DEL II: Musik & Matematik

ÅLDER: 16-18

TOOL 20: TAKTEKVATIONEN

LogoPsyCom

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Lärarguide

Titel: Taktekvationen

Ålder: 16-18 år

Längd: 1 timme

Matematikinnehåll: Taktteori, trigonometriska identiteter, sinusformade vågor

Konstinnehåll: Frekvens, tonhöjd, ljudvågor

Allmäna mål: Att upptäcka de matematiska begrepp som finns dolda i musikkompositioner och få en mer praktisk bild av användningen av matematik.

Instruktioner: Eleverna kommer att utforska båda fälten som helhet, genom att lyssna på musiken eller spela den och titta på de föreslagna videor som analyserar musikkompositioner. De kommer att upptäcka grunden för de nämnda matematikbegreppen.

Resurser: Denna uppgift innehåller online-resurser som du kan använda i klassrummet. De ämnen som behandlas i uppgiften hjälper dig att hitta annat material för att anpassa och variera lektioner.

Tips till läraren: Att lära sig genom att göra är mycket effektivt, särskilt för unga elever med inlärningssvårigheter. Förklara alltid vad varje mattekoncept är användbart till i praktiken och skapa en praktisk upplevelse för dem.

Mål: I slutet av denna uppgift ska kan eleven kunna:

- Förstå den logiska processen bakom musikkomposition;
- Förstå trigonometriska identiteter;
- Förstå och använda taktekvationen.

Utvärdering:

Skriv 3 saker som du tyckte om med denna uppgift	**1.** **2.** **3.**
Skriv 2 saker som du lärt dig	**1.** **2.**
Skriv 1 sak som kan förbättras	**1.**

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inledning

Musik och matematik har inte en uppenbar koppling för dem som aldrig har komponerat eller läst ett notblad. Det är dock tydligt att tiden i musikaliska kompositioner och strukturen av bladet med mått kommer av ett matematiskt sätt att tänka.

Många forskare har studerat förekomsten av matematik i konsten. Musik var en av fokuspunkterna i dessa studier och det konstaterades att under hela historien hade många matematiker undersökt denna fråga. Pythagoras, Leonardo Bonacci och många andra har bidragit till forskningen. Olika aspekter av matematik, allt från grundgeometri och nummersekvenser till trigonometri, har visat sig användas i musikaliska kompositioner.

I denna uppgift kommer vi att fokusera på tillämpningen av matematik i musikaliska kompositioner genom att först undersöka pythagorisk stämning och utforska möjligheterna som det erbjuder för musikkomposition.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Hur funkar musik?

När vi spelar musik, produceras en vibration och rörelse av luftpartiklar genom öronen och vi hör ljuden på rätt frekvens. Om du tittar på en gitarrsträng kan du se den röra sig på ett visst sätt och i en viss takt. När vi spänner en sträng blir tonhöjden högre och frekvensen snabbare. Det som produceras kallas en ljudvåg och det går rakt in i våra öron och sätter vätskan i våra hörselgångar i den inre delen av örat i rörelse.

Naturligtvis var Pythagoras, en grekisk filosof från omkring 570 - 495 f.v.t. inte medveten om allt vi vet idag om människokroppen och musikalisk komposition. Men han utvecklade en teori om hur man beräknar förhållandena i intervaller, vilket är vad du kommer att lära dig i den här lektionen. Legenden säger att han hörde olika ljud från hammaren i en smedja och förstod att när en hammare var dubbelt så stor eller tung som en annan, gav den samma ton en oktav högre.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ordlista

Frekvens: ger hastigheten på en vibration och tonhöjden för ett ljud.

Hörselgång: är den spiralformade gången i innerörat som reagerar på ljudvibrationer.

Intervall: är skillnaden i tonhöjd mellan två ljud.

Ljudvåg: är den vibration som produceras av ett ljud. Längden och hastigheten bestämmer tonhöjden och frekvensen för ljudet.

Oktav: är tonhöjdskillnaden mellan en ton och en annan som har dubbelt så hög frekvens.

