DEL II: Musik & Matematik

ÅLDER: 16 – 18

“Brun fiol”
(Källa: https://www.pexels.com/photo/brown-violin-697672/)

UPPGIFT 21: TRIGONOMETRISKA FUNKTIONER I HARMONISKA SERIER

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Lärarguide

Titel: Trigonometriska funktioner i harmoniska serier

Ålder: 16–18 år

Längd: 3 timmar

Matematikinnehåll: Trigonometriska funktioner

Konstinnehåll: Harmoniska serier i musik, toner, toners frekvens och ljudvågor.

Allmänna mål: Förstå begreppet trigonometriska funktioner, beräkna perioden för grafen för en trigonometrisk funktion och lösa trigonometriska ekvationer.

Instruktioner: Det kommer att behövas en grafritande kalkylator (till exempel den grafiska kalkylatorn Desmos som finns på Internet) för att visa graferna för eleverna och för att presentera lösningarna för de trigonometriska ekvationerna. För att eleverna ska få en tydligare bild av vibrationslägena, visa filmen "Lägen på en sträng" - (se "Lär dig mer ...") efter respektive förklaring.

Resurser: Penna; Dator med internetanslutning; Tillgång till webbplatsen: https://www.desmos.com/

Tips till läraren: Börja med att visa grafer för trigonometriska funktioner och förklara deras egenskaper. Lös en trigonometrisk ekvation för var och en av de tre funktionerna som ingår i uppgiften så att eleverna kan lösa dem själva sedan.

Mål: I slutet av denna uppgift ska eleven kunna:

- Skapa grafen för en trigonometrisk funktion;
- Beräkna perioden för en trigonometrisk funktion;
- Lösa ekvationer av typen $\sin x = a$, $\cos x = a$ och $\tan x = a$.

Utvärdering:

Skriv 3 saker som du tyckte om med denna uppgift	**1.** **2.** **3.**
Skriv 2 saker som du lärt dig	**1.** **2.**
Skriv 1 sak som kan förbättras	**1.**

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inledning

Matematik och musik har alltid hängt ihop. Men det var först under sjätte århundradet f.v.t. som de första bevisen på detta förhållande upptäcktes. Pythagoras jämförde ljudet som producerades av hammare av olika storlekar, som användes av smeder, med ljudet från monokorden, som man tror att Pythagoras var uppfinnaren.

Denna jämförelse gjorde det möjligt för Pythagoras att upptäcka och utforska de matematiska orsakerna bakom ljuden genom att studera ljuden som producerades av monokorden. Han delade strängen i två lika delar, sedan i tre lika delar och så vidare. Han matchade ljuden matematiskt enligt de underavdelningar han skapade och skapade den pythagoreiska skalan, där varje ton hade en väldefinierad relation med den andra.

Många människor och kulturer har skapat sina egna skalor. Ett exempel var det kinesiska folket som har skapade den pentatoniska skalan. Västerländsk kultur antog emellertid en 12-tonsskala, känd som en tempererad eller kromatisk skala.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Harmoniserier

Det är allmänt känt att de naturliga tonerna är A, B, C, D, E, F och G. Trots detta representeras dessa i de flesta länder av den så kallade solfegeskalan Do – Re – Mi – Fa – Sol – La – Ti (eller Si) enligt följande: C-Do, D-Re, E-Mi, F-Fa, G-Sol, A-La och B-Ti (eller Si). Definitionen av dessa toner påverkades i stor utsträckning av matematik.

Under sjätte århundradet f.v.t. insåg Pythagoras att en sträng som vibrerar inte bara vibrerar i sin fulla utsträckning, utan den bildade också en serie noder, som delar upp i mindre sektioner, partierna, som vibrerar vid frekvenser som är högre än det grundläggande.

För att studera förhållandet mellan längden på den vibrerande strängen och den musikaliska tonen som produceras av den, använde Pythagoras en monokord.

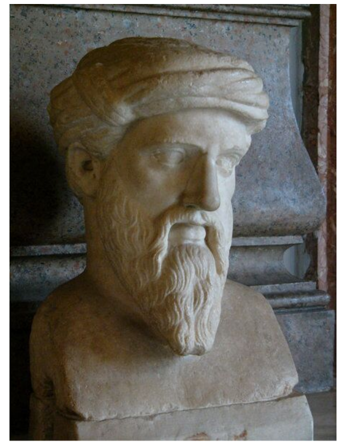

Bild 1 – Byst av Pythagoras
(Källa:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg)

Bild 2 visar noder och partiella delar av de första fyra frekvenserna i en serie. För en enkel förståelse visas de separat, men på en verklig sträng överlappar alla varandra, vilket genererar en komplex design, liknande instrumentets vågform.

