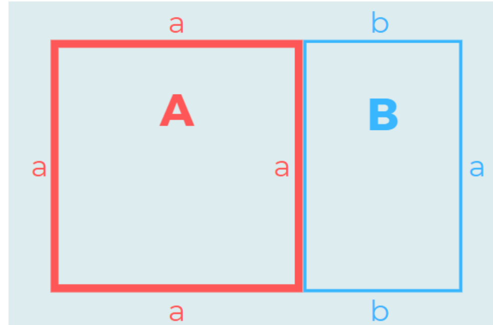
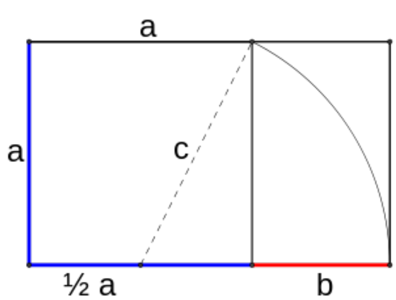


Bild 4: Rektangel delad med gyllene snittet

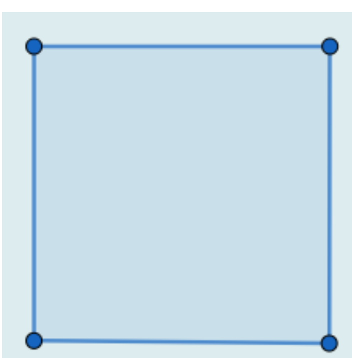
Vi kontrollerar med bägge formlerna:

- $\frac{2 + 1{,}236}{2} = 1.618$
- $\frac{2}{1.236} = 1{,}618$

Du kan också använda en passare och linjal för att rita den perfekta rektangeln:



1. Placera spetsen på din passare mitt på basen av kvadraten.
2. Öppna den till motsatt hörn.
3. Rita en kurva från förlängningen av basen till dess motsatta vinkel.
4. Rita rektangeln B från början av kurvan till förlängningen av topp- och undersidan av fyrkant A.



This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Fibonaccis talföljd:

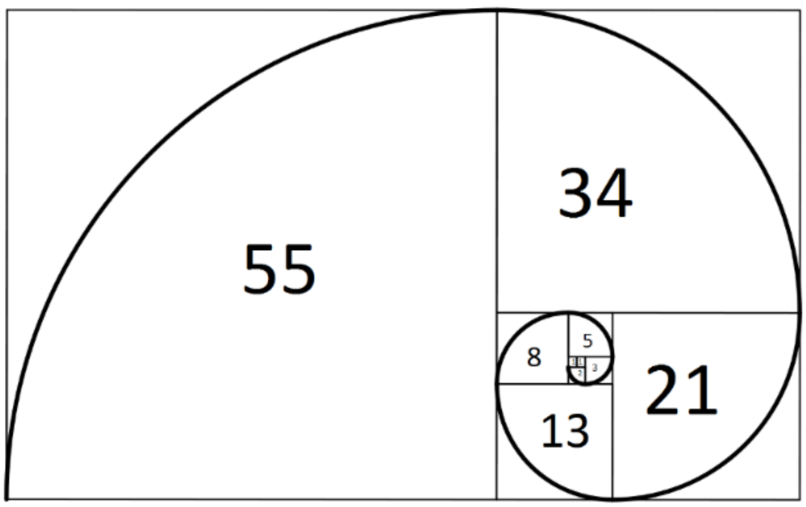
Fibonaccis talföljd är en serie tal där nästa hittas genom att lägga till de två föregående..
0+1=1→ 1+1=2 → 1+2=3 → 2+3=5 → 3+5=8 → 5+8=13 ...

Det gyllene snittet förknippas ofta med Fibonacci-talen.

Vilka är de nästa tre talen??

__8+13=21___________________________________
__13+21=34___________________________________
__21+34=55___________________________________

När vi gör kvadrater med dessa sidor får vi en fin spiral:



[2]

Bild 5: Representation av gyllene snittet med Fibonaccis talföljd

Se hur vi får sidan på kvadrat 13 om vi lägger till sidorna på kvadraterna 5 och 8.

Observera också att förhållandet i de formade rektanglarna går närmare och närmare pi.

I rektangeln bildad av rutorna 21 och 13:

a = 21

b = 13

[2] https://codegolf.stackexchange.com/questions/53369/fibonacci-spiral

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Formeln ger: $\frac{a}{b}$ =1,615

Nästa gyllene rektangel som bildas av kvadraterna 34 och 21:

a = 34

b = 21

$\frac{a}{b}$ =1,619

Resultaten är inte exakt det gyllene talet, men de är väldigt nära, vilket visar hur Fibonaccis talföljd är kopplad till det gyllene snittet!