Tonhöjd: är om en ton låter högt eller lågt och mäts i Hertz.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Matematiken bakom musikskapande

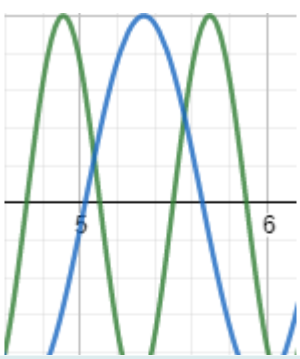
Taktekvationen

Ljudets frekvens är nära kopplad till de ljudvågor som kan ritas för att representera ljuden visuellt. Det finns ett annat fenomen som kallas ”beatet”, som produceras av störningarna mellan de två ljudvågorna som spelas samtidigt. Om du har två ljudvågor som överlappar kommer du att observera olika fenomen**.**

- Om de två ljudvågorna är **konstruktiva**, vilket innebär att de överlappar perfekt, kommer ljudet du hör precis då vara **högre** på grund av **konstruktiv interferens.**

Figur 1: Konstruktiva ljudvågor

- Om ljudvågorna är **destruktiva**, vilket innebär att deras toppar kommer att stå mot varandra, kommer ljudet du hör vara **mjukare** på grund av **destruktiv interferens**.



Figur 2: Destruktiva ljudvågor

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

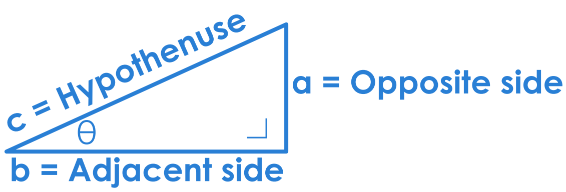
- Om båda vågorna är konstanta, kommer du att höra en regelbunden takt, ett "beat", om du lyssnar på dem samtidigt.

Se denna film av SMUPhysics som visar hur det låter: https://www.youtube.com/watch?v=V8W4Djz6jnY.

Trigonometriska identiteter

Ljudvågorna kan representeras grafiskt med sinusformade funktioner. För att göra det måste du lära dig mer om trigonometriska identiteter. Vi kommer att börja med trianglar som du redan känner till genom Pythagoras sats.

Här är en rätvinklig triangel med vinkeln θ:



Figur 3: Representation av en triangel för att visa trigonometriska identiteter

Här är de trigonometriska funktionerna i denna triangel:

- $\sin(\theta) = \frac{\text{Opposite}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$
- $\cos(\theta) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$
- $\tan(\theta) = \frac{\text{Opposite}}{\text{Adjacent}} = \frac{a}{b}$

Om vi använder Pythagoras sats, används denna formel för att beräkna hypotenusan: a2 + b2 = c2. Denna formel kan förenklas genom att dela allt med c^2.

- $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$
- $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

Med hjälp av de trigonometriska funktionerna kan vi dra slutsatserna att:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

- $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
- $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$
- $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$

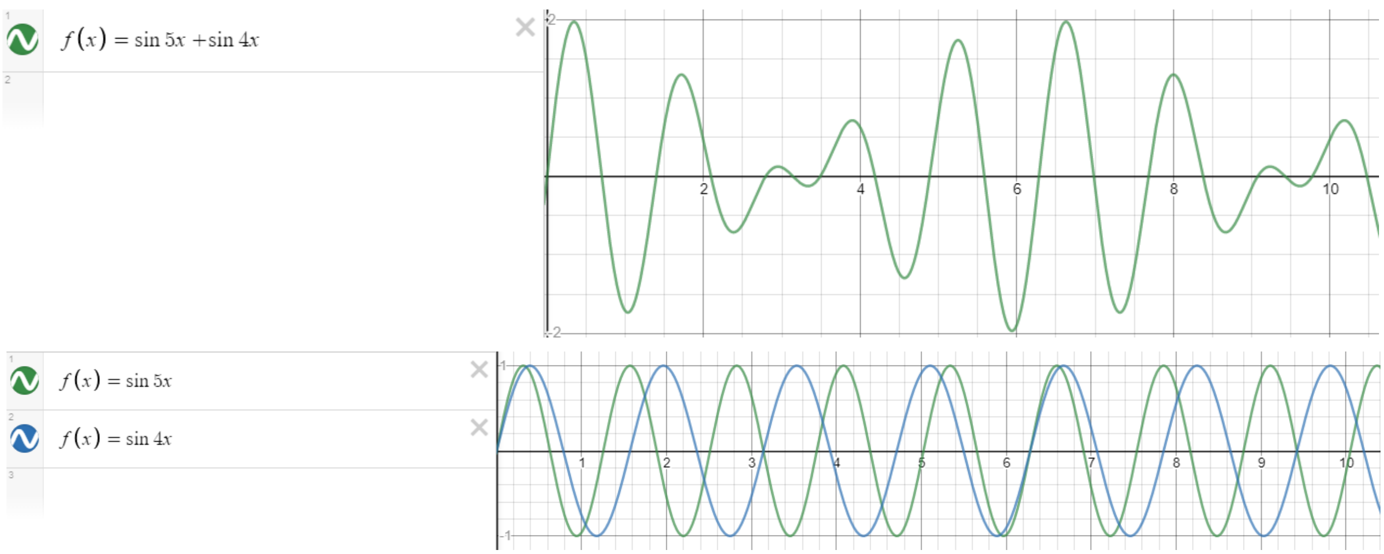
Detta är en av de trigonometriska identiteterna du behöver komma ihåg!