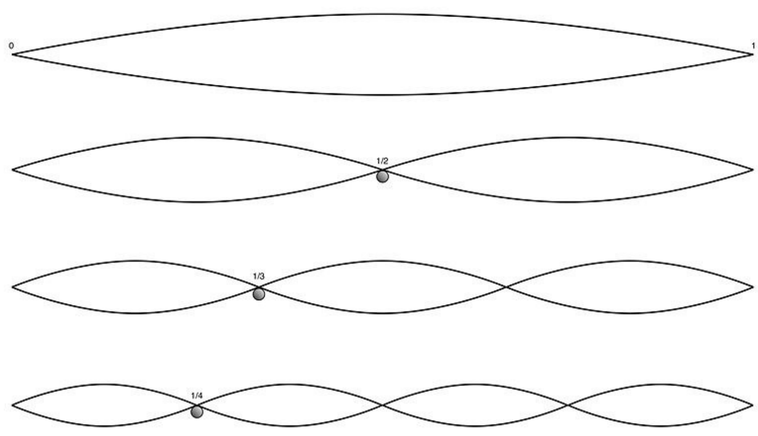

Bild 2 – Vibrationssätt och de första 4 harmonierna
((Källa:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Föreställ dig en spänd sträng som sitter fast i sina ändar. När vi rör den ena änden av den här strängen, vibrerar den (bild 3) och producerar en ton som kallas en grundton.

Bild 3 – Vibrationssätt för en grundton1(f)
(Källa:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Pythagoras beslutade att dela en sträng i två delar (bild 4) och röra vid en av delarna i mitten. Ljudet som producerades var detsamma, men med en högre frekvens (vanligtvis uttryckt som "samma ton, en oktav högre"). Det har sedan bevisats att närhelst antalet uppdelningar (eller det harmoniska antalet) är ett multipel av ett tidigare nummer, så kommer ljudet att upprepas men med en högre tonhöjd.

Bild 4 – Vibrationssätt för en grundton 2(f)
(Source:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Han bestämde sig sedan för att prova hur det skulle låta om strängen delades upp i 3 delar (bild 5) och märkte att ett nytt ljud, annorlunda än det föregående, hördes. Den här gången var det inte den "samma ton, en oktav högre", utan en helt annan ton, som förtjänade ett annat namn – en kvint.

Fig. 5 – Vibrationssätt för en grundton 3(f)
(Källa:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Ljudet, även om det var annorlunda, matchade bra med det föregående ljudet. Det skapade en trevlig harmoni i örat, som hade att göra med det faktum att uppdelningarna hade de matematiska relationerna 1/2 och 2/3. Med delningen av strängen i fyra delar fick han en ton som nu kallas ”decima”. Dessa tre toner överensstämmer med den grundtonen.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

På detta vis fortsatte han att dela strängen, erhålla harmoniken i den grundläggande tonen, och genom att matematiskt kombinera ljuden skapade han skalor som resulterar i toner som är naturligt relaterade till varandra. Med tiden har tonerna fått de namn vi känner till idag.

I denna process påverkas varje ton av den grundläggande frekvensen som skapar andra övertoner, vilket resulterar i en serie frekvenser - den harmoniska serien. De harmoniska serierna är oändliga serier, sammansatta av sinusformade vågor med alla heltalets flera frekvenser för grundfrekvensen. Det finns inte en, enkel, harmonisk serie utan snarare en serie för varje grundläggande frekvens.

Vi tittar på ett exempel på en harmonisk serie som börjar vid A2/Lá1 (110 Hz). De första 16 övertonerna för den serien kan ses i följande tabell:

Harmoni #	Ton (Svenska)	Ton (Latin)	Frekvens (Hz)
1 (F)	A_2	$Lá_1$	110
2	A_3	$Lá_2$	220
3	E_4	Mi_3	330
4	A_5	$Lá_3$	440
5	$C^{\#}_5$	$Do^{\#}_4$	550
6	E_4	Mi_4	660
7	G_4	Sol_4	770
8	A_5	$Lá_4$	880
9	B_5	Si_4	990
10	$C^{\#}_6$	$Do^{\#}_5$	1100
11	$D^{\#}_6$	$Ré^{\#}_5$	1210
12	E_6	Mi_5	1320
13	$F^{\#}_6$	$Fá^{\#}_5$	1430
14	G_6	Sol_5	1540
15	$G^{\#}_5$	$Sol^{\#}_5$	1650
16	A_6	$Lá_5$	1760

Tabell 1 – De första 16 harmonierna

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ljudvågor

När ett musikinstrument producerar ett ljud, vibrerar det och en serie sinusformade vågor produceras. Förutom den grundläggande frekvensen som definierar tonen, sänds också flera harmoniska frekvenser ut (en våg med en frekvens som är en positiv heltalsmultipel av frekvensen för den ursprungliga vågen). På detta sätt leder förekomsten av flera frekvenser i samma tidsintervall, producerad av samma ljudkälla, till bildandet av komplexa och oregelbundna vågor, som är resultatet av summan av enkla sinusformiga harmonier, som visas i figur 6.