Talföljden kan skrivas matematiskt såhär:

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n =	0	1	1	2	3	5	8	13	21

Talet 7 ger n_7 =13

Här är regeln:

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

:

x_n är talet "n"

x_{n-1} är föregående al (n-1)

x_{n-2} är talet innan det (n-2)

Eftersom Fibonaccis talföljd är mycket nära det gyllene snittet, kan vi använda pi för att hitta valfritt tal i följden med denna formel::

$$x_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

Om vi tittar på talen i talföljden kan vi se ett intressant mönster:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Vi ser att:

- x_3 = 2 och att var tredje tal är en multipel av två (2; 8; 34; 144; 610)
- x_4 = 3 och var fjärde tal är en multipel av tre (3; 21; 144)
- x_5 =5 och var femte tal är ett multipel av fem (5; 55; 610)

Vi tittar på förhållandena (r) mellan talen:

R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8
1	1	1,5	1,666	1,6	1,625	1,615	1,619

Vi märker att de **udda förhållandena** (R1, R3, R5, R7) alltid ligger **under** det gyllene talet, medan de **jämna förhållandena** (R2, R4, R6, R8) alltid ligger **över** det.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

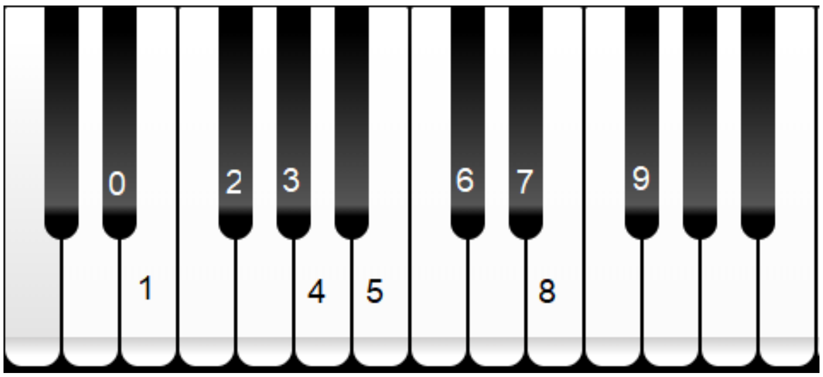
UPPGIFT

Denna uppgift gör att du kan använda den matematik du har lärt dig om gyllene snittet och Fibonacci i en musikalisk komposition.

Spela!

Nu tar vi reda på de siffror man måste spela på piano för att använda Fibonaccis talföljd.

Kom ihåg: i detta fall är siffrorna 0 till 9 belägna enligt bilden på tangenterna.



Använd detta internet-piano: https://virtualpiano.net/

eller ladda ner en virtuell piano-app i Play Store eller i App Store

1. Fyll i följande tabell med siffrorna du måste spela på tangentbordet.

x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}

Använd formeln $x_n = \frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$ för att hitta talen som saknas:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

$x_{16} = \frac{\varphi^{16} - (1-\varphi)^{16}}{\sqrt{5}} = 987$

$x_{17} = \frac{\varphi^{17} - (1-\varphi)^{17}}{\sqrt{5}} = 1597$

$x_{18} = \frac{\varphi^{18} - (1-\varphi)^{18}}{\sqrt{5}} = 2584$

$x_{19} = \frac{\varphi^{19} - (1-\varphi)^{19}}{\sqrt{5}} = 4181$

$x_{20} = \frac{\varphi^{20} - (1-\varphi)^{20}}{\sqrt{5}} = 6765$

Nu kan du spela dessa tal var för sig på tangentbordet och lyssna på Fibonaccis talföljd!

Resultat:

Det här musikaliska experimentet av aSongScout visar hur man använder Fibonaccis talföljd i musikaliska kompositioner: https://www.youtube.com/watch?v=IGJeGOw8TzQ.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

LÄR DIG MER…

Film om Fibonaccis talföljd och gyllene snittet i musikkomposition:

https://www.youtube.com/watch?v=9mozmHgg9Sk

Fibonaccis talföljd och gyllene snittet i naturen

https://www.youtube.com/watch?v=_GkxCIW46to

Att skriva en melodi med Fibonaccis talföljd och gyllene snittet:

http://www.faena.com/aleph/articles/how-to-compose-a-song-with-the-golden-ratio-and-the-fibonacci-sequence/

Råd om Fibonaccis talföljd I musikskapande:

https://www.classicfm.com/discover-music/fibonacci-sequence-in-music/

Artikel om matematiska studier i musik:

http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/1/covered/MIMS_ep2010_103.pdf

Artikel om ett Fibonacci-stycke :

http://ww.nntdm.net/papers/nntdm-20/NNTDM-20-1-72-77.pdf

TED Talk om hur Fibonaccis talföljd finns bland oss:

https://www.youtube.com/watch?v=0vVxL60YFJU

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.