Trigonometriska identiteter är komplexa och det finns flera formler som har använts, bland annat denna, som används för att representera taktfrekvensen::

$$\boxed{\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) * \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

Vi börjar med ett enkelt exempel.

Om vi antar att a = 5x och b = 4x så ser det ut så här om vi använder en grafisk kalkylator::



Figur 4: Representation av trigonometriska identiteter

Då ser vi att:

- Det finns en konstant cykel
- När två toppar är nära varandra blir ljudet högre
- När en top och en dal står mot varandra närmar sig ljudet 0

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Vi studerar detta med en ton. Tonen A, eller La, har en frekvens på 440 Hz. Dess trigonometriska ekvation är::

$$\boxed{\sin(440 * 2\pi * x)}$$

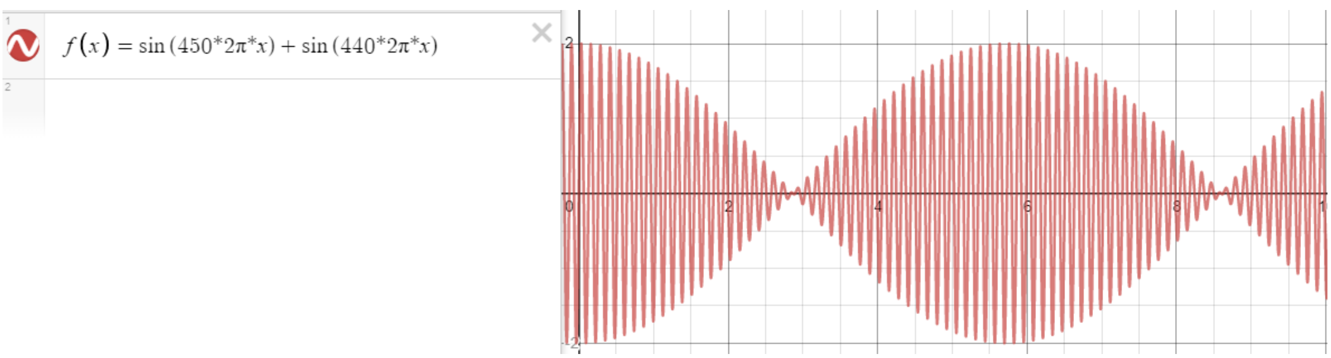
Alltså kan vi säga att:

- a som $(450 * 2\pi * x)$ för att få en annan ton nära A/La
- b som $(440 * 2\pi * x)$

Vi använder taktekvationen:

- $\sin(450 * 2\pi * x) + \sin(440 * 2\pi * x) = 2\sin(445x * 2\pi) + \cos(5x * 2\pi)$

Så här ser det ut om man använder en grafritande kalkylator:



Figur 3: Representation av taktekvationen

Du kan se att, när de sätts ihop, visar vågorna som syns på kalkylatorn en takt som liknar den som hörs när man genomför experimentet med två stämgafflar..