Bild. 6 – Skapandet av en oregelbunden ljudvåg
(Källa: Författaren, på Desmos)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ordlista

Decima: intervall mellan en ton och en annan, som är tre toner från den första, inom samma skala.

Frekvens: fysisk enhet som anger antalet händelser i en serie under en given tidsperiod.

Grundfrekvens: den lägsta och starkaste frekvensen i en harmonisk serie för ett ljud.

Grundton: huvudton i ett ackord, som de andra ackorden härrör från

Harmoni: samtidig kombination av ljud.

Harmonisk serie: uppsättning vågor sammansatta av grundfrekvensen och alla heltalsmultiplar för denna frekvens.

Monokord: ett gammalt musikinstrument bestående av en resonanslåda, med en enda sträng fäst med två mobila stöd.

(Musikalisk) Skala: ordnad tonföljd efter vibrationsfrekvensen för ljud (vanligtvis från ljud med lägsta frekvens till högsta frekvens).

Oktav: intervall mellan en ton och en annan med hälften eller två gånger frekvensen.

Pentatonisk skala: alla skalor som består av fem toner eller fler.

Sinuskurva: en matematisk kurva som beskriver en jämn periodisk svängning.

Tempererad Skala: uppdelning av oktaven i tolv lika halvtoner.

Tonhöjd: är om en ton låter högt eller lågt och mäts i Hertz. Människan kan höra toner över 5 Hz.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Matematiken bakom harmoniska serier: Trigonometriska funktioner

När ett musikinstrument producerar ljud, vibrerar det och en serie sinusformiga vågor släpps ut. När de är isolerade följer dessa vågor följande matematiska funktion:

$\mathbf{f(x) = sin\,(f_i.\,2\pi x)}$, där $\mathbf{f_i}$ är frekvensen för ordningen i harmonien $\mathbf{i}$.

Vi tittar på ett exempel: om frekvensen för en harmoni är 1, kommer vågorna att se ut så här:

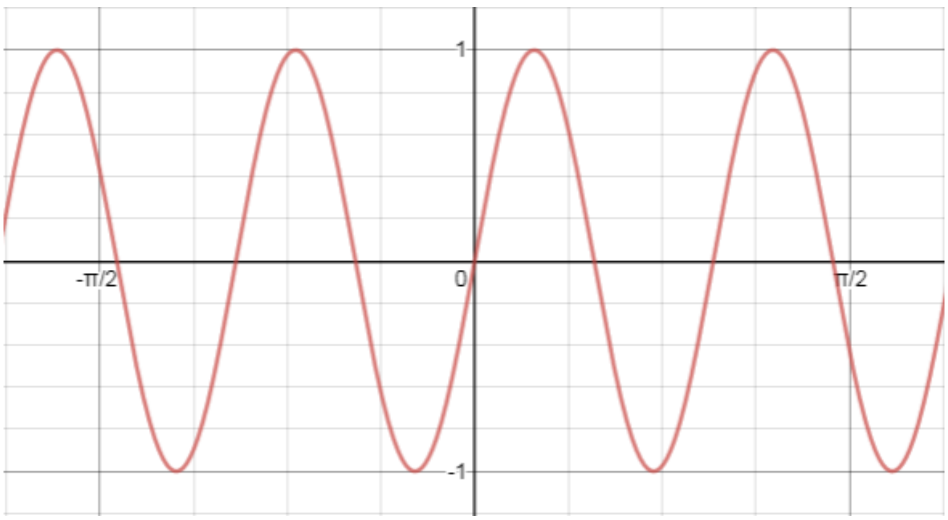

Bild 7 – Sinusvågor för $\mathbf{f(x) = sin(f_i.2\pi x)}$ där $\mathbf{f_i = 1}$.
(Källa: Författaren, på Desmos.com)

Här kommer ett avsnitt med trigonometri och trigonometriska funktioner för att vi bättre ska förstå sinusvågor.

1. Trigonometriska funktioner

Trigonometriska funktioner som verkliga funktioner för verkliga variabler

Om något reellt tal $\mathbf{x}$ matchar ett och bara ett reellt tal $\mathbf{y}$ så att $\mathbf{y = sin\,x}$ och $\mathbf{y = cos\,x}$, då $\mathbf{y = sin\,x}$, $\mathbf{y = cos\,x}$ och $\mathbf{y = tan\,x}$ ($\mathbf{tan\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}}$) betraktas nu dessa som verkliga funktioner av verklig variabel.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Domän, underdomän, extrema och nollor i trigonometriska funktioner

I en funktion $\mathbf{f(x)}$, är x-värdet vilket som helst reellt tal och kallas vanligtvis **domän**. Uppsättningen Y inom vilken all utgång från funktionen är begränsad att falla kallas **underdomän**. Med andra ord, alla värden som går in i en funktion är domänen och värdet som kommer ut är underdomänen.

Vid modellering av en function $\mathbf{f(x)}$, kommer du att märka att det har ett största och ett lägsta värde. Dessa är **extrema** och motsvarar den **maximala** och **minsta** punkten i en funktion. Dessutom kan en funktion ha nollor. Dessa är skärningspunktarna i x-axeln, det vill säga nollens funktion är ett ingångsvärde som ger en utgång på 0.

Se graferna för funktionerna: $\mathbf{y = \sin x}$, $\mathbf{y = \cos x}$ och $\mathbf{y = \tan x}$ i intervallet $[\mathbf{-2\pi, 2\pi}]$.

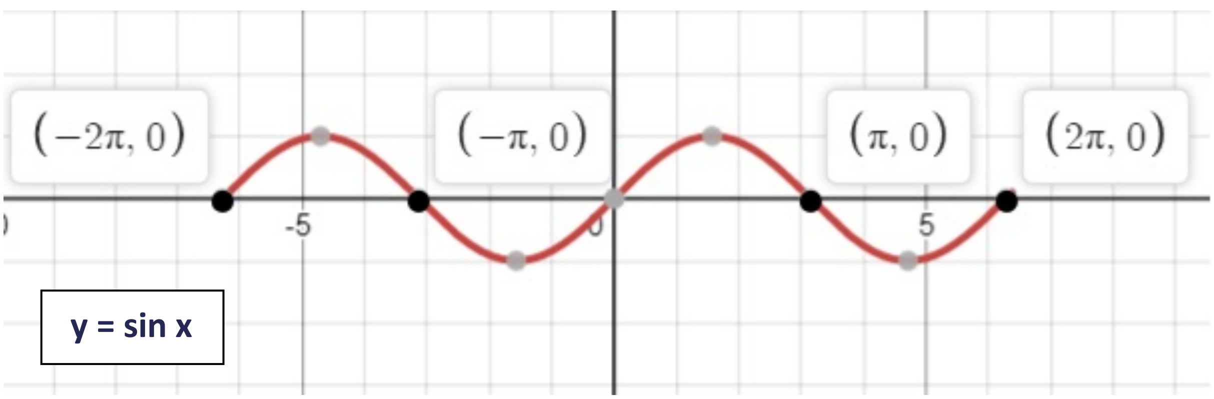

Bild 8 – Grafisk representation av y=sin x
(Källa: Författaren, på Desmos.com)

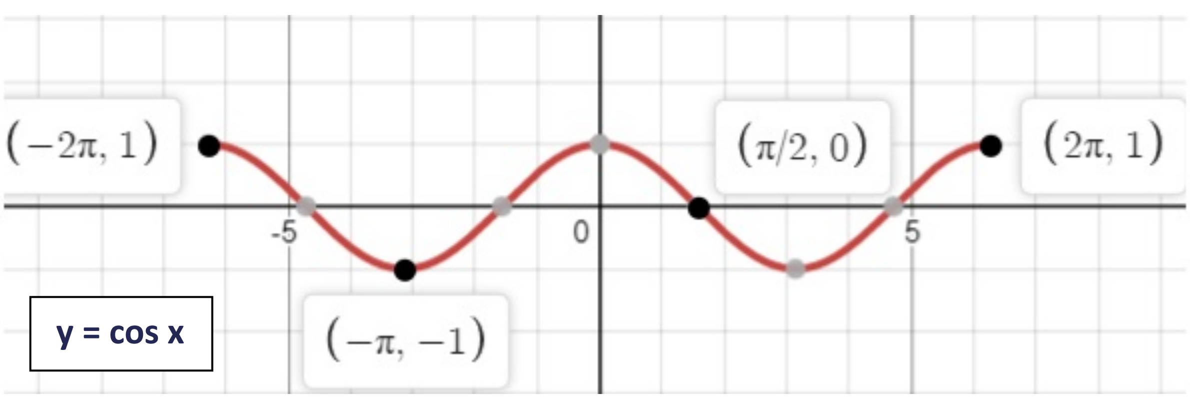

Bild 9 – Grafisk representation av y=cos x
(Källa: Författaren, på Desmos.com)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