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Erasmus+

TheArtOf Maths

UPPGIFT

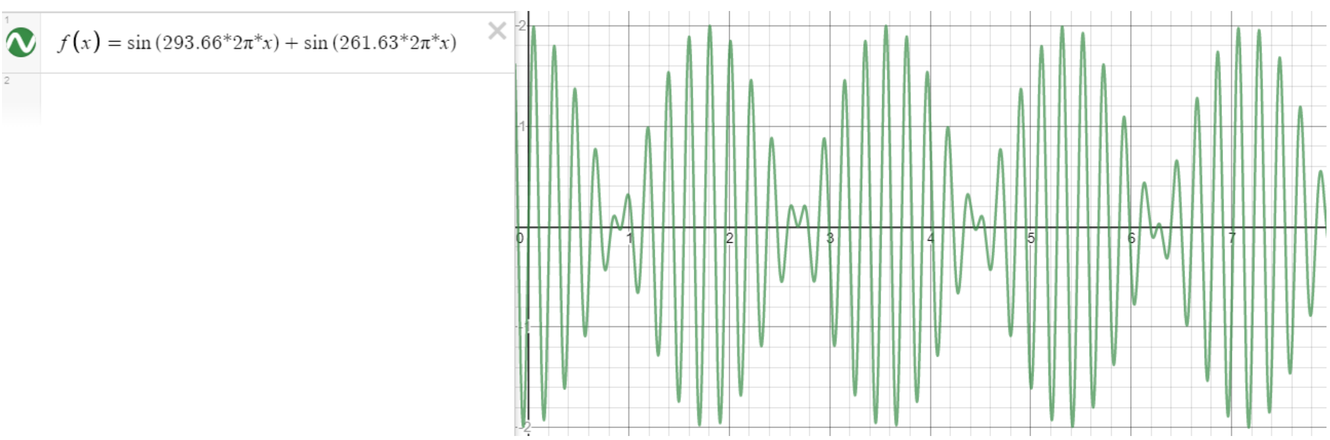
Utforska själv!

Här är en tabell med olika frekvenser för vissa toner:

C	D	E	F	G	A	B
261.63 Hz	293.66 Hz	329.63 Hz	349.23	392 Hz	440 Hz	493.88

Övning 1: D och C

- Vad blir taktekvationen om vi spelar D och C samtidigt?
- Ta en skärmavbild på grafen i Desmos eller GeoGebra:



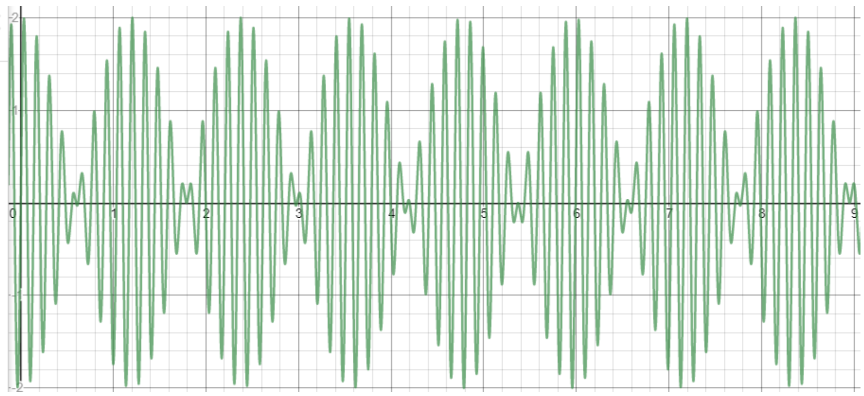
Övning 2: A och G

- Vad blir taktekvationen om vi spelar A och G samtidigt?

- Ta en skärmavbild på grafen i Desmos eller GeoGebra:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

$\sin(440 \cdot 2\pi \cdot x) + \sin(392 \cdot 2\pi \cdot x)$



Testa gärna att använda två stämgafflar för att jämföra ljuden!

LÄR DIG MER…

Ted-ED film om mönster I musik:

https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Film om var ljud kommer från:

https://www.youtube.com/watch?v=i_0DXxNeaQ0

Film om matte I musik:

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

Lektion om taktfrekvensen:

https://www.youtube.com/watch?v=Ca91iOVGd9A

Film om fysiken bakom taktfrekvensen:

https://www.youtube.com/watch?v=IQ1q8XvOW6g

Förklaring till kopplingen mellan trigonometri och musik:

http://www-math.bgsu.edu/~zirbel/sound/Trigonometric%20functions%20and%20sound.pdf

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.