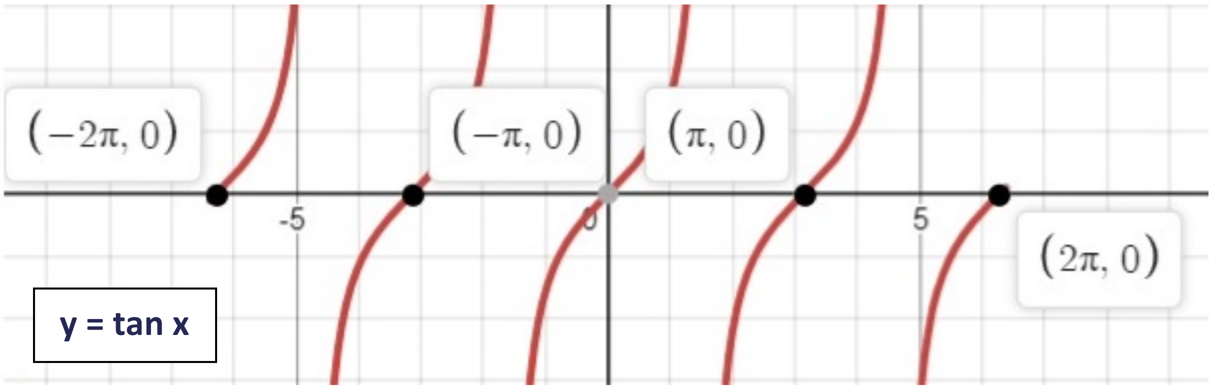

Bild 10 – Grafisk representation av y=tan x
(Källa: Författaren, på Desmos.com)

Genom att observera graferna är det möjligt att dra slutsatsen att:

Funktion	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
Domän	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \epsilon \mathbb{Z}\right\}$
Underdomän	[-1 , 1]	[-1 , 1]	$\mathbb{R}$
Maxpunkt	1 to: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \epsilon \mathbb{Z}$	1 to: $x = 2k\pi, k \epsilon \mathbb{Z}$	------
Minsta punkt	-1 to: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	-1 to: $x = \pi + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	------
Nolla	$x = k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$	$x = k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

2. Monotoni i trigonometriska funktioner

När man studerar de föregående graferna i intervallet$[-2\pi, 2\pi]$, kan man dra slutsatsen att:

- $\sin(x)$ ökar i $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, och minskar i $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ och i $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$;
- $\cos(x)$ ökar i $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ och i $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, och minskar i $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ och i $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$;

Angående funktionen $y = \tan x$, kan man dra slutsatsen att funktionen ökar vid alla intervall där den definieras.

3. Symmetri och paritet för trigonometriska funktioner

Jämna funktioner

- En funktion f är jämn om, och bara jämn om $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.
- Grafen för en jämn funktion är symmetrisk med avseende på y-axeln.

Funktionen $y = \cos x$ är en **jämn funktion**, det vill säga, $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Udda funktioner

- En funktion f är udda om, och bara om $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.
- Grafen för en udda funktion är symmetrisk med avseende på koordinaternas ursprung

Funktionen $y = \sin x$ är en **udda funktion**, det vill säga, $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Funktionen $y = \tan x$ är en **udda funktion**, det vill säga, $\tan(-x) = -\tan x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

4. Trigonometriska funktioners period

Funktionen $\mathbf{f}$ är periodisk **period** $\mathbf{p}$ om $\mathbf{p}$ är den minsta positiva konstanten, så att $\mathbf{f(x+p)=f(x)}$ för samtliga $\mathbf{x}$ i $\mathbf{f}$ domänen.

- Perioden för funktionen $y = \sin x$ is 2π: $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x, \forall x \epsilon \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{Z})$;
- Perioden för funktionen $y = \cos x$ is 2π: $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x, \forall x \epsilon \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{Z})$;
- Perioden för funktionen $y = \tan x$ is π: $\tan(x + k\pi) = \tan x, \forall x \epsilon \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Generellt, när $\mathbf{k \neq 0}$:

Funktion	$\mathbf{y = A + B\sin(kx + C)}$	$\mathbf{y = A + B\cos(kx + C)}$	$\mathbf{y = A + B\tan(kx + C)}$
Period	$\mathbf{\frac{2\pi}{\lvert k \rvert}}$	$\mathbf{\frac{2\pi}{\lvert k \rvert}}$	$\mathbf{\frac{\pi}{\lvert k \rvert}}$

5. Att lösa ekvationer av typen $\sin x = a$

Generellt, för att lösa, i $\mathbb{R}$, en ekvation av typen $\mathbf{\sin x = a}$ behöver följande beaktas:

- En ekvation av typen $\sin x = a$ har endast en lösning om $a \in [-1,1]$.
- I intervallet $[0,2\pi]$ finns det två värden som har samma sin värde: α och $\pi - \alpha$.
- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lös, i $\mathbb{R}$, ekvationen $\mathbf{\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

➔ Steg 1:

Hitta en lösning till $\mathbf{\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Vi vet att $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ och att $\sin(-x) = -\sin x$. Därför är $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

En lösning till ekvationen är $-\frac{\pi}{4}$.

➔ Steg 2:

Beräkna $\pi - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

➔ Steg 3:

Skriv den allmänna lösningen för ekvationen: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Genom att använda kalkylatorn Desmos kan vi bekräfta de två erhållna värdena:

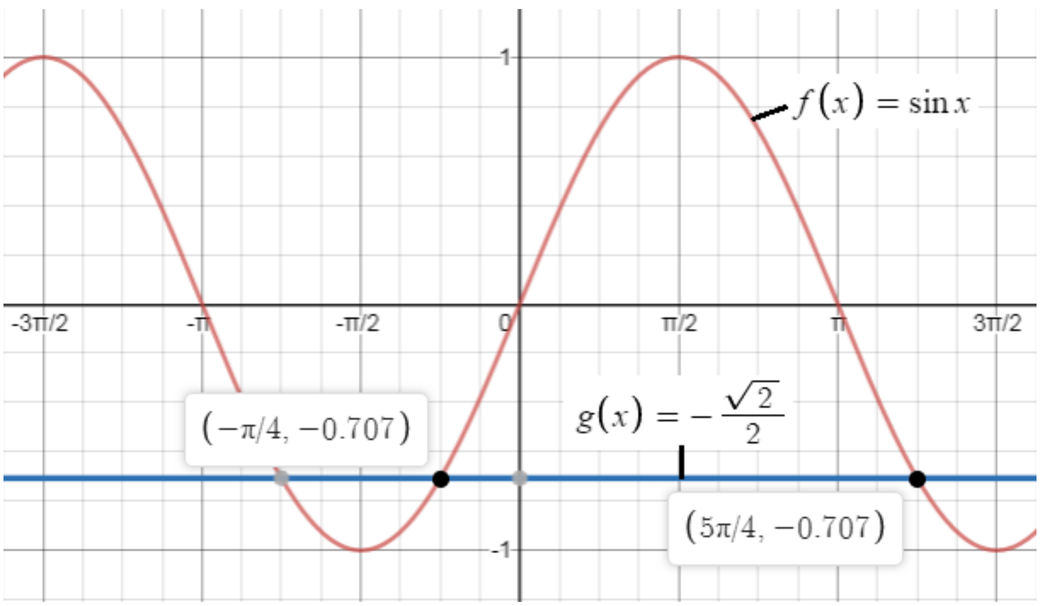

Bild 11 – Grafisk representation av ekvationen $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, in $\mathbb{R}$.

(Källa: Författaren, på Desmos)

6. Att lösa ekvationer av typen $\cos x = a$

När man assimilerat lösningen av en ekvation av typen $\sin x = a$, är det väldigt enkelt att lösa en ekvation av typen $\cos x = a$.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Skillnaden är bara att lägga märke till att: $\boldsymbol{\alpha}$ och $-\boldsymbol{\alpha}$ har samma kosinus, det vill säga $\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{cos}(-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{a}$.

Därför måste vi tänka på följande för att lösa, i $\mathbb{R}$, en ekvation av typen $\mathbf{cos\,x = a}$

- En ekvation av typen $\cos x = a$ har endast en lösning om a $\in [-1,1]$.
- I intervallet [0, 2π] finns det två värden som har samma sin: α and $-\alpha$.
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exempel på en lösning av en ekvation av typen $\mathbf{cos\,x = a}$.

Lös, i $\mathbb{R}$, ekvationen $\mathbf{1 - 2cos\,x = 0}$.

Lösning: $\mathbf{1 - 2\,cos\,x = 0 \Leftrightarrow -2\,cos\,x = -1 \Leftrightarrow cos\,x = \frac{1}{2}}$.

➔ Steg 1:

Bestäm $\boldsymbol{\alpha}$, I radianer, så att $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{\frac{1}{2}}$.

Vi vet att $\mathbf{cos}\,\mathbf{\frac{\pi}{3}} = \mathbf{\frac{1}{2}}$, därför $= \mathbf{\frac{\pi}{3}}$.

➔ Steg 2:

Om $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{\frac{\pi}{3}}$ är en lösning till ekvationen, så är $-\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{\frac{\pi}{3}}$.

➔ Steg 3:

Skriv den allmänna lösningen för ekvationen: $\mathbf{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi} \vee \mathbf{x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k} \in \mathbb{Z}$.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Genom att använda kalkylatorn Desmos kan vi bekräfta de två erhållna värdena:

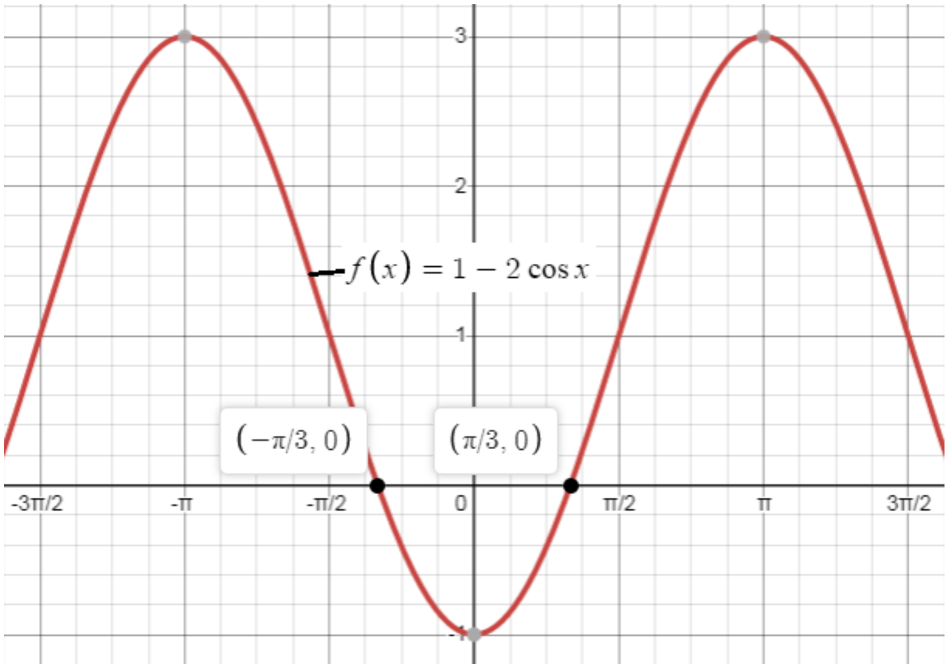

Bild 12 – Grafisk representation av ekvationen $1 - 2\cos x = 0$

(Källa: Författaren, på Desmos)

7. Att lösa ekvationer av typen $\tan x = a$

I intervallet $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, har ekvationen $\tan x = a$ en, och endast en lösning: vi kallar den α.

Eftersom perioden av funktionen $y = \tan x$ vid π, kan vi bestämma att α är lösning till ekvationen $\tan x = a$, och då är även $\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ en lösning.

Därför måste vi tänka på följande för att lösa, i $\mathbb{R}$, en ekvation av typen $\tan x = a$:

- Ekvationen $\tan x = a$ kan lösas för all reella värden av a.
- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exempel på en lösning av en ekvation av typen $\tan x = a$

Lös ekvationen $\tan x = \sqrt{3}, \ 0 \leq x \leq 2\pi$ (rad).

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Vi vet att $\mathbf{tan}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Dörför är, $\mathbf{x} = \frac{\pi}{3} + \mathbf{k\pi}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbf{k = 0 \implies x = \frac{\pi}{3}};$$

$$\mathbf{k = 1 \implies x = \frac{4\pi}{3}};$$

$$\mathbf{\cancel{k} = 2 \implies x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \ \ (större\ \text{än}\ 2\pi)};$$

$$\mathbf{\cancel{k} = -1 \implies x = \frac{\pi}{3} - 2\pi \ \ (mindre\ \text{än}\ 0)}.$$

Därför är, $\mathbf{S} = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

Genom att använda kalkylatorn Desmos kan vi bekräfta de två erhållna värdena:

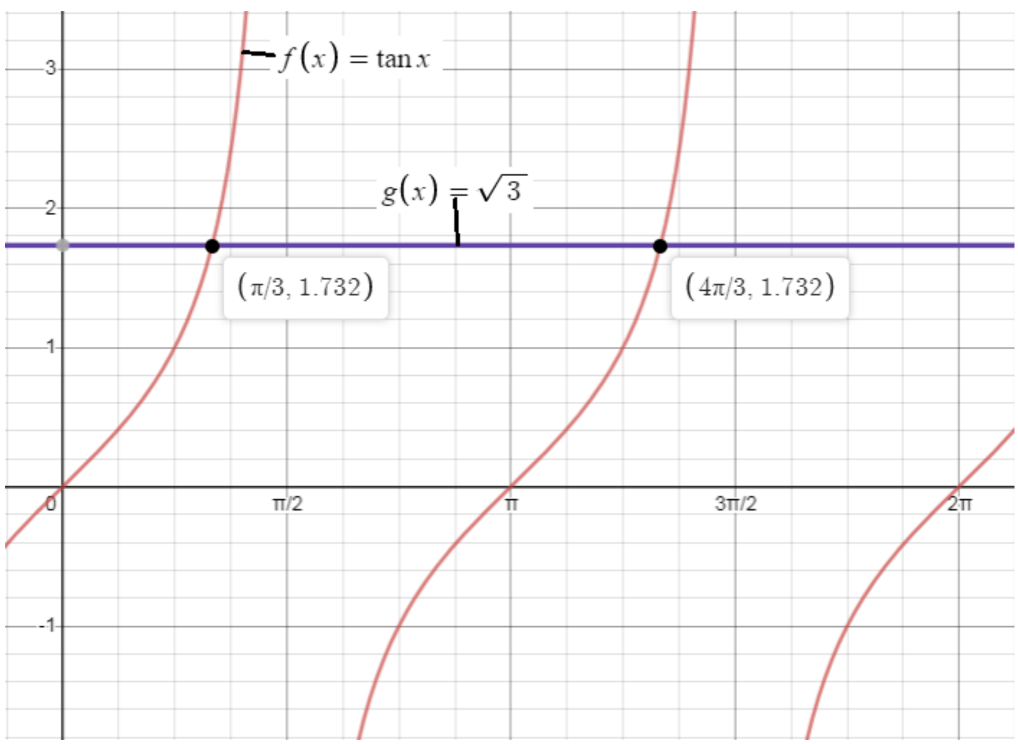

Bild 13 – Grafisk represention av ekvationen $\tan x = \sqrt{3},\ 0 \le x \le 2\pi\ (\mathrm{rad})$.
(Källa: Författaren, på Desmos)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

UPPGIFTER

UPPGIFT 1

Bestäm perioden för var och en av följande trigonometriska funktioner:

1.1. $y = \sin(2x)$;

1.2. $y = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$;

1.3. $y = -2\cos(-5x)$;

1.4. $y = -20\cos(\pi x)$;

1.5. $y = -3\tan(2x)$;

1.6. $y = -3\tan\left(-\frac{\pi}{2}x\right)$.

UPPGIFT 2

Lös, i $\mathbb{R}$, följande trigonometriska ekvation:

2.1. $-2\sin(x) = \sqrt{2}$;

2.2. $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$;

2.3. $-2\sin(x) = -4$;

2.4. $2\sin(2x) - 1 = 0$.

UPPGIFT 3

Lös var och en av följande ekvationer i de angivna uppsättningarna.

OBS! Visa lösningarna I radianer.

3.1. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, in $\mathbb{R}$;

3.2. $2\cos(x) + 1 = 0$, in $\mathbb{R}$;

3.3. $\cos(x) = -1$, in $[0, 3\pi]$.

UPPGIFT 4

Lös var och en av följande ekvationer i de angivna uppsättningarna.

OBS! Visa lösningarna I radianer.

4.1. $3\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{3}$, i $\mathbb{R}$;

4.2. $\tan(2x) = 1$, i $[0, 2\pi]$.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

LÄR DIG MER…

Matten i musiken

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

En strängs lägen

https://www.youtube.com/watch?v=cnH2ltfW48U

Harmoniska serier

https://www.oberton.org/en/overtone-singing/harmonic-series/

Ett sätt att förstå musikaliska intervaller, skalor, stämning och timbre

http://in.music.sc.edu/fs/bain/atmi02/hs/hs.pdf

Trigonometriska funktioner

https://www.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-trig-functions

Undersök grafer av trigonometriska funktioner med Desmos webbapplikation

https://www.desmos.com/

